



В.Ф. Фатеев

**РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕТРОЛОГИЯ
ОКОЛОЗЕМНОГО
ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ**

Менделеево – 2017

УДК 006.92.621.396.9
ББК 30.10

**Фатеев В.Ф. Релятивистская метрология
околоземного пространства-времени.** – Монография. –

Менделеево: ФГУП «ВНИИФТРИ», 2017, ил. 22, табл. 1, библи. 269, 439 с.

ISBN 978-5-903232-64-2

Рецензенты:

О.А. Алексеев – д.т.н., профессор, АО «Российская корпорация ракетно-космического приборостроения и информационных систем» (АО «Российские космические системы»),

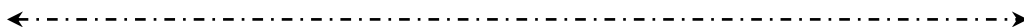
А.А. Поваляев – д.т.н., АО «Российская корпорация ракетно-космического приборостроения и информационных систем» (АО «Российские космические системы»);

Н.Н. Колачевский – д.ф.-м.н., член-корреспондент РАН, директор ФГУН «Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН».

Монография посвящена систематическому изложению вопросов релятивистской метрологии систем хранения времени, систем околоземной космической навигации, геодезии и синхронизации. Она включает четыре взаимосвязанных части. В первой части рассмотрена эволюция физического содержания релятивистской метрологии и экспериментальные основы общей теории относительности как базы релятивистской метрологии. Во второй части исследуются метрические свойства собственного времени и расстояний в стационарном гравитационном поле на поверхности Земли и в околоземном космосе. Предлагаются и анализируются методы релятивистской синхронизации стационарных и мобильных часов. В третьей части развивается оптическая модель гравитационного поля применительно к вращающейся геоцентрической земной системе отсчета ITRS. Развивается электродинамика сплошных сред, движущихся в гравитационных полях различной природы. Выводятся основные формулы для параметров распространения радиоволн на основе оптической модели околоземного гравитационного поля. В четвертой, прикладной части рассматриваются вопросы вычисления и компенсации релятивистских эффектов в системах синхронизации бортовых часов космических навигационных систем ГЛОНАСС, GPS, GALILEO и BeiDou; релятивистские эффекты в системах синхронизации на основе космических радиолиний и ВОЛС; релятивистские ошибки систем навигации и геодезии, а также результаты новых релятивистских экспериментов, проведенных под руководством автора.

Для научных работников, инженеров, аспирантов и студентов, занимающихся исследованием, созданием и применением высокоточных систем хранения времени, навигации, геодезии, синхронизации и связи. Может быть полезной для преподавателей технических вузов.

© ФГУП «ВНИИФТРИ», 2017



ВВЕДЕНИЕ

В связи с неуклонным повышением точности систем хранения времени и частоты, а также точности наземных и космических систем навигации, геодезии и синхронизации в последние годы все более актуальной становится задача учета релятивистских эффектов в перечисленных системах. Причинами этих эффектов являются гравитационное поле Земли и его неоднородность, гравитационные поля соседних небесных тел, неравномерность вращения Земли, высокие, зачастую космические скорости измерителей и др. Уровень относительных релятивистских изменений интервалов времени, расстояний и частоты электромагнитных волн в околоземном пространстве достигает 10^{-9} – 10^{-10} , что на 5–6 порядков превышает достигнутые на сегодняшний день относительные инструментальные погрешности эталонов времени и частоты.

Поэтому цель данной монографии состоит в разработке строгих прикладных методов учета релятивистских эффектов в метрологических комплексах хранения времени, навигации, геодезии и синхронизации, которые используют самые точные на сегодняшний день измерения времени, частоты и расстояний.

Основой этих методов является общая теория относительности (*General Relativity Theory, ОТО*), созданная Альбертом Эйнштейном в 1916 году. На сегодняшний день она признана единственной экспериментально подтвержденной теорией гравитации и нет никаких экспериментальных свидетельств, опровергающих данную теорию. Поэтому разрабатываемые методы и составляют содержание *релятивистской метрологии*.

Методы релятивистской метрологии в монографии разрабатываются применительно к околоземному пространству-времени. Дело в том, что в теории относительности время и пространство по отдельности не существуют. Первым это понял Герман Минковский, который и предложил четырехмерное представление единого пространства-времени. Вот что он сказал на одной из своих лекций в 1908 г.: «Милостливые господа! Воззрения на пространство и время, которые я намерен перед Вами развить, возникли на экспериментально-физической основе. В этом их сила. Их тенденция радикальна. Отныне пространство и время сами по себе должны обратиться в фикции, а лишь некоторый вид соединения обоих должен сохранить самостоятельность».

←----->

Для разработки методов релятивистской метрологии в данной монографии выбрано околоземное пространство-время, ограниченное размером геостационарной орбиты. Это объясняется тем, что все широко используемые прикладные наземно-космические системы навигации, геодезии, синхронизации, связи располагаются в пределах этой орбиты.

Другая причина связана с использованием в практике космических измерений геоцентрических систем отсчета, вращающихся вместе с Землей. Примерами таких систем являются широко известные Международная земная система отсчета *ITRS (International Terrestrial Reference System)*, Мировая геодезическая система *WGS-84 (World Geodetic System)*, а также Система геодезических параметров «Параметры Земли ПЗ-90.11». Именно в этих системах отсчета производятся наземные геодезические измерения, в этих системах производятся навигационные определения в глобальных навигационных спутниковых системах (ГНСС). Кроме того, в этих системах удобно вести расчет систем спутниковой синхронизации наземных часов, поскольку геостационарные спутники связи в них практически неподвижны. За пределами геостационарной орбиты использование вращающихся земных систем отсчета пока мало оправдано.

Вращающиеся земные системы имеют еще одну чисто релятивистскую особенность: в них, в силу принципа эквивалентности в ОТО, появляются дополнительные гравитационные поля – наведенные вращением поля механических сил инерции. Воздействие этих полей на хранители времени и частоты, а также на электромагнитные волны соизмеримо и совершенно неотличимо от воздействия истинных гравитационных полей Земли, Луны и Солнца. Поэтому воздействие этих полей на параметры распространения волн, а также на характеристики поведения шкал времени должно быть строго учтено, что возможно сделать на основе аппарата ОТО.

Кроме того, в таких системах распространение радиоволн одновременно происходит через преломляющую сплошную среду – атмосферу. Поэтому для точного расчета параметров волн в истинном гравитационном поле тяготеющих тел (Земли, Луны и Солнца), в поле сил инерции вращающейся системы, а также в атмосфере (тропосфере и ионосфере) необходимо расширить область действия методов электродинамики сплошных сред на гравитационные поля и неинерциальные системы отсчета.

Актуальность дальнейшего развития методов релятивистской метрологии объясняется взрывным характером изменения инструментальных возможностей современной измерительной техники.

←----->

Так, при разработке в США и СССР космических навигационных систем НАВСТАР и ГЛОНАСС около 30 лет назад задача создания бортового стандарта частоты с относительной нестабильностью 10^{-12} - 10^{-13} была настолько трудно выполнимой, что в обеих странах представлялась как национальная проблема. Сейчас же только за несколько последних лет характеристики нестабильности систем хранения частоты и времени поднялись от значений 10^{-14} - 10^{-15} до 10^{-16} (стандарты «фонтанного» типа). В нескольких лабораториях мира, в том числе в России (ФГУП «ВНИИФТРИ», ИЛФ СО РАН, ФИАН) завершается создание оптических стандартов с нестабильностью 10^{-17} . Уже вручена Нобелевская премия разработчикам прообраза часов с нестабильностью 10^{-18} (США), а среди специалистов, в том числе в России, обсуждаются принципы построения и проводятся эксперименты по созданию оптических стандартов с нестабильностью 10^{-19} - 10^{-20} .

При таких характеристиках можно говорить уже не только об учете релятивистских явлений в измерительных системах, но и об измерении величины этих эффектов в интересах решения практических задач. Одно из практических направлений в геодезии, связанное с измерениями релятивистского эффекта замедления времени и гравитационного смещения частоты, в современной научной литературе так и называется: «Релятивистская геодезия».

Не менее серьезные перемены ожидаются в области повышения точности измерения длины. В Международном геодезическом проекте *GGOS (Global Geodetic Observer System)* объявлены требования к точности определения координат на поверхности Земли, которая характеризуется погрешностью измерений 1 мм и менее. По отношению к радиусу Земли это составляет величину 10^{-10} - 10^{-11} , что на 1–2 порядка превышает уровень релятивистского изменения длины в гравитационном поле Земли.

В 2016 году, в год 100-летия ОТО, большой группой американских исследователей были обнаружены гравитационные волны, предсказанные уравнениями Эйнштейна. В качестве измерительного инструмента использовался классический лазерный интерферометр Майкельсона. Здесь важно отметить, что идея использования лазерного интерферометра для гравитационной антенны была впервые выдвинута в 1962 году нашими соотечественниками – Герценштейном В.Е. и Пустовойтом В.И. (ныне – академик РАН). Поражают достигнутые инструментальные возможности созданного интерферометра: чувствительность к изменению длины базы, что и позволило обнаружить гравитационные волны, составляет 10^{-18} м. Это на 7–8 порядков превышает привычные цифры, полученные в лабораторных экспериментах и в имеющихся эталонах длины.

←----->

Достигнутые характеристики современных измерительных средств позволят по-новому взглянуть на дальнейшее развитие методов релятивистской метрологии.

По своему содержанию монография делится на IV части, включающие 11 разделов.

Часть I посвящена рассмотрению физических основ релятивистской метрологии и включает разделы 1 и 2.

В первом разделе рассмотрены эволюция физического содержания и экспериментальные основы общей теории относительности. Исследуются метрические свойства пространства-времени в классической физике Ньютона, в специальной и общей теории относительности, а также их метрологические следствия. Анализируются экспериментальные основы и необходимость развития оптической модели гравитационного поля. Ставятся задачи усовершенствования и развития методов релятивистской метрологии.

Во втором разделе с целью более доступного изложения материалов последующих разделов приводятся необходимые сведения из геометрии Гаусса-Римана, приводятся основные сведения из тензорной алгебры, рассматриваются основные свойства четырехмерного и трехмерного метрических тензоров. Изложение материала ведется на основе классических книг: Н.Е. Кочин «Векторное исчисление и начала тензорного анализа» и Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц «Теория поля». Кроме того, на основе метрического тензора гравитационного поля для невращающейся небесной системы отсчета вычисляются компоненты метрического тензора для геоцентрических вращающихся земных систем отсчета *ITRS*, *WGS-84*, «Параметры Земли ПЗ-90.11» с учетом неравномерности вращения Земли и полей Солнца и Луны. Здесь же вычисляются компоненты метрического тензора орбитальной системы отсчета.

Часть II посвящена релятивистской метрологии времени, частоты и расстояний на Земле в околоземном пространстве и содержит разделы 3 и 4.

В третьем разделе исследуются метрические свойства собственного времени и расстояний в стационарном гравитационном поле на поверхности Земли. Выводится обобщенная формула связи между интервалами собственного (измеряемого) времени, отсчитываемыми по подвижным часам в двух наземных точках. Предлагаются и анализируются методы релятивистской синхронизации стационарных и мобильных часов. Оцениваются и анализируются релятивистские эффекты, вызванные разностью статических и векторных гравитационных потенциалов, эффектом Доплера II порядка, неравномерностью вращения Земли, влиянием полей Луны и Солнца на наземные стационарные и мобильные часы.

←----->

В четвертом разделе рассматривается поведение шкалы времени спутниковых часов относительно наземных. При этом оценено влияние на шкалу спутниковых часов таких факторов, как высота и эллиптичность орбиты, неоднородность ГПЗ в виде второй и последующих зональных гармоник, влияние поля Луны и Солнца. Рассмотрены несколько удобных форм представления релятивистского расхождения наземной и бортовой спутниковой шкалы времени. Предложены два практических варианта релятивистской синхронизации бортовых и наземных атомных часов, отличающихся точностью учета релятивистских эффектов.

Часть III посвящена развитию оптической модели околоземного пространства-времени и распространению радиоволн и включает разделы 5, 6, 7.

В разделе 5 развивается электродинамика сплошных сред, движущихся в гравитационных полях различной природы. Выводятся уравнения Максвелла и материальные соотношения в тензорной и векторной форме. Решается волновое уравнение, определяется волновой вектор и эффективный коэффициент преломления гравитационного поля с учетом сплошной среды, векторного гравитационного потенциала и движения среды. Выводятся уравнения поля для анизотропных сред в гравитационном поле, а также обобщаются на гравитационное поле известные уравнения И.Е. Тамма, выведенные на основе представления о поляризации среды.

В разделе 6 выводятся основные формулы для параметров распространения радиоволн на основе оптической модели околоземного гравитационного поля: времени распространения; частоты и фазы электромагнитной волны; угла рефракции, в том числе, во вращающейся земной системе отсчета; угла поворота плоскости поляризации; фазовой и групповой скорости волны, в том числе, в диспергирующей ионосфере. Показано, что оптическую модель гравитационного поля с заполняющей движущейся сплошной средой можно охарактеризовать следующими показателями: обобщенным коэффициентом преломления; коэффициентом гравитационного преобразования частоты; показателем релятивистской рефракции; показателем градиента релятивистской поляризации. Делается вывод, что на основе этих показателей любую релятивистскую задачу можно свести к обычной задаче по распространению радиоволн.

В разделе 7 исследуются параметры распространения радиоволн применительно к вращающейся земной системе отсчета ITRS. При этом околоземное пространство-время в ITRS представляется как оптически плотная «гравитационная среда», учитывающая влияние потенциалов

←----->

статических гравитационных полей Земли, Луны и Солнца, гравитационного потенциала поля центробежных сил инерции, а также влияние атмосферы. Вычисляются основные формулы для обобщенного коэффициента преломления, коэффициента гравитационного преобразования частоты и коэффициента преобразования масштаба собственного времени. Приводятся основные формулы, определяющие параметры распространения волн в односторонней и запросной радиоперелиниях.

На основе ранее разработанного аппарата определяются основные эффекты распространения оптических волн в запросной и беззапросной линиях в волоконно-оптических линиях связи и синхронизации (ВОЛС).

Часть IV посвящена прикладным вопросам релятивистской метрологии околоземного пространства-времени и включает 8, 9, 10 и 11 разделы.

В разделе 8 исследуются вопросы релятивистской метрологии времени и частоты в глобальных навигационных спутниковых системах. Исследуется состав релятивистских смещений шкал времени навигационных КА (НКА) относительно Центрального синхронизатора для всех современных и перспективных ГНСС: ГЛОНАСС, GPS, GALILEO и BeiDou. Проводится анализ наиболее значимых составляющих смещений, а также предлагаются методы релятивистской синхронизации для бортовых шкал всех перечисленных ГНСС. Проводится расчет релятивистских эффектов при использовании метода межспутниковой синхронизации.

В разделе 9 исследуются вопросы релятивистской метрологии применительно к наземным и космическим радиоперелиниям синхронизации. При этом исследуются космические радиоперелинии с компенсацией задержки и эффекта Допплера I порядка для радиосигнала на трассе Земля–космос. В качестве таких радиоперелиний рассматриваются комплексная запросно-беззапросная, а также дуплексная, использующая две встречных беззапросных радиоперелинии, в том числе через космический ретранслятор. Производится релятивистский расчет систем синхронизации на основе ВОЛС, в том числе релятивистский расчет метода точной передачи фазы.

В разделе 10 рассмотрены вопросы релятивистской метрологии космических измерительных радиоперелиний. Оценены величины релятивистских погрешностей в навигационной аппаратуре потребителей (НАП) ГНСС при измерении псевдодальностей, псевдоразрадиальных скоростей и их разностей. Оценены релятивистские ошибки геодезических наземных и космических систем на основе НАП ГЛОНАСС/GPS, а также лазерных и доплеровских космических геодезических систем.



В разделе 11 приведены результаты новых наземных экспериментов:

– по определению разности гравитационных потенциалов между двумя наземными точками через измерение гравитационного расхождения двух шкал времени;

– по экспериментальной проверке точности метода релятивистской синхронизации шкалы времени транспортируемого водородного стандарта частоты и времени.

Кроме того, предлагается экспериментальная проверка новых электродинамических релятивистских эффектов на постоянных магнитных и электрических полях, а также в системах проводников с электрическим током. Эти эффекты следуют из разработанной в монографии электродинамики неинерциальных сред и являются гальваническими аналогами волнового эффекта Саньяка.

Работа над монографией велась на основе анализа теоретических и экспериментальных результатов, полученных отечественными и зарубежными авторами, а также на основе результатов автора, полученных за годы разработки темы релятивистских эффектов. Приведенный в конце книги список литературы не претендует на полноту и включает лишь те работы, которые непосредственно использовались в тексте.

Монография является продолжением и развитием известной книги Фатеева В.Ф. «Введение в релятивистскую теорию радионавигации и синхронизации» (1988 г.) [33]. В ней пока не рассмотрены релятивистские явления в многопозиционных космических системах радиолокации, в космических системах связи, а также наземных системах передачи данных на основе ВОЛС. Это предполагается сделать в следующей книге. Кроме того, не рассматриваются релятивистские эффекты в радиоинтерферометрах со сверхдлинной базой – РСДБ (*VLBI – Very Long Base Interferometer*). Эта проблема достаточно глубоко изучена в работах отечественных и зарубежных авторов применительно к небесным системам отсчета: невращающейся барицентрической (BCRS) с началом в центре масс Солнца, а также невращающейся геоцентрической (GCRS) с началом в центре масс Земли (см., например, [10, 138, 139, 260–267]).

Автор надеется, что монография окажется полезной студентам и аспирантам технических вузов, а также научным работникам и инженерам, занимающимся исследованием и созданием новых наземных и космических систем хранения времени, систем навигации, геодезии, синхронизации и связи.

ЧАСТЬ I. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕТРОЛОГИИ

1. ФИЗИЧЕСКОЕ СОДЕРЖАНИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ОСНОВЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕТРОЛОГИИ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

1.1. Метрика пространства и времени в классической физике Ньютона

Пространственно-временные соотношения в инерциальных (неускоренных и невращающихся) системах отсчета в рамках дорелятивистской физики (механики Ньютона) устанавливаются преобразованиями Галилея. Эти преобразования делают все физические законы инвариантными к выбору инерциальных систем. Или по-иному: все механические процессы протекают одинаково в любой равномерно движущейся невращающейся системе. Для демонстрации свойств преобразований Галилея рассмотрим событие A , которое, например, заключается в переходе стрелки циферблата через нулевое положение. Выберем две разнесенные инерциальные системы координат K и K' так, что одноименные их оси параллельны, а вторая система движется относительно первой с постоянной скоростью V'_x вдоль оси OX . Пространственные координаты и показания часов в каждой из этих систем обозначим в виде $A\{x_a, y_a, z_a, t_a\}$; $A'\{x'_a, y'_a, z'_a, t'_a\}$. Соответствующие преобразования Галилея имеют вид:

$$x'_a = x_a - v'_x t_a, \quad y'_a = y_a, \quad z'_a = z_a, \quad t'_a = t_a. \quad (1.1)$$

Если взять любую другую систему координат K'' , то при любой скорости её движения можно записать

$$t''_a = t'_a = t_a. \quad (1.2)$$

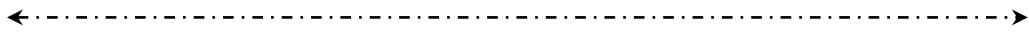
Это свидетельствует о независимости времени от выбора систем координат, или о его абсолютности.

Если ввести в рассмотрение некоторое событие B , то, исходя из (1.5), можно записать

$$t'_b - t'_a = t_b - t_a, \quad (1.3)$$

или

$$\Delta t' = \Delta t, \quad (1.4)$$



откуда следует, что интервал времени между двумя событиями не зависит от выбора систем отсчета – он абсолютен. В частности, если два события одновременны в одной системе, они будут одновременными и в любой другой. Одновременность в классической физике также абсолютна.

Если в системе K взять стержень с координатами концов x_1, x_2 , то его длина составит $\Delta x = x_2 - x_1$. В движущейся системе K' координаты концов стержня, согласно уравнениям (1.1), составят:

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 - vt, \\ x'_2 &= x_2 - vt, \end{aligned} \tag{1.5}$$

откуда следует, что

$$x_2 - x_1 = x'_2 - x'_1 = \Delta x, \tag{1.6}$$

т.е. длина стержня одинакова в любых равномерно движущихся системах отсчета.

Таким образом, в физике Ньютона метрические свойства пространства и времени неизменны при переходе к любым инерциальным системам. При этом пространство и время существуют отдельно сами по себе, не зависят от материальных тел, а время рассматривается как независимая философская категория.

1.2. Метрические свойства пространства-времени в специальной теории относительности

1.2.1. Преобразования Лоренца

Из преобразований (1.1) путем дифференцирования координат по времени получаем простое правило сложения скоростей:

$$V'_x = V_x - v, \quad \text{или} \quad V_x = V'_x + v. \tag{1.7}$$

После открытия электромагнитных волн широкое распространение получила теория светового эфира, согласно которой все окружающее пространство заполнено упругой неувлекаемой средой – эфиром. Скорость волн в этой среде – $C_s = 3 \cdot 10^8$ м/с. При движении источника волны относительно эфира со скоростью $\pm v$ на основе правила сложения скоростей (1.7) скорость волны составит $C_x = C_s \pm v$, что открывает возможности получения сверхсветовых скоростей в вакууме.

←----->

Вместе с тем, многочисленные эксперименты, проведенные в конце прошлого и в начале нашего веков, например, классический Майкельсона – Морли [1], позволили однозначно установить следующий факт: скорость света не зависит от скорости источника, его создающего, и всегда равна постоянной $C = 3 \cdot 10^8$ м/с. В частности, в опыте советского ученого Бонч-Бруевича [5] измерялась скорость радиоволн, излучаемых противоположными краями диска вращающегося Солнца. Несмотря на большую линейную скорость точек на солнечном экваторе, факт не только подтвердил правило сложения скоростей Галилея, но имел фундаментальные последствия для классической физики вообще и для теории времени в частности. Он привел к созданию специальной теории относительности (СТО), а затем и общей теории относительности (ОТО). Обе эти теории поднимают на качественно новый уровень теорию времени и теорию распространения электромагнитных волн.

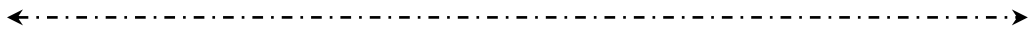
Чтобы установить, к каким следствиям приводит постоянство скорости света в различных инерциальных системах отсчета рассмотрим распространение радиоволны в вакууме относительно двух инерциальных систем K и K' , вторая из которых движется относительно первой со скоростью v вдоль оси OX . Условимся, что радиосигнал испускается из общего начала координат O и O' в момент времени $t = t' = 0$. Уравнение, описывающее распространение сферической волны в неподвижной системе K , имеет вид:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2. \quad (1.8)$$

Поскольку скорость радиоволн, как отмечалось, не зависит от скорости движения источника, то уравнение той же волны, но в системе K' , представляется в аналогичной форме:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2. \quad (1.9)$$

Интересно отметить, что подстановкой преобразований Галилея (1.1) в это уравнение получить (1.8) уже невозможно. Это свидетельствует о том, что при изучении процессов распространения электромагнитных сигналов преобразования Галилея становятся некорректными. Далее мы увидим, что эти преобразования в принципе неверны для любых процессов с любыми скоростями протекания.



Таким образом, преобразования Галилея нуждаются в уточнении. Чтобы оценить возможные изменения в форме этих преобразований, на основе соотношений (1.8) и (1.9) запишем равенство

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{t^2} = \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{t'^2}. \quad (1.10)$$

Для выполнения равенства (1.10) в любой подвижной системе отсчета изменениям должны подвергаться не только пространственные координаты (как в преобразованиях Галилея), но и время. Таким образом, экспериментальный факт независимости скорости света от скорости источника поставил под сомнение абсолютность времени.

Для вывода новых преобразований из (1.8) и (1.9) запишем равенство

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2. \quad (1.11)$$

Поскольку искомые преобразования в силу однородности пространства должны быть линейными, то можно записать

$$x' = \alpha x + \beta t, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma x + \delta t, \quad (1.12)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – постоянные величины, которые определяются так, что условие (1.11) удовлетворяется при любых пространственно-временных координатах.

Для точки O' имеем $x' = 0$. Тогда из первого уравнения (1.12) находим закон движения O' относительно системы K :

$$x = -\frac{1}{\alpha} \beta t.$$

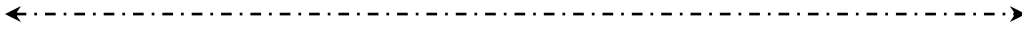
Но поскольку скорость этой точки равна v , то

$$\beta = -\alpha v. \quad (1.13)$$

Начальная точка O имеет координату $x = 0$. Тогда из уравнений (1.12) после исключения t получим формулу

$$x' = t' \beta / \delta,$$

описывающую движение точки O относительно K' . Из соображений симметрии следует, что скорость точки O относительно K' равно $-v$, что с учетом (1.13) дает:



$$\frac{\beta}{\delta} = -v, \quad \beta = \delta v = -\alpha v, \text{ т.е. } \delta = \alpha.$$

Поэтому соответствующие уравнения системы (1.12) можно переписать в виде:

$$x' = \alpha(x - vt), \quad t' = \gamma x + \alpha t, \quad (1.14)$$

Подставив выражение (1.14) в (1.11), получаем:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = y'^2 + z'^2 + (\alpha^2 - \gamma^2 c^2) x^2 - \alpha^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) c^2 t^2 - 2\alpha(\gamma c^2 + \alpha v) x t.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых членах обеих частей этого выражения, приходим к системе трех уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \alpha^2 - \gamma^2 c^2 &= 1, \\ \alpha^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) &= 1, \\ \alpha(\gamma c^2 + \alpha v) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

Из последних двух уравнений получаем:

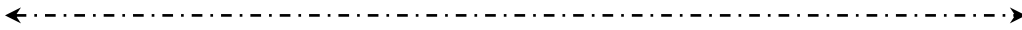
$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \gamma = -\frac{\alpha v}{c^2} = -\frac{v/c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (1.16)$$

Первое из уравнений (1.15) удовлетворяется тождественно.

В результате на основании соотношений (1.12), (1.14) и (1.16) получаем закон преобразования пространственно-временных координат произвольного события:

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z; \quad t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

Обратные преобразования можно получить путем взаимной замены штрихованных и нештрихованных переменных и заменой $+v$ на $-v$:



$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, y = y', z = z'; t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

Впервые преобразования (1.17) и (1.18) вывел Лоренц и по предложению Пуанкаре они получили название специальных преобразований Лоренца вследствие специального выбора декартовых осей. Нетрудно заметить, что при $c \rightarrow \infty$ эти преобразования сводятся к преобразованиям Галилея.

В общем случае, когда все три компонента вектора скорости системы K' относительно K не равны нулю, обобщенные преобразования Лоренца имеют следующий вид [2]:

$$\left. \begin{aligned} \vec{R}' &= \vec{R} + \vec{v} \left[\frac{\vec{R} \vec{v}}{c^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) - \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right], \\ t' &= \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} \left(t - \frac{\vec{R} \vec{v}}{c^2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

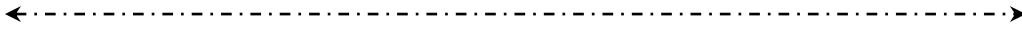
где $\vec{R} \vec{v} = xv_x + yv_y + zv_z$ – скалярное произведение векторов \vec{R} и \vec{v} .

1.2.2. Метрические следствия преобразований Лоренца

Проанализируем полученные результаты. Рассмотрим в системе K' идеальные часы S' , расположенные в точке $x' = x'_1$ (рис. 1.1). Когда через некоторое время от начала движения движущиеся часы покажут время $t' = t$, неподвижные часы S в системе K , пространственно совпадающие в этот момент с часами S' , покажут, согласно соотношениям (1.18), время

$$t = \gamma \left(t'_1 + \frac{vx'_1}{c^2} \right),$$

где $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2}$. Затем, когда часы S' покажут время $t' = t'_2$, их показания будут совпадать с другими неподвижными часами в системе K , показывающими время



$$t_2 = \gamma \left(t'_2 + \frac{vx'_1}{c^2} \right).$$

При вычитании времени t_1 из t_2 получим

$$\Delta t = \gamma (t'_2 - t'_1) = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (1.20)$$

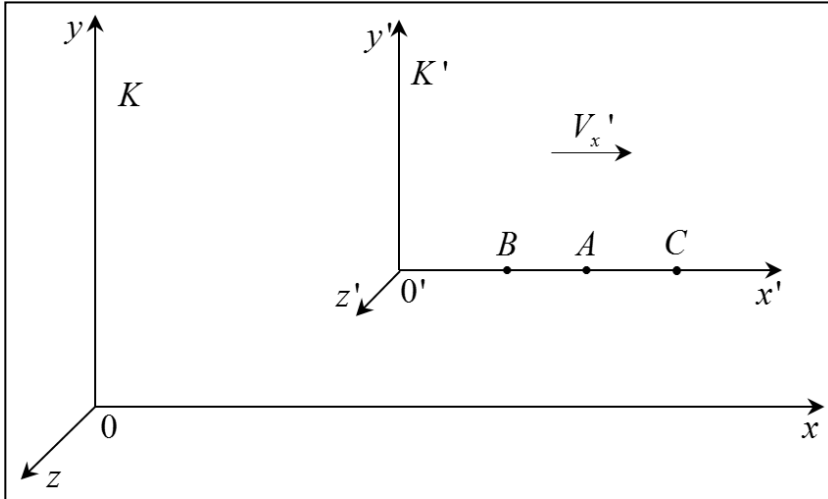
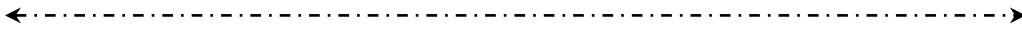


Рис. 1.1. Взаимное положение подвижной K' и неподвижной K инерциальных систем отсчета

Следовательно, покоящиеся часы покажут большой промежуток времени, или, иначе, движущиеся часы идут медленнее, чем аналогичные неподвижные.

Эффект замедления времени движущихся часов впервые обнаружил Эйнштейн. Одна из принципиальных возможностей измерения этого эффекта состоит в следующем. В начале систем координат K и K' размещают часы S и S' , совмещают начало координат обеих систем и сверяют часы. Затем с момента времени $t = t'$ (по часам S и S') система K' вместе с часами S' движется со скоростью $+v$ до некоторой точки на оси системы K и возвращается обратно со скоростью $-v$. Поскольку темп хода часов, согласно (1.20), не зависит от направления движения, то в момент встречи показания часов Δt и $\Delta t'$ связаны соотношением (1.20), причем разность их показаний, определяемая при вторичной сверке, составит:



$$\Delta t - \Delta t' \approx \Delta t' \frac{v^2}{2c^2} \approx \Delta t \frac{v^2}{2c^2}. \quad (1.21)$$

Отсюда следует, что движущиеся часы отстают от неподвижных, причем отставание не зависит от направления движения, а определяется лишь квадратом модуля этой скорости. Рассмотренный эффект называют «парадоксом близнецов» (например, [6, 15]).

Следует подчеркнуть, что полученное различие показаний часов в разных системах отсчета не имеет малейшего отношения к какому-либо нарушению хода часов в той или иной системе, а также не зависит от природы часов. Дело в фундаментальных свойствах пространства-времени, о которых речь пойдет ниже.

Таким образом, после установления факта постоянства скорости света время перестало быть абсолютным. Оно течет по-разному в различных системах отсчета. Промежуток времени между двумя событиями в одной инерциальной системе уже не равен промежутку времени между теми же событиями, но в другой системе, движущейся относительно первой. Следовательно, утверждение, что между двумя данными событиями прошел определенный промежуток времени, приобретает смысл только тогда, когда указано, *к какой системе отсчета* это утверждение относится. В частности, *события, одновременные в одной системе отсчета, будут неодновременными в другой. Поэтому источник эталонного промежутка времени в одной инерциальной системе уже не является таковым в другой инерциальной системе.*

На основании преобразований Галилея выше было установлено, что длина жесткого стержня не зависит от выбора системы отсчета. Рассмотрим теперь измерительный стержень, покоящийся в системе K' и расположенный вдоль оси x'_1 и x'_2 . Длина стержня в системе K (собственная длина) определяется формулой $l^0 = x'_2 - x'_1$. В соответствии с первым уравнение (1.17) движение концов стержня в системе K определяется выражением:

$$x_1(t) = vt + \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} x'_1, \quad (1.22)$$

$$x_2(t) = vt - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} x'_2. \quad (1.23)$$

←----->

Длина стержня в системе K определяется как разность между координатами его концов в один и тот же момент времени:

$$l = x_2(t) - x_1(t) = l^0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (1.24)$$

Следовательно, тело, движущиеся со скоростью v относительно инерциальной системы K , изменяет свои размеры (сокращается) в направлении своего движения на величину

$$\Delta l = l^0 \left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - 1 \right) \approx -l^0 \frac{v^2}{2c^2}. \quad (1.25)$$

Таким образом, понятие длины жесткого стержня имеет определенный смысл лишь относительно конкретной системы отсчета, причем длина стержня в разных системах отсчета будет разной. Понятие длины, также как и понятие времени, потеряло свой абсолютный смысл.

Общий вывод: метрические свойства пространства и времени в специальной теории относительности зависят от выбора инерциальной системы отсчета. Эталонный промежуток времени и эталонный элемент длины (жесткий стержень), покоящиеся в одной в инерциальной системе отсчета, уже не являются таковыми, если их рассматривать из другой, движущейся, инерциальной системы. Для расчета новых размеров эталонов необходимо знать скорость относительного движения двух инерциальных систем.

На основании преобразований Лоренца нетрудно установить соотношения, определяющие изменения основных параметров радиоволны, распространяющейся между движущимися передатчиком и приемником: времени распространения и частоты.

1.2.3. Преобразование параметров волны в специальной теории относительности

Поскольку категория времени не абсолютна, то время распространения радиосигнала, очевидно, различно в разных системах отсчета. Установим в начале неподвижной системы K (рис. 1.2) излучатель, а в точке B подвижной системы K' – приемник волны.

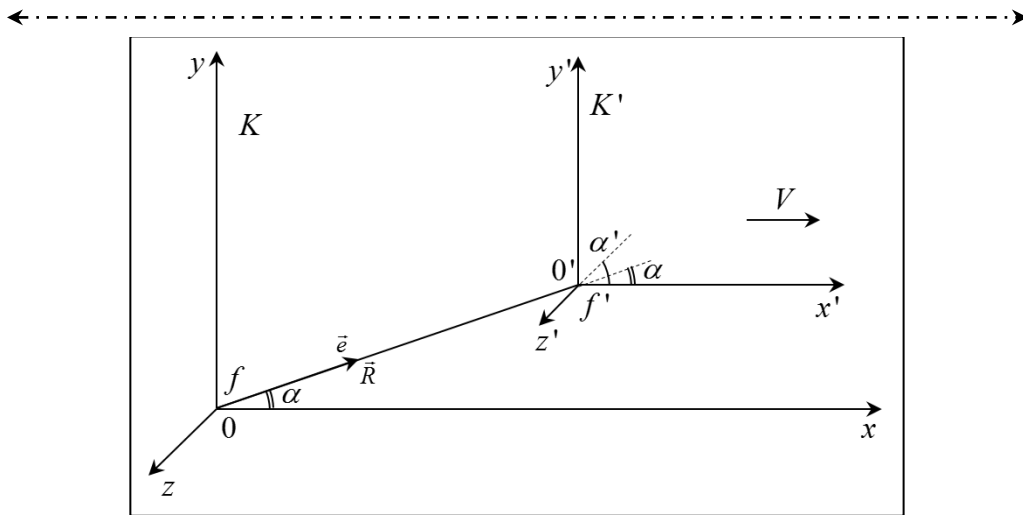


Рис. 1.2. К вопросу преобразования параметров волны

Условимся, что в исходном состоянии обе системы совпадают, а движение системы K' вдоль оси Ox системы K начинается в момент излучения волны. Время распространения луча от момента излучения до момента приема, отсчитываемое по часам неподвижной системы, определится преобразованиями (1.18):

$$t_R = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \left(t'_R + \frac{vx'}{c^2}\right),$$

где t_R и t'_R – время распространения в системах K и K' .

Так как приемник в системе K' неподвижен, то время распространения по часам неподвижной системы

$$t'_R = \frac{x'}{V_{gp}}, \quad (1.26)$$

где V_{gp} – групповая скорость распространения сигнала. В результате

$$t_R = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \left(\frac{c}{V_{gp}} + \frac{v}{c}\right) \frac{x'}{c}, \quad (1.27)$$

При распространении волны в вакууме эта формула упрощается:

$$t_R \approx \frac{x'}{c} \left(1 + \frac{v}{c} + \frac{v^2}{2c^2}\right), \quad (1.27a)$$

причем в момент излучения сигнала $x' = x$.

Для определения фазы и частоты волны рассмотрим в неподвижной системе K плоскую волну с единичным вектором \vec{e} в направлении нормали к фронту волны, расположенным в плоскости XOY (рис. 1.2). Пусть эта волна обладает частотой f и скоростью c относительно системы K . Такую волну в точке A можно описать, например, функцией вида

$$E = E_0 \cos \Phi, \quad (1.28)$$

где E, E_0 – напряженность электрического поля; $\Phi = 2\pi f [t - (x \cos \alpha + y \sin \alpha) \frac{1}{c}]$ – фаза волны (α – угол между вектором \vec{e} и осью OX).

В системе отсчета K' , движущейся вдоль оси OX со скоростью v относительно системы K , та же волна описывается функцией (1.28). Разница в том, что величины, определяющие фазу, заменяются величинами, измеренными в подвижной системе K' .

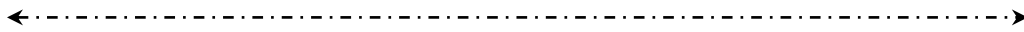
Вместе с тем, фаза волны является инвариантом. Действительно, если напряженность поля для одного наблюдателя равна нулю, что соответствует нулевой фазе, то она останется такой же и для всех других движущихся наблюдателей. Инвариантность фазы можно пояснить иным образом. Представим себе цуг электромагнитных волн с постоянной длиной волны. Число отдельных волн, т.е. периодов в этом цуге, определяет разность фаз, соответствующих началу и концу цуга. Число периодов в цуге не зависит от точки наблюдения, а поэтому разность фаз остается неизменной при переходе от одной системы отсчета к другой: $\Phi = \Phi'$, или в развернутом виде

$$f = \left(t - \frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{c} \right) = f' \left(t' - \frac{x' \cos \alpha' + y' \sin \alpha'}{c} \right). \quad (1.29)$$

С помощью преобразований Лоренца (1.18) исключим из этого уравнения переменные x, y, t . В результате получим уравнение:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} \left(1 - \frac{v}{c} \cos \alpha \right) f t' - \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} \cdot \left(\cos \alpha - \frac{v}{c} \right) \frac{f x'}{c} - \frac{f \sin \alpha}{c} y' = \\ = f' t' - \frac{f'}{c} x' \cos \alpha' - \frac{f' \sin \alpha'}{c} y', \end{aligned} \quad (1.30)$$

которое должно выполняться при всех значениях x', y', t' . Это возможно только в том случае, если коэффициенты при x', y', t' в обеих частях полученного равенства одинаковы. Тогда имеем:



$$\left. \begin{aligned}
 f' &= f \frac{1 - \frac{v}{c} \cos \alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx f \frac{1 - \frac{\vec{v}\vec{e}}{c}}{1 - \frac{v^2}{2c^2}}, \\
 f' \sin \alpha' &= f \sin \alpha, \quad f' \cos \alpha' = \frac{f \left(\cos \alpha - \frac{v}{c} \right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.
 \end{aligned} \right\} \quad (1.31)$$

Из первого равенства следует, что частота сигнала, принимаемого движущимся предметом, определяется не только радиальной скоростью $\vec{v}\vec{e} = v \cos \alpha = \dot{R}$ (эффект Доплера I порядка), но и модулем относительной скорости $|\vec{v}|$ (эффект Доплера II порядка). Второй эффект имеет чисто релятивистское происхождение, поскольку описывается лишь в рамках преобразований Лоренца. Он обнаружен в реальных экспериментах, использующих эффект Мёссбауэра [26, 27]. Он вызван, как уже отмечалось, разным темпом течения времени в движущихся системах отсчета. *При сличении частот синхронизуемых генераторов, которые движутся с большой относительной скоростью, и при изменении радиальной скорости этот эффект должен обязательно учитываться. В противном случае он внесет ошибку в измерения.*

Следует заметить, что формула, устанавливающая связь частот передаваемого и принимаемого излучения, справедлива не только для направления движения волны от точки O к точке O' . Она остается верной и для обратного направления, следует лишь правильно определить угол между вектором скорости и направлением луча: на рис. 1.2 он будет больше 180° , что приведет к изменению знака члена $\vec{v}\vec{e}$.

Другие соотношения, входящие в (1.31), указывают на то, что угол визирования луча в разных системах отсчета неодинаков.

Действительно,

$$\operatorname{ctg} \alpha' = \frac{\cos \alpha - \frac{v}{c}}{\sin \alpha \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \neq \operatorname{ctg} \alpha. \quad (1.32)$$

←----->

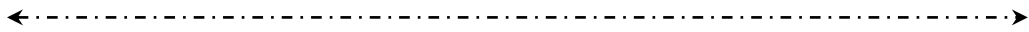
Это явление называется *эффектом скоростной абберации*. Оно состоит в том, что фиксируемое в движущемся приемнике направление на источник излучения всегда отклоняется от истинного направления в сторону движения на угол $\Delta\alpha \approx \frac{v}{c} \frac{1}{\sin \alpha}$. Такой угол называется углом скоростной абберации, и его объяснение стало возможным лишь на основе представления о конечности скорости света. Если представить себе покоящуюся трубу телескопа, направленную на источник света, то внутри трубы все лучи от источника параллельны ее образующей. Если же труба движется в том же положении перпендикулярно направлению на источник, то внутри трубы (за счет ее движения) лучи будут отклоняться на угол $\Delta\alpha = v/c$. Этот эффект сродни эффекту наклона потока дождя относительно бегущего человека. Эффект абберации для световых волн открыл Брэдли в 1727 г. при наблюдении за движением планет.

Здесь уместно заметить, что при движении приемника в слабо преломляющей среде с показателем преломления n выражения для частоты и угла абберации несколько изменяются [2]:

$$f' = f \frac{1 - \frac{vn}{c} \cos \alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \text{ctg} \alpha' = \frac{\cos \alpha - \frac{vn}{cn}}{\sin \alpha \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (1.33)$$

В заключение отметим, что изложенная теория пространственно-временных преобразований носит название специальной, или частной, теории относительности. У истоков ее стояли Лоренц и Пуанкаре. Однако полностью завершили построение этой теории Альберт Эйнштейн, опубликовавший в 1905 г. работу «К электродинамике движения тел» [7], и Герман Минковский [8].

Чтобы понять физическую сущность важных для метрологии следствий специальной теории относительности, обратимся к четырехмерному представлению основных ее положений. Именно в таком представлении она наиболее проста и понятна.



1.2.4. Метрические свойства четырехмерного пространства-времени

1.2.4.1. Пространственно-временной интервал

для электромагнитной волны

Рассмотрим два события, сопровождающие распространение электромагнитной волны – ее излучение и прием. Пусть первое событие происходит в покоящейся системе отсчета K в точке с координатами x_1, y_1, z_1 в момент времени t_1 по шкале времени этой системы. Второе событие (прием) происходит в точке с координатами x_2, y_2, z_2 в момент времени t_2 . Поскольку сигнал в вакууме распространяется со скоростью c , то пройденное расстояние можно определить в виде $\left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \right]^{1/2}$. Поэтому связи между пространственными и временными координатами двух событий выражаются уравнением

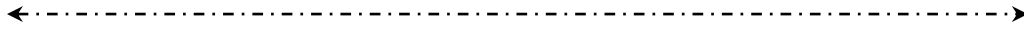
$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 = 0.$$

Переходя к бесконечно малым приращениям, имеем

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = 0. \quad (1.34)$$

Те же два события, т.е. распространение сигнала от точки излучения до точки приема, можно описать из любой другой подвижной инерциальной системы отсчета K' . При этом, согласно закону постоянства скорости света в любых инерциальных системах, форма связи между пространственными и временными координатами не меняется (см. п. 1.2.1):

$$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - c dt'^2 = 0. \quad (1.35)$$



1.2.4.2. Пространственно-временной интервал для любых событий.

Открытие Пуанкаре

Возникает вопрос: а как выражается связь между координатами любых других событий, не связанных с излучением и приемом электромагнитных волн?

Впервые эту связь предложил Пуанкаре, введя интервал ds между любыми событиями:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2. \quad (1.36)$$

Лишь в частном случае исследования электромагнитных волн этот интервал принимает нулевое значение. Для всех других событий $0 < ds^2 < 0$.

Естественно допустить, что при переходе к движущейся системе интервал изменит свое значение. Чтобы проверить это, воспользуемся преобразованиями Лоренца (1.18). Подставив дифференциалы координат

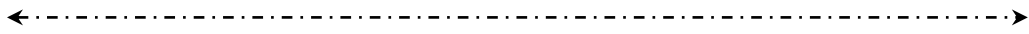
$$dx = \frac{dx' + vdt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, dy = dy', dz = dz', dt = \frac{dt' + \frac{vdx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

в соотношение (1.36), получаем

$$ds^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - c^2 dt'^2. \quad (1.37)$$

Таким образом, квадрат пространственно-временного интервала (1.36) является инвариантом при переходе к любой инерциальной системе отсчета.

Этот замечательный фундаментальный факт впервые открыл Анри Пуанкаре.



1.2.4.3. Интервал в четырехмерном пространстве-времени и его свойства

На основе результатов, полученных Пуанкаре, Минковский пришел к выводу, что все события происходят в *четырёхмерном пространстве-времени*, где пространство и время по отдельности не существуют. Вот что он сказал на одной из своих лекций в 1908 г. «Милостливые господа! Воззрения на пространство и время, которые я намерен перед Вами развить, возникли на экспериментально-физической основе. В этом их сила. Их тенденция радикальна. Отныне пространство и время сами по себе должны обратиться в фикции, а лишь некоторый вид соединения обоих должен сохранить самостоятельность».

Инвариантную форму интервала (1.36) естественно называть квадратом четырехмерного расстояния между двумя бесконечными близкими событиями. Следует обратить внимание, что перед $c^2 t^2$ стоит знак минус, а не плюс, как в обычном многомерном (например, евклидовом) пространстве. Если бы здесь стоял знак плюс, то квадрат числа не был бы инвариантен. Вследствие формальной аналогии выражения для расстояния в пространстве-времени и евклидовом пространстве геометрия пространства-времени называется псевдоевклидовой. Отличие от евклидовой геометрии состоит в том, что расстояние (1.36) может равняться нулю и при ненулевых дифференциалах координат.

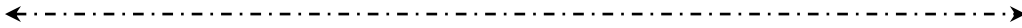
Поскольку квадрат интервала (1.36) одинаков в любой инерциальной системе отсчета, то мы легко приходим к утверждению об относительности расстояния и относительности времени. Для этого рассмотрим интервал, квадрат которого меньше нуля:

$$ds^2 = dR^2 - c^2 dt^2 = dR'^2 - c^2 dt'^2 < 0,$$

где $dR^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ – квадрат расстояния между двумя точками в обычном евклидовом пространстве. Аналогично определяется и dR'^2 . Так как квадрат интервала меньше нуля, а сам интервал мнимый, то существует такая инерциальная система координат (например, штрихованная), в которой два бесконечно близких события происходят в одной точке (т.е. при $dR' = 0$). Тогда

$$c^2 dt'^2 = c^2 dt^2 \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\vec{R}}{dt} \right)^2 \right] = c^2 dt^2 \left[1 - \frac{\vec{v}^2(t)}{c^2} \right],$$

где введена скорость $\vec{v}(t) = d\vec{R}/dt$. Такую систему называют в специальной теории относительности *временноподобной*. Отсюда связь между промежутками времени в движущейся (штрихованной) и покоящейся системах отсчета имеет вид



$$dt' = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (1.38)$$

что полностью согласуется с определением эффекта Эйнштейна (1.20).

Возьмем другой пример, когда $ds^2 > 0$ (интервал – вещественный). В этом случае существует такая система отсчета, в которой эти два события одновременны, т.е. $dt' = 0$. Такую систему называют *пространственно-подобной*. Если эти события происходят в точках, лежащих на оси OX , то $ds^2 = dx'^2 = dx^2 - c^2 dt^2$.

Используя преобразования Лоренца для интервала dt и учитывая условие $dt' = 0$, находим

$$dx' = dx \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

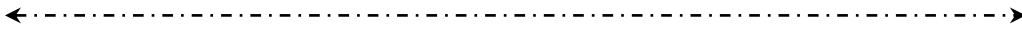
что также согласуется с ранее полученной формулой (1.24).

Таким образом, в четырехмерном пространстве-времени и размеры предметов, и промежутки времени уже не являются абсолютными. Вместе с тем, любой предмет в пространстве-времени останется твердым и неизменным как в классической физике. Изменяется лишь его проекция на трехмерное пространство и одномерная проекция на ось времени, причем «ракурс» любого объекта относительно осей псевдоевклидова четырехмерного пространства завит от его скорости.

Таким образом, хотя исторически уже с 1904 г. известны преобразования, выведенные Лоренцем, но ни он, ни Эйнштейн не осознали того, что речь идет о *едином пространстве-времени*, определяемом единой геометрией. Минковский, следуя Пуанкаре, по существу, первым глубоко понял это.

Вот этот качественный шаг в объединении пространства и времени в одно целое, называемое *пространство-время*, и введение соответствующей геометрии и есть *главное содержание* теории относительности. Основное ее следствие, впервые сформулированное Эйнштейном, состоит в том, что никакими опытами – механическими и электромагнитными, проведенными внутри замкнутого объекта, невозможно отличить состояние покоя от состояния равномерного прямолинейного движения.

Использование четырехмерного интервала и следующей из него связи промежутков времени в движущейся и неподвижной системах (1.38) позволяют очень просто получить связь между частотой волны в двух пространственных точках. Действительно, если точки O (см. рис. 1.2) в точку O' послать радиоволну с частотой f , то в точке приема ее фаза составит



$$\Phi' = 2\pi f \left(t - \frac{\vec{R}\vec{e}}{c} \right).$$

Частота определяется числом периодов волны в единицу действительного времени, соответствующего данной точке. Поэтому, используя связь (1.38), получаем

$$f' = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi'}{dt'} = \frac{f}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} \left(t - \frac{\vec{R}\vec{e}}{c} \right) = f \frac{1 - \frac{\vec{v}\vec{e}}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Разлагая эту формулу в ряд и пренебрегая членами порядка $(v/c)^3$, получаем

$$f' = f \left(1 - \frac{\dot{\vec{R}}\vec{e}}{c} + \frac{v^2}{2c^2} \right),$$

где $\dot{\vec{R}} = \vec{v}\vec{e}$ – радиальная скорость приемника; $fv^2/2c^2$ – релятивистский частотный сдвиг – эффект Допплера второго порядка. Как установлено выше, физически он объясняется тем, что частоту одной и той же волны измеряют в различных точках пространства с помощью часов с различным темпом хода из-за их относительного движения.

Естественно предположить, что в запросных радиопереносных релятивистских сдвигах не должно быть, так как частота принимаемой и передаваемой волн измеряется одними и теми же часами. Действительно, используя выражение (1.31), частоту ретранслированной волны определяем в виде (учитываем, что векторы \vec{v} и \vec{e} встречны):

$$f'' = f' \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{\vec{v}\vec{e}}{c}} = f \frac{1 - \frac{\vec{v}\vec{e}}{c}}{1 + \frac{\vec{v}\vec{e}}{c}}. \quad (1.39)$$

Таким образом, метрологические эталоны длины, времени и частоты в СТО имеют смысл лишь применительно к определенной инерциальной системе. При переходе к другой, движущейся системе отсчета, эталонные значения длины, времени и частоты изменяются.

1.3. Метрические свойства пространства-времени в общей теории относительности

1.3.1. Геометрическая модель гравитационного поля

Реальные хранители точного времени движутся с достаточно большими скоростями в поле тяготения Земли, Солнца и других планет. Влияние скорости движения на ход времени и пространственные параметры выяснено в предыдущих подразделах, а теперь установим зависимость темпа течения времени, длину измерительной линейки и условий распространения радиоволн (РРВ) от места размещения часов в гравитационном поле. Теоретической основой для исследования этого вопроса является общая теория относительности, которая является обобщением специальной теории относительности. Если в специальной теории относительности Эйнштейн лишь завершил работу, начатую Лоренцем и Пуанкаре, то, что касается общей теории относительности, он является ее единоличным автором. Опубликование этой теории в 1916 г. дало громадный толчок развитию физики и позволило предсказать целый ряд новых эффектов.

Псевдоевклидово пространство, определяемое соотношениями (1.36) и (1.37), является плоским, поскольку проекции расстояния ds на любые плоскости в четырехмерной координатной системе являются отрезками прямой и определяются обычным путем по теореме Пифагора.

Эйнштейн пришел к выводу, что наличие любой массы искажает плоскую структуру пространства-времени в окрестности этой массы, или, иначе, искривляет пространство-время. В частности, искажается и само пространство. В качестве иллюстрации этого явления рассмотрим лист из упругого материала (например, резиновый), на котором нанесена равномерная масштабная сетка (рис. 1.3а). Лист разместим в плоскости XOY . Если пренебречь собственным весом резинового листа, то его можно считать абсолютно плоским. Тогда легкий теннисный шарик А, пущенный по плоскости со скоростью \vec{v} , опишет прямолинейную траекторию. Если же в центр листа поместить бильярдный шар, то лист прогнется, образовав впадину (рис. 1.3б).

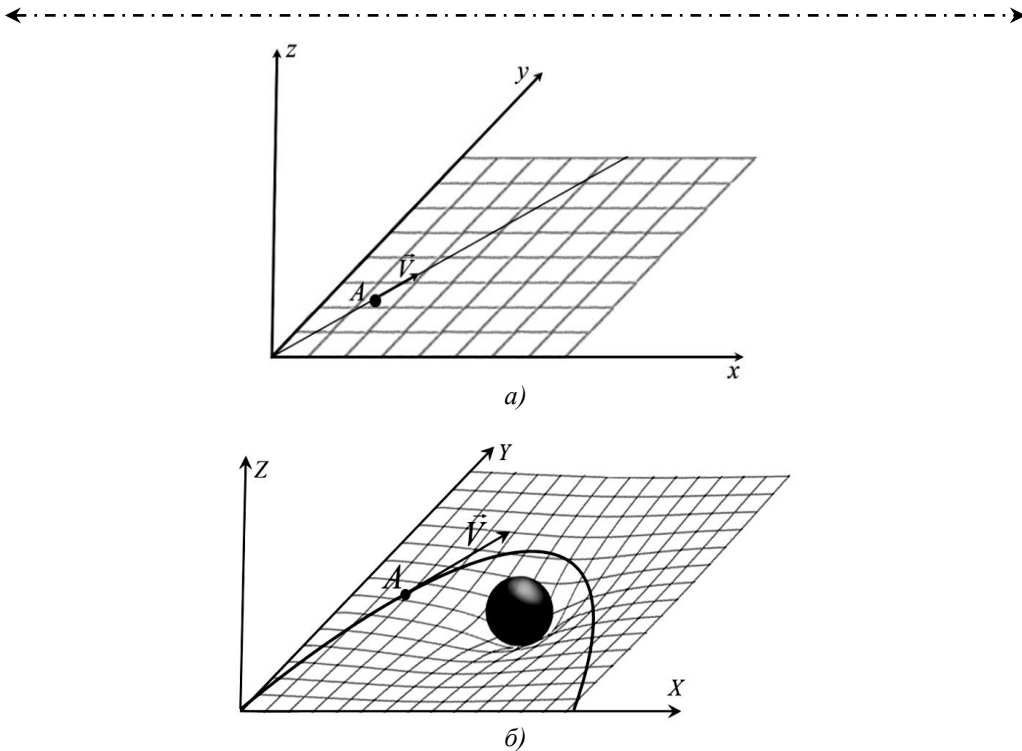


Рис. 1.3. Модель искажения пространства-времени вблизи возмущающей массы

Ячейки масштабной сетки искажутся, а траектория шарика уже будет криволинейной с переменным кручением, поскольку вблизи возмущающей массы шар движется и в третьем измерении вдоль оси OZ . Конечно, это весьма приближенная аналогия искажения пространства времени вблизи возмущающей массы, однако она однозначно приводит к убеждению, что для определения расстояний в искривленном пространстве-времени нужно пользоваться методами криволинейной геометрии.

К моменту созданию общей теории относительности было известно два типа неевклидовых геометрий: геометрия Лобачевского (для пространств с отрицательной кривизной) и геометрия Гаусса-Римана (для пространств с положительной кривизной). Наилучшим образом для описания методов теории относительности отвечали методы геометрии Гаусса-Римана.

По аналогии с соотношением (1.36) Эйнштейн определил квадрат четырехмерного пространственно-временного интервала в виде

$$ds^2 = \sum_{i=0}^3 \sum_{k=0}^3 g_{ik} dx_i dx_k, \quad (1.40)$$

←----->

где $dx_0=cdt$; $dx_1=dx$; $dx_2=dy$; $dx_3=dz$; g_{ik} – компоненты так называемого фундаментального метрического тензора, определяющего отличие рассматриваемого пространства от плоского; dx_1, dx_2, dx_3 – дифференциалы пространственных координат; dt – интервал так называемого координатного времени, соответствующего точке вне гравитационного поля (на значительном удалении от центра тяготеющего тела). Квадрат интервала по-прежнему является *инвариантом*.

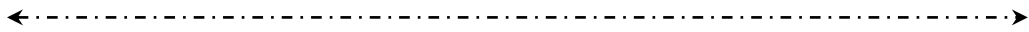
В четырехмерном пространстве-времени часто пользуются понятием *событие*, которое определяется тремя пространственными координатами и временем. В этом пространстве событие определяется точкой. Эти точки в четырехмерном пространстве-времени называются *мировыми точками*. Всякой частице, в том числе фотону, соответствует некоторая линия в этом пространстве, которая называется *мировой линией*.

Фундаментальный тензор g_{ik} устанавливает мероопределение, или пространственно-временную метрику в гравитационном поле. По-иному, *метрический тензор определяет параметры геометрической модели гравитационного поля*. Если задаться метрическим тензором, точнее, его компонентами, то можно полностью определить метрические свойства гравитационного поля в каждой его точке. В общем случае фундаментальный тензор содержит 16 компонентов, из которых независимых – всего 10 (так как $g_{ik} = g_{ki}$).

На практике метрический тензор для различного распределения масс находится путем решения уравнений общей теории относительности. В частности, если гравитационное поле создается невращающейся сферической симметричной постоянной массой (например, Землей, Луной, Солнцем и т.д.), то квадрат интервала (1.40) для рассматриваемого случая имеет вид (решение Шварцшильда) [1, 2]:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2\varphi}{c^2}\right)c^2 dt^2 + \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (1.41)$$

где $\varphi = GM / \rho$ – гравитационный потенциал, где $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/\text{с}^2\text{кг}$ – гравитационная постоянная, M – масса тела, создающего поле; ρ – расстояние от центра тела до рассматриваемой точки. В частности, для Земли $GM_e = \mu_e = 3,986 \cdot 10^{14} \text{ м}^3/\text{с}^2$.



В этом случае фундаментальный метрический тензор имеет следующие ненулевые компоненты:

$$g_{00} = -\left(1 - \frac{2\varphi}{c^2}\right); g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}. \quad (1.42)$$

Частным случаем четырехмерного искривленного риманова пространства является пространство-время Минковского в специальной теории относительности с интервалом (1.36). Как видим, здесь $g_{00} = -1$, $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$, остальные компоненты фундаментального метрического тензора равны нулю.

Значения пространственно-временного интервала (1.40) для различных событий в гравитационном поле может принимать значения в промежутке $0 < ds < 0$. Однако важнейшим свойством пространственно-временного интервала для событий излучения и приема электромагнитной волны является равенство его нулю как в СТО (в пространстве Минковского), так и в ОТО, т.е.

$$ds_{ЭМВ} = 0. \quad (1.43)$$

Это свойство интервала имеет очень важные следствия. Ниже они будут рассмотрены.

В процессе создания общей теории относительности Эйнштейн установил, что силы инерции, возникшие, например, при линейном ускорении или вращении тел (центробежные силы), имеют ту же природу, что истинные силы гравитационного притяжения. Поэтому их невозможно отличить. В неинерциальной системе отсчета, связанной с ускоренным или вращающимся телом, должно искривляться пространство-время так же, как и в истинном поле тяготения. Этот факт носит название принципа эквивалентности Эйнштейна и многократно проверен на практике. В последующих подразделах будут рассмотрены ускоренные и вращающиеся системы отсчета. Для того чтобы вычислить пространственно-временной интервал в неинерциальных системах, нужно воспользоваться известными координатными преобразованиями, вычислить квадраты дифференциалов и подставить их в выражения (1.36) или (1.44). В этом случае удается одновременно учесть истинное гравитационное поле и поле сил инерции. Далее этот вопрос также будет рассмотрен.

←----->

Специальную теорию относительности можно резюмировать следующим образом. Ньютон установил, что если наблюдатель находится в состоянии равномерного и прямолинейного движения, то нет ни одного механического опыта, который бы позволил отличить ему свое состояние от состояния покоя. Специальная теория относительности распространила это заключение на электромагнитные волны.

Общая теория относительности (ОТО) является следующим по порядку обобщением – обобщением специальной теории относительности на неравномерное движение. Она является теорией гравитации. Ни один эксперимент, говорит эта теория, какого бы вида он ни был, не поможет наблюдателю, в каком бы движении он ни находился (равномерном или неравномерном), отличить свое состояние от состояния покоя. Имеется в виду, что он не сможет отличить силы тяготения, действующие на него в состоянии покоя, от сил инерции, которые возникают при ускоренном движении. Вместе с тем, надо отметить, что общий принцип относительности справедлив лишь в пределах достаточно небольшой области пространства.

После создания А. Эйнштейном общей теории относительности впоследствии был создан целый ряд альтернативных теорий гравитации (например, [9]). Однако на сегодняшний день ни одна из альтернативных теорий экспериментально не доказала своей состоятельности. Поэтому Конвенцией IERS 2010 г. [10], Резолюцией IAU [137], а также Рекомендацией МСЭ [11] установлено, что для описания времени и частоты в Солнечной системе необходимо пользоваться методами ОТО.

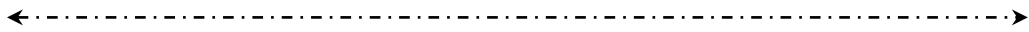
1.3.2. Определение длины и собственного времени в гравитационном поле Шварцшильда

1.3.2.1. Элемент длины в поле Шварцшильда

Рассмотрим элемент длины для простейшей модели гравитационного поля, создаваемого тяготеющим телом со сферической симметрией. Метрический тензор статического гравитационного поля вблизи такого тела имеет компоненты (1.42), а пространственно-временной интервал выражается соотношением (1.41).

Поскольку интервал состоит из двух независимых частей, то для пространственной его части введем обозначение [1–3]:

$$d\delta^2 = g_{11} (dx^2 + dy^2 + dz^2) = \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right) dR^2, \quad (1.44)$$



где $dR^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$; дифференциалы dx, dy, dz называются координатными элементами длины, а $d\delta$ (произведение компонента метрического тензора на координатные элементы длины) – элементом собственной (физической, действительной) длины.

Поскольку $\varphi > 0$, то отсюда видно, что в гравитационном поле действительные, или измеряемые расстояния между телами по отношению к координатным расстояниям увеличиваются. Т.е., как и в специальной теории относительности, они не абсолютны, а зависят от степени искривления пространства в гравитационном поле. Согласно определению потенциала сферически симметричного поля (1.41), увеличение измеряемого расстояния тем больше, чем ближе точка измерения к центру тяготеющего тела, т.е. чем меньше ее геоцентрическая высота ρ .

Таким образом, результаты измерения расстояний имеют смысл только тогда, когда они привязаны к конкретной точке гравитационного поля с известными координатами. Точно так же эталон длины в гравитационном поле является таковым лишь в известной точке гравитационного поля. В другой точке с неизвестными координатами он уже не может быть эталоном. Далее будет показано, что в некоторых гравитационных полях длина эталона зависит и от его ориентации относительно осей выбранной системы координат.

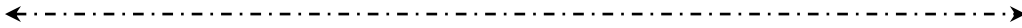
1.3.2.2. Интервал собственного времени в поле Шварцшильда

Теперь для той же модели гравитационного поля Шварцшильда рассмотрим временной интервал между событиями, протекающими в одной пространственной точке ($dx=dy=dz=0$). В таком случае квадрат интервала (1.41) для мгновенной сопутствующей инерциальной системы, в силу его инвариантности, можно выразить соотношением: $ds^2 = -c^2 d\tau^2$, где $d\tau$ – интервал собственного (физического, действительного) времени в данной точке.

Поскольку квадрат интервала ds^2 инвариантен к выбору системы отсчета, то на основании (1.41) и (1.42) можно записать:

$$-c^2 d\tau^2 = -\left(1 - \frac{2\varphi}{c^2}\right) c^2 dt^2 + d\delta^2.$$

Отсюда путем несложных преобразований, пренебрегая членами порядка c^{-4} , находим связь интервалов собственного $d\tau$ и координатного dt времени:



$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{2\varphi}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (1.45)$$

где $v = \frac{d\delta}{dt}$ — скорость часов относительно системы отсчета. Координатное время t можно представить как время за пределами гравитационного поля в покоящейся системе отсчета. Поскольку такие условия нереальны, то это время служит лишь вспомогательной величиной.

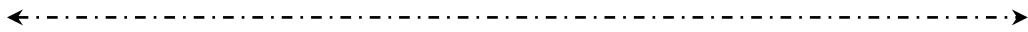
Поскольку $\varphi > 0$ полученный результат свидетельствует о том, что в гравитационном поле интервал собственного времени меньше, чем интервал координатного времени вне поля. По-иному, время в гравитационном поле течет медленнее, чем вне его. Гравитационное поле как бы замораживает ход времени, причем чем ближе часы к центру тяготеющего тела, тем больше эффект. Этот эффект называется *гравитационным эффектом смещения шкалы времени, или эффектом замедления времени*. Из (1.45) следует, что действие гравитационного поля на часы аддитивно складывается с аналогичным замедляющим действием скорости движения относительно начала координат. В частности, при $\varphi = 0$ формула (1.45) сводится к полученным ранее формулам специальной теории относительности (1.20) и (1.38).

Поэтому результаты измерения промежутка времени должны быть охарактеризованы координатами и скоростью движения измерительных часов в гравитационном поле. По этой же причине промежуток времени, создаваемый эталонными часами, имеет смысл эталонного промежутка только для конкретной точки расположения часов в гравитационном поле и для известной скорости движения этого эталона в выбранной системе отсчета.

Чтобы установить связь между собственными промежутками времени двух часов, размещенных в разных точках гравитационного поля, положим, что координатные промежутки времени в этих точках совпадают, т.е. $dt_1 = dt_2$. Тогда из (1.47) получаем:

$$\frac{d\tau_1}{\sqrt{1 - \frac{2\varphi_1}{c^2} - \frac{v_1^2}{c^2}}} = \frac{d\tau_2}{\sqrt{1 - \frac{2\varphi_2}{c^2} - \frac{v_2^2}{c^2}}}, \quad (1.46)$$

где индексы 1 и 2 относятся к соответствующим часам.



Разлагая подкоренные выражения в ряд и отбрасывая члены порядка $1/c^4$ и менее, получаем

$$d\tau_1 = \left(1 - \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2} - \frac{v_1^2 - v_2^2}{2c^2} \right) d\tau_2. \quad (1.47)$$

Чтобы найти истинный промежуток времени τ_1 , эту формулу необходимо проинтегрировать по времени τ_2 при известных законах изменения всех входящих в нее величин.

Для двух неподвижных часов на поверхности Земли, а также для пары орбитальных часов на круговых орбитах, потенциалы в точках размещения часов и скорости их движения постоянны. При этих условиях в результате интегрирования имеем:

$$\tau_1 = \left(1 - \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2} - \frac{v_1^2 - v_2^2}{2c^2} \right) \tau_2. \quad (1.48)$$

С помощью формулы (1.47) легко установить релятивистское расхождение между показателями любых двух часов, произвольно движущихся в гравитационном поле:

$$d\tau_1 - d\tau_2 = - \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2c^2} \right) d\tau_2. \quad (1.49)$$

Истинное расхождение показаний шкал времени двух часов определяется интегрированием по времени τ_2 . Для неподвижных или орбитальных часов на круговых орбитах, соответственно, имеем:

$$\tau_1 - \tau_2 = - \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2c^2} \right) \tau_2. \quad (1.50)$$

Релятивистское расхождение, определяемое формулами (1.49) и (1.50), часто называют *обобщенным «парадоксом близнецов»*, поскольку здесь учитывается одновременно и относительное движение двух часов и действие гравитационного поля. Это расхождение играет важную роль в синхронизации движущихся хранителей времени. Рассматривая движение часов вне гравитационного поля ($\varphi_1 = \varphi_2 = 0$) и полагая $v_1 = 0$, приходим к «парадоксу близнецов» в СТО, определяемому формулой (1.21).

1.3.2.3. Соотношение частот задающих генераторов двух часов
в гравитационном поле

Известно, что интервалы времени $d\tau_1, d\tau_2$, отсчитываемые по шкалам времени двух часов, связаны с частотами их задающих генераторов f_1^0, f_2^0 следующим соотношением [13]:

$$\frac{d\tau_1}{d\tau_2} = \frac{f_1^0}{f_2^0}, \quad (1.51)$$

откуда следует, что

$$d\tau_1 - d\tau_2 = \left(\frac{f_1^0 - f_2^0}{f_2^0} \right) d\tau_2. \quad (1.52)$$

Сравнивая (1.49) и (1.52), находим относительное смещение частот задающих генераторов двух разнесенных часов, которое вызывает гравитационный сдвиг времени (1.50):

$$\frac{f_1^0 - f_2^0}{f_2^0} = - \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2c^2} \right). \quad (1.53)$$

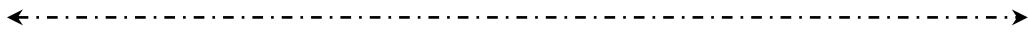
Отсюда следует практически важный вывод: гравитационный эффект смещения шкалы времени можно представить через изменение частоты задающего генератора часов. А поэтому этот эффект можно сделать управляемым: его можно скомпенсировать введением искусственного смещения частоты Δf^* , равного по модулю (1.53), но с обратным знаком:

$$\Delta f^* = - (f_1^0 - f_2^0). \quad (1.54)$$

В результате основополагающее соотношение (1.47) с учетом (1.53) принимает вид:

$$d\tau_1 = \left(1 - \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2} - \frac{v_1^2 - v_2^2}{2c^2} + \frac{\Delta f^*}{f_2^0} \right) d\tau_2 = d\tau_2, \quad (1.55)$$

что означает, что шкалы времени обоих часов полностью совпадают. Этот способ управления шкалами времени бортовых часов уже используется в спутниковых системах навигации.



1.3.2.4. Измерение метрических свойств времени в гравитационном поле

Рассмотрим конкретные достаточно простые и показательные примеры изменения метрики времени, когда двое часов размещены в разных точках гравитационного поля Земли. Потенциал сферической Земли определим, согласно (1.41), в виде:

$$\varphi_3 = \frac{\mu_3}{\rho}, \quad (1.56)$$

где $\mu_3 = 3,986 \cdot 10^{14} \text{ м}^3/\text{с}^2$ – геоцентрическая гравитационная постоянная.

Ситуацию с движущимися часами рассмотрим в небесной невращающейся экваториальной геоцентрической системе координат ICRS. В такой системе координат точки на поверхности Земли движутся со скоростью $v_3 = \Omega_3 \rho \cos \psi$, где $\Omega_3 = 7.29 \cdot 10^{-5}$ – угловая скорость Земли; ρ – геоцентрическое расстояние, ψ – геоцентрическая широта места. Кроме того, условимся, что часы движутся относительно поверхности Земли со скоростями \vec{v}_{01} и \vec{v}_{02} . В результате формулу (1.47) запишем в виде:

$$d\tau_1 = \left[1 - \frac{\mu_3}{c^2} \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) - \frac{(\vec{v}_{31} + \vec{v}_{01})^2 - (\vec{v}_{32} + \vec{v}_{02})^2}{2c^2} \right] d\tau_2, \quad (1.57)$$

причем геоцентрические расстояния в точках размещения часов ρ_1 и ρ_2 изменяются из-за рельефа местности.

Формулу (1.57) представим для следующих частных случаев.

1) Оба хранителя времени неподвижны на Земле ($\vec{v}_{01} = \vec{v}_{02} = 0$). Из (1.57) в результате интегрирования получаем:

$$\tau_1 = \left[1 - \frac{\mu_3}{c^2} \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) - \frac{\Omega_3^2 (\rho_1^2 \cos^2 \psi_1 - \rho_2^2 \cos^2 \psi_2)}{2c^2} \right] \tau_2, \quad (1.58)$$

Отсюда следует, что при равенстве геоцентрических высот ($\rho_1 = \rho_2$) разность показаний двух часов определяется разностью $\cos^2 \psi_1 - \cos^2 \psi_2$ (разностью эффектов Доплера II порядка), причем наибольшая разница в показаниях часов будет наблюдаться при размещении одних – на экваторе, других – на полюсе.

←----->

При незначительной разнице высот часов ($\rho_1 - \rho_2 = \Delta\rho \ll \rho_1$), пренебрегая малым эффектом Допплера-II, имеем:

$$\tau_1 = \left[1 + \frac{g}{c^2}(\rho_1 - \rho_2) \right] \tau_2, \quad (1.59)$$

где $g \approx \frac{\mu_3}{\rho_1^2}$ – ускорение силы тяжести в данной точке. Отсюда относительная разность показаний шкал двух часов составит:

$$\frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_2} = \frac{g}{c^2}(\rho_1 - \rho_2). \quad (1.60)$$

При $\rho_1 - \rho_2 > 0$ (первые часы размещены выше, чем вторые) имеем $\tau_1 - \tau_2 > 0$, т.е. первые часы идут быстрее вторых. При $\rho_1 - \rho_2 < 0$ (первые часы ниже вторых) получаем $\tau_1 - \tau_2 < 0$, т.е. первые часы замедляются. Иными словами, чем ближе неподвижные часы к центру Земли, тем выше их гравитационный потенциал и тем медленнее они идут.

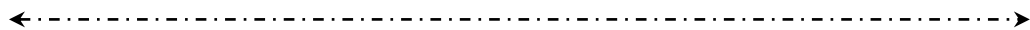
Учитывая соотношение (1.51), связь частот формирующих генераторов двух часов получаем в виде:

$$\frac{f_1^0 - f_2^0}{f_2^0} = \frac{g}{c^2}(\rho_1 - \rho_2), \quad (1.60a)$$

т.е. для задающих частот часов связь с высотой та же, что и для времени, отсчитываемого по этим часам: чем выше часы, тем быстрее они идут и тем выше частота их задающего генератора. Чем ближе часы к центру Земли, тем меньше их задающая частота.

Экспериментальная проверка релятивистского эффекта расхождения времени проводилась путем сравнения хода двух атомных часов, покоящихся на разных высотах над уровнем моря [14, 16–18, 56]. Результаты соответствуют приведенным выше формулам. Эксперименты с перебазируемыми часами, проведенные автором и его помощниками, также подтвердили приведенные выше формулы [19–22] (см. описание экспериментов в разделе 11).

2) Одни часы неподвижны ($v_{02}=0$), другие совершают «путешествие» по разным маршрутам между двумя точками со скоростью $\overrightarrow{v_{01}}$. Из формулы (1.57) получаем:



$$\tau_1 = \left[1 - \frac{\mu_3}{c^2} \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) + \frac{v_{32}^2}{2c^2} - \frac{v_{31}^2 + v_{01}^2}{2c^2} \right] \tau_2 - \frac{1}{c^2} \int_{\tau_2}^{\tau_1} \vec{v}_{31} \vec{v}_{01} d\tau_2. \quad (1.61)$$

Раскрывая скалярное произведение векторов скоростей, имеем

$$\vec{v}_{31} \vec{v}_{01} = v_{31} v_{01} \cos \alpha_v.$$

где α_v – угол между векторами скоростей \vec{v}_{31} и \vec{v}_{01} .

Таким образом, расхождение шкал стационарных и «путешествующих» часов зависит от маршрута последних, поскольку угол α_v зависит от направления движения. Иными словами, если часы от экваториальной точки совершают кругосветное путешествие по двум маршрутам – по экватору и по меридиану, то расхождения часов в момент встречи в обоих случаях будут разными.

Последний интеграл в формуле (1.52) можно представить в ином виде:

$$\frac{1}{c^2} \int_{\tau_2}^{\tau_1} \vec{v}_{31} \vec{v}_{01} d\tau_2 = \frac{1}{c^2} \int_{\tau_2}^{\tau_1} [\vec{\Omega}_3 \vec{R}] \vec{v}_{01} d\tau_2 = \frac{\vec{\Omega}_3}{c^2} \int_{R_A}^{R_B} [\vec{R} d\vec{R}] = \frac{2\vec{\Omega}_3 \vec{S}_V}{c^2}, \quad (1.62)$$

где \vec{S}_V – вектор площади, заключенной между векторами начала и конца маршрута \vec{R}_A, \vec{R}_B , а также линией маршрута. Этот эффект связан с движением по вращающейся Земле, называется гироскопическим эффектом и формально определяется так же, как известный эффект Саньяка. В последующих главах этот эффект будет рассмотрен подробнее.

Релятивистская разность хода (1.61) была измерена с помощью часов, размещенных на самолете [6, 15] и на других движущихся объектах [22–24], а также в эксперименте автора [25]. Результаты подтвердили теоретические расчеты.

3) Часы № 1 движутся по круговой околоземной орбите, часы № 2 – неподвижны на Земле. Поскольку в этом случае $v_{31} + v_{01} = \sqrt{\mu_3/\rho_1}$ – скорость на круговой орбите, то на основании (1.57) получаем:

$$\tau_1 - \tau_2 = \left(-\frac{3}{2c^2} \frac{\mu_3}{\rho_1} + \frac{\mu_3}{c^2 \rho_2} + \frac{\Omega_3^2 \rho_2^2}{2c^2} \cos^2 \psi_2 \right) \tau_2. \quad (1.63)$$

Нетрудно подсчитать, что при геоцентрической высоте наземных часов $\rho_2 = 6,378 \cdot 10^6$ м выражение в скобках равно нулю при радиусе круговой орбиты орбитальных часов, который назовем критическим: $\rho_1^{KP} \approx 9,6 \cdot 10^6$ м.

При радиусе орбите больше критической, например, для спутников ГЛОНАСС, имеем $\tau_1 - \tau_2 > 0$, т.е. спутниковые часы идут быстрее наземных. Согласно соотношению (1.51), частота задающего генератора бортовых часов f_2^0 в этом случае выше частоты задающего генератора наземных часов f_1^0 . Поэтому для компенсации гравитационного смещения времени необходима коррекция значения бортовой частоты на величину Δf^* , которая определяется формулой (1.54).

Для орбит с высотой меньше критической выражение в скобке формулы (1.53) становится отрицательным. Соответственно разность показаний часов $\tau_1 - \tau_2 < 0$ (бортовые спутниковые часы отстают). Это объясняется уменьшением разности гравитационных потенциалов наземных и бортовых часов на более низких орбитах и увеличением орбитальной скорости спутниковых часов.

Гравитационные эффекты смещения шкалы времени орбитальных часов многократно проверены на практике. В космических навигационных системах ГЛОНАСС, GPS приняты меры по их компенсации [28–31]. Проведен ряд успешных экспериментальных исследований по измерению этих эффектов в бортовых часах низкоорбитальных спутников, в частности, TOPEX-POSEIDON и GRACE [28, 32].

Относительная величина релятивистского смещения шкалы времени наземных часов относительно шкалы времени за пределами гравитационного поля, согласно (1.57), достигает $\Delta\tau / \tau = \varphi_e / c^2 \approx 6,9 \cdot 10^{-10}$, что на 5–6 порядков превышает достигнутый уровень нестабильности наземных стандартов частоты и времени. Для пары разнесенных по высоте наземных часов, согласно (1.60) и (1.60а), относительное смещение их шкал времени и задающих частот достигает 10^{-14} на каждые 100 метров разности высот. Наконец, согласно (1.63), относительные смещения бортовых шкал времени навигационных спутников ГНСС ГЛОНАСС и GPS составляют, соответственно, около $+4,46 \cdot 10^{-10}$ и $+4,36 \cdot 10^{-10}$. Это примерно на 4 порядка превышает уровень нестабильности современных бортовых стандартов, а в перспективе, с ростом стабильности бортовых стандартов, это превышение будет еще больше.

←----->

Проведенные оценки величины релятивистских смещений времени и частоты наземных и бортовых стандартов частоты и времени позволяют поставить две практические задачи:

1) учет релятивистских эффектов смещения частоты и времени в существующих и перспективных системах хранения времени, в космических навигационных и геодезических системах с целью повышения их точности. В первом приближении такая задача уже решается. Однако для повышения точности учета необходимо установить влияние на шкалы времени наземных и бортовых часов следующих факторов:

– изменения неоднородности гравитационного поля Земли по широте, по меридиану и по высоте;

– неравномерности вращения Земли с учетом прецессии, нутации, движения полюсов;

– влияния приливных гравитационных потенциалов полей ближайших небесных тел: Луны, Солнца и др.

Далее в разделах 3–5 исследуется зависимость гравитационной задержки хода наземных и орбитальных часов от эксцентриситета орбиты, неоднородности ГПЗ, а также влияния гравитационных полей других небесных тел;

2) измерение релятивистских эффектов смещения частоты и времени в силу их значительности в интересах навигации, геодезии, гравиметрии и др.

Автором предложено использование релятивистских эффектов в космических радиопереносах для повышения точности навигации космических аппаратов [33–35].

В последние годы активно исследуется возможность использования высокостабильных стандартов частоты и времени (СЧВ) в интересах новых научных направлений, которые получили названия «Релятивистская геодезия» [36, 37, 93, 94] и «Релятивистская метрология» [90–92]. Идея состоит в том, что по измерению разности гравитационных потенциалов можно установить разность высот двух измерительных СЧВ. Чувствительность к изменению разности высот $\delta\rho$ в зависимости от нестабильности измерительного СЧВ $\delta\tau/\tau$ можно определить из соотношения (1.60), перейдя к бесконечно малым приращениям:

$$\delta\rho \approx 0,9 \cdot 10^{16} \frac{\delta\tau}{\tau_2}. \quad (1.64)$$

←----->

Отсюда следует, что при нестабильности измерительных СЧВ 10^{-16} достижимая погрешность измерения разности высот составляет 0,9 м. При нестабильности 10^{-17} получаем вполне конкурентную по отношению к другим методам чувствительность – 9 см. Однако для реализации приведенных во Введении требований Международного проекта GGOS по точности высотной основы (~ 1 мм) потребуются СЧВ с нестабильностью около 10^{-19} .

В разделе 11 рассмотрены проведенные автором наземные эксперименты по измерению разности гравитационных потенциалов в двух точках с помощью современных мобильных атомных СЧВ.

Одна из задач космического эксперимента Европейского космического агентства ACES (Atomic Clock Ansemble in Space) [38, 66] также связана с возможностью измерения разности гравитационных потенциалов между орбитальными и наземными атомными часами. В качестве орбитальных хранителей времени используется ансамбль атомных часов, в том числе часы фонтанного типа «PHARAO» с нестабильностью 10^{-16} – 10^{-17} . В эксперименте предполагается измерение частотных и временных релятивистских смещений, для чего предусматривается участие мировой сети высокоточных микроволновых и квантово-оптических средств (КОС). Чувствительность такого экспериментального орбитального метода определения разности гравитационных потенциалов к изменению высоты наземных КОС нетрудно получить из соотношения (1.63). Дифференцируя правую часть по ρ_2 , приходим к формуле (1.64), откуда при планируемой нестабильности СЧВ «PHARAO» получаем чувствительность по высоте в доли метра. Это может иметь очень важное значение для создания мировой опорной системы высот. Космический эксперимент STE-QUEST также предполагает измерение разности гравитационных потенциалов на основе использования высокостабильных СЧВ [39].

В этой связи уместно кратко рассмотреть возможности современных и перспективных СЧВ, которые могут использоваться для измерения релятивистских частотных и временных эффектов.

Созданный в России во ФГУП «ВНИИФТРИ» эталонный комплекс времени и частоты [40, 41] содержит в своем составе 4 активных водородных стандарта частоты и времени (СЧВВ) нового поколения и обеспечивает нестабильность частоты на интервале времени измерения 1 сутки величиной $3 \cdot 10^{-16}$. Погрешность измерений нестабильности частоты (среднее квадратической относительное двухвыборочное отклонение) на том же интервале времени не превышает $1 \cdot 10^{-16}$.

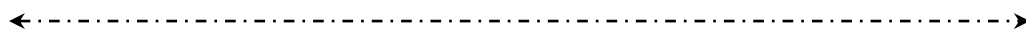
Действующие сейчас первичные цезиевые СЧВ «фонтанного» типа имеют точность порядка $3 \cdot 10^{-16}$ [42–47]. В ближайшей перспективе возможно достижение уровня точности $1 \cdot 10^{-16}$ [48], но, как считают специалисты, эти характеристики являются предельными для часов данного типа.

Сверхстабильные СЧВ создаются во многих странах мира, причем развитие этого направления в последние годы приобретает взрывной характер. Достижения в этой области легко поддаются количественной оценке: если в начале 2000-х годов решалась задача преодоления рубежа погрешности СЧВ на уровне 10^{-15} , то к настоящему времени созданы СЧВ, генерирующие высокостабильные сигналы с относительной погрешностью 10^{-17} и ниже.

Революционные достижения наметились в связи с переходом на оптические стандарты частоты. Такие часы разрабатываются во многих странах мира [49–58, 95]. В России они создаются в ФИАН совместно со ФГУП «ВНИИФТРИ» [52], а также в ИЛФ СО РАН [49,53]. Наибольший прогресс наблюдается в случае стронциевых и иттербиевых часов на оптических решетках, для которых за последние несколько лет стабильность и точность улучшились на порядок: от $1 \cdot 10^{-17}$ до $2 \cdot 10^{-18}$. Создаются мобильные наземные высокостабильные оптические часы [61], а также высокостабильные часы космического базирования [38, 62, 63].

В перспективе намечается разработка принципиально новых оптических стандартов частоты на основе ядерных переходов, магнитодипольных переходов многозарядных ионов и др., которые открывают возможность достижения относительной неопределенности частоты 10^{-19} – 10^{-20} [49, 83], а на основе использования Мёссбауэровских переходов – до 10^{-20} – 10^{-24} [64].

Уже сейчас в России получены принципиальные экспериментальные результаты, доказывающие возможность создания сверхминиатюрных атомных часов на основе полупроводниковых лазеров, а также компактных задающих генераторов со стабильностью частоты 10^{-14} – 10^{-15} на основе гелий-неонового и волоконного фемтосекундного лазеров [65]. Такие СЧВ могут использоваться в качестве измерительных мобильных стандартов наземного, воздушного и космического базирования.



1.3.3. Электромагнитная волна в вакууме как индикатор метрических свойств пространства-времени

Как уже отмечалось, процесс распространения электромагнитных волн между двумя точками, включающий события излучения и приема этой волны, имеет выделенное место в пространстве самых разнообразных событий в четырехмерном пространстве-времени: пространственно-временной интервал между этими событиями равен нулю (соотношение (1.40)). Эта выделенность, или уникальность электромагнитной волны, делает ее индикатором отклонения метрических свойств гравитационного поля от евклидовой метрики. Покажем это для простейшего поля Шварцшильда.

1.3.3.1. Задержка электромагнитной волны в гравитационном поле

Для определения времени распространения электромагнитной волны между двумя неподвижными точками в статическом гравитационном поле Шварцшильда воспользуемся выражением для пространственно-временного интервала (1.41). Учитывая, что для электромагнитной волны, как и в специальной теории относительности, $dS=0$, координатное время распространения определяем в виде:

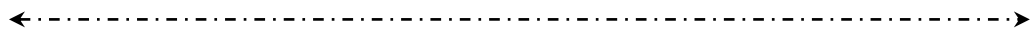
$$dt = \frac{dR}{c} \sqrt{1 + \frac{4\varphi}{c^2}} \approx \frac{dR}{c} \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right). \quad (1.65)$$

Второй член соотношения (1.64) определяет гравитационную задержку волны. Используя соотношение (1.42), представим ее в развернутом виде для гравитационного поля сферической массы:

$$\Delta t = \frac{2\mu}{c^3} \int_{\rho} \frac{dR}{\rho}.$$

Интегрирование ведется вдоль траектории волны. Считая, что гравитационное поле создается одним телом и связывая с этим телом невращающуюся систему координат, получаем значение измеряемого времени распространения в односторонней радиолнии составит [11, 28, 67]

$$\Delta t_{\uparrow} = \frac{R}{c} \left(1 + \frac{\vec{V}e}{c}\right) + \frac{2\mu}{c^3} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{\rho} = \frac{R}{c} \left(1 + \frac{\vec{V}e}{c}\right) + \frac{2\mu}{c^3} \ln \frac{R_1 + R_2 + R}{R_1 + R_2 - R}, \quad (1.66)$$



где \vec{R}_1, \vec{R}_2 – радиус-векторы передатчика и приемника в выбранной системе отсчета; \vec{V} – скорость приемника; \vec{e} – орт радиолуча; $R = (\vec{R}_2 - \vec{R}_1) \vec{e}$ – расстояние между передатчиком и приемником.

В запросной локационной радиолинии (с ретрансляцией без задержки) время Δt_{\uparrow} удваивается, поскольку статическое поле с метрикой (1.42) изотропно:

$$\Delta t_{\uparrow\downarrow} = \frac{2R}{c} \left(1 + \frac{\vec{V} \vec{e}}{c} \right) + \frac{4\mu}{c^3} \ln \frac{R_1 + R_2 + R}{R_1 + R_2 - R}, \quad (1.67)$$

где второй член определяет полный гравитационный эффект задержки.

Таким образом, как и ожидалось, ЭМВ реагирует на изменение метрики гравитационного поля через изменение задержки в этом поле.

Рассмотрим причины задержки луча в гравитационном поле. Для этого обратимся к соотношению (1.44), которое свидетельствует об удлинении истинного пути радиолуча ($\varphi > 0$). Такой результат вызван искривлением пространства-времени и соответствующим удлинением пути. Это – первая причина задержки луча на трассе.

Далее, используя выражение для истинной длины луча (1.44), формулу (1.64) представим в виде:

$$dt = \frac{d\delta}{c^*}, \quad (1.68)$$

где $c^* = c \left(1 - \frac{\varphi}{c^2} \right)$ – действительная фазовая скорость волны на трассе,

причем $c^* < c$. Уменьшение скорости волны в поле тяготения является второй причиной гравитационного запаздывания волны на трассе.

В общем случае задержку радиолокационного луча в вакууме в любом постоянном гравитационном поле можем вычислить следующим образом. Представим интервал (1.42) с учетом (1.41) в виде (здесь и далее ведется суммирование по дважды повторяющимся индексам и знак суммы опускается):

$$ds^2 = g_{iK} dx^i dx^K = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + 2g_{0\alpha} dx^0 dx^\alpha + g_{00} (dx^0)^2,$$

где $\alpha, \beta = 1; 2; 3$; $dx^0 = c dt$.

Поскольку для электромагнитного луча справедливо условие $ds = 0$, то решая полученное квадратное уравнение относительно dx^0 , находим два корня:

$$dt = \frac{1}{c(-g_{00})} \left\{ g_{0\alpha} dx^\alpha \pm \sqrt{(g_{0\alpha} g_{0\beta} - g_{\alpha\beta} g_{00}) dx^\alpha dx^\beta} \right\}.$$

Один из них соответствует прямому лучу, второй – обратному, причем направление луча определяется знаком перед корнем. Поэтому в развернутом виде можно записать [1]:

$$\left. \begin{aligned} dt_\uparrow &= \frac{1}{c(-g_{00})} \left\{ g_{0\alpha} dx^\alpha + \sqrt{(g_{0\alpha} g_{0\beta} - g_{\alpha\beta} g_{00}) dx^\alpha dx^\beta} \right\}, \\ dt_\downarrow &= \frac{1}{c(-g_{00})} \left\{ \sqrt{(g_{0\alpha} g_{0\beta} - g_{\alpha\beta} g_{00}) dx^\alpha dx^\beta} - g_{0\alpha} dx^\alpha \right\}. \end{aligned} \right\}$$

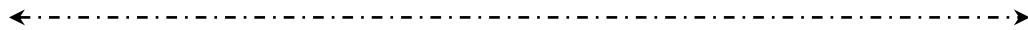
Подставляя в первое из этих выражений компоненты метрического тензора для статического гравитационного поля Шварцшильда (1.42), приходим к соотношению (1.64) и (1.66) (учитываем, что для этого поля $g_{0\alpha} = 0$).

Для координатного времени распространения в запросной линии отсюда имеем:

$$dt_{\uparrow\downarrow} = dt_\uparrow + dt_\downarrow = \frac{1}{c(-g_{00})} \sqrt{(g_{0\alpha} g_{0\beta} - g_{\alpha\beta} g_{00}) dx^\alpha dx^\beta}.$$

При тех же исходных данных приходим к выражению (1.67).

Эффект гравитационного запаздывания радиолокационных сигналов в поле тяготения Солнца впервые измерен Шапиро [67] с ошибкой менее 10 % при локации Меркурия. Впоследствии в экспериментах с искусственными космическими объектами точность измерений была повышена [68]. Использование измерительного радиоканала межпланетного КА Viking [69, 70], локация Луны с использованием уголкового отражателей программы «Аполлон» и отражателей советских луноходов [71], а также эксперимент с использованием микроволнового канала связи с КА Cassini на его пути к Сатурну [72] позволили поднять точность измерения гравитационной задержки в поле Солнца до 0,002 %.



1.3.3.2. Влияние вращения на задержку волны. Эффект Саньяка

Для некоторых типов гравитационных полей разность времени распространения встречных электромагнитных лучей на одной и той же трассе не равна нулю [1], т.е.

$$dt_{\uparrow\downarrow} = dt_{\uparrow} - dt_{\downarrow} = \frac{2g_{0\alpha} dx^{\alpha}}{c(-g_{00})}, \quad (1.69)$$

где компонент метрического тензора $g_{0\alpha}$ характеризует анизотропные свойства поля тяготения. Анизотропия может быть вызвана либо вращением тяготеющей массы, либо вращением системы отсчета.

Рассмотрим распространение волн во вращающейся системе отсчета.

В общем виде пространственно-временные компоненты метрического тензора в этом случае можно записать в виде:

$$g_{0\alpha} = \vec{G}_2 = \frac{[\vec{\Omega}\vec{R}]}{c}_{\alpha}; g_{00} = -(1 - \vec{G}^2). \quad (1.70)$$

Используя формулы (1.74) и (1.75), нетрудно рассчитать дополнительную задержку волны, вызванную вращением системы отсчета вокруг оси OZ.

Пусть луч распространяется по прямой, параллельной оси OX, вдоль положительного ее направления на расстоянии y_0 от центра вращения. Тогда время распространения, включая дополнительную «гироскопическую» задержку, согласно формулам (1.62), (1.71) и (1.74), составляет:

$$t_{\Omega} = \frac{R}{c} \pm \frac{2\vec{\Omega}\vec{S}}{c^2}, \quad (1.71)$$

где \vec{S} – вектор площади треугольника, ограниченного лучом и радиус-векторами, проходящими через точки излучения и приема (как и в формуле для часов (1.62)). Для встречного луча эта задержка меняет знак.

Когда два луча обегают замкнутый контур во встречных направлениях, разность времен обхода при этом определится интегрированием формулы (1.73) по замкнутому контуру. Используя соотношение (1.75), получаем:

$$\Delta t_{\Omega} = \frac{2}{c^2} \oint [\vec{\Omega}\vec{R}]_{\alpha} dx^{\alpha} = \frac{2}{c^2} \oint [\vec{\Omega}\vec{R}] d\vec{R} = \frac{2}{c^2} \oint \vec{\Omega} [\vec{R}d\vec{R}] = \frac{4\vec{\Omega}\vec{S}}{c^2}. \quad (1.72)$$

←----->

Полученный результат определяет *гироскопический эффект временного запаздывания* при распространении электромагнитных волн во вращающейся системе отсчета. Он обладает замечательными свойствами: не зависит от конфигурации контура, оббегаемого встречными лучами, и от расстояния от центра вращения. Далее увидим, что он не зависит и от коэффициента преломления среды, заполняющей контур.

Интересно отметить, что «гироскопический» эффект (1.76) имеет величину порядка $1/c^2$, в отличие от гравитационного эффекта задержки радиоволны в гравитационном поле (1.65), пропорционального $1/c^3$.

Гироскопический эффект впервые был измерен Саньяком в 1913 г. [73]. В его лабораторной установке использовался контур прямоугольной конфигурации, оббегаемый оптическими лучами во встречных направлениях. Исследованию этого эффекта посвящено значительное число работ и обзоров, например [74, 75].

На основе использования этого эффекта в 60-х годах прошлого века были созданы кольцевые лазерные гироскопы. Эти приборы обладают весьма высокой чувствительностью и им посвящено большое число исследований у нас в стране и за рубежом (см., например, работы [76–78]). Информация об угловой скорости в кольцевом лазере содержится в разности частот Δf встречных волн:

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{4\vec{\Omega}\vec{S}}{cL}, \quad (1.73)$$

где f_0 – номинал частоты излучения лазера; L – периметр кольцевого контура лазера.

Обладая хорошей чувствительностью, лазерный гироскоп имеет вместе с тем ограниченную точность из-за эффекта захвата (синхронизации) встречных волн, а также большие габариты и вес. Последнее обстоятельство затрудняет его использование для навигации подвижных объектов. В связи с этим, после создания одномодовых оптических волокон с достаточно малым затуханием исследователи вернулись к интерферометрической схеме Саньяка с той лишь разницей, что в ней кольцевой контур образован длинным световодом (до километра и более), навитым на катушку. Измеряемым эффектом является разность фаз встречных волн:

$$\Delta\Phi = 2\pi f_0 t_\Omega = \frac{8\pi\vec{\Omega}\vec{S}f_0}{c^2}. \quad (1.74)$$

←----->

Эти приборы имеют достаточно малые габариты, малый вес и хорошие эксплуатационные характеристики. По этой причине они находят применение в бесплатформенных высокоточных инерциальных системах навигации подвижных объектов.

Известные экспериментальные исследования кольцевых волоконных интерферометров проводились для двух вариантов прибора. В первом варианте катушки волоконного световода и измерителя фазовых сдвигов размещались на одной вращающейся платформе, во втором – световод размещался на вращающейся платформе, а измеритель – на неподвижном основании. При этом получены разные результаты, не подтверждающие теоретические выводы. Таким образом, даже при постоянном вращении теоретические результаты не всегда подтверждают экспериментальные исследования. При ускоренном вращении условия распространения волн в световодах существенно усложняются, что приводит к усложнению теоретического описания их параметров. Вместе тем, это приводит к новым физическим эффектам, которые можно использовать для измерения углового ускорения [79–82].

Важно отметить, что временная гравитационная задержка (1.65) и задержка во вращающейся системе (1.76) не зависят от природы волны, а определяются лишь метрикой гравитационного поля. Поэтому оба этих эффекта могут быть реализованы на волнах любого типа: электромагнитных, звуковых (ультразвуковых), а также на волнах де Бройля, собственных движущимся атомам.

На ультразвуке уже созданы действующие образцы так называемых звуковых твердотельных волновых гироскопов (ТВГ). В этом приборе ультразвуковая волна распространяется во встречных направлениях в высокочастотном резонаторе из плавленого кварца. Взаимная задержка волн в резонаторе определяется, как и следовало ожидать, формулой (1.77). Прибор имеет весьма неплохие характеристики точности.

В последние годы создаются волновые гироскопы на основе использования интерференции волн де Бройля потоков холодных атомов [например, 84–87].

В процессе исследований электродинамических систем в состоянии вращения автором установлено, что гироскопический эффект в электродинамике должен существовать не только на волнах, но и на постоянных электрических и магнитных полях, а также в системе проводников с постоянным током [88–89]. В разделе 11 рассматриваются схемы экспериментов по измерению этих новых релятивистских эффектов.

1.3.3.3. Гравитационное смещение частоты волны

Отношение собственных частот одного и того же радиолуча в двух точках вдоль трассы распространения обратно пропорционально измерительным интервалам собственного времени в этих точках [1–3]. Поэтому на основании (1.45) имеем:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{d\tau_2}{d\tau_1} = \frac{\sqrt{1 - \frac{2\varphi_2}{c^2} - \frac{v_2^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{2\varphi_1}{c^2} - \frac{v_1^2}{c^2}}} \frac{dt_2}{dt_1} \approx \left(1 - \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{c^2} - \frac{v_2^2 - v_1^2}{2c^2} \right) \frac{dt_2}{dt_1}, \quad (1.75)$$

где величины с индексами 1 и 2 относятся к точке размещения передатчика (излучателя) и приемника соответственно.

Отношение координатных промежутков времени найдем из соотношения между моментами приема и передачи:

$$t_2 = t_1 + t_{12},$$

где t_{12} – время распространение луча между передатчиком и приемником:

$$\frac{dt_2}{dt_1} = 1 + \frac{dt_{12}}{dt_1}. \quad (1.76)$$

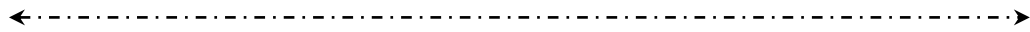
Время распространения луча представим в виде (задержкой в гравитационном поле пренебрегаем):

$$t_{12} = \frac{\vec{e}}{c} (\vec{R}_2 - \vec{R}_1).$$

Подставляя полученное выражение в (1.76), находим

$$\frac{dt_2}{dt_1} = \frac{1 - \vec{v}_1 \vec{e}}{1 - \frac{\vec{v}_2 \vec{e}}{c}},$$

где $\vec{v}_1 \vec{e} = \frac{d(\vec{R}e)_1}{dt_2}$; $\vec{v}_2 \vec{e} = \frac{d(\vec{R}e)_2}{dt_2}$ – радиальные скорости передатчика и приемника.



В результате выражение для частоты (1.75) принимает окончательный вид:

$$\frac{f_1}{f_2} = \left(1 + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2c^2} \right) \frac{1 - \frac{\vec{v}_1 \vec{e}}{c}}{1 - \frac{\vec{v}_2 \vec{e}}{c}}. \quad (1.77)$$

Полученная формула справедлива для любого направления луча между точками 1 и 2, следует лишь правильно определять знаки произведений $\vec{v} \vec{e}$. В частном случае, когда гравитационное поле отсутствует ($\varphi_1 = \varphi_2 = 0$) и передатчик неподвижен ($v_1 = 0$), приходим к соотношению (1.31), справедливому в СТО.

Из формулы (1.77) следует, что для неподвижно размещенных на поверхности Земли генераторов (в отсутствие их относительного движения),

$$\frac{f_1}{f_2} = 1 + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2c^2}, \quad (1.78)$$

где v_1 и v_2 в данном случае равны геоцентрическим скоростям неподвижных точек на поверхности вращающейся Земли, в которых размещены часы.

На основании этой формулы можно записать:

$$\frac{f_1 - f_2}{f_2} = + \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2c^2} \right), \quad (1.79)$$

что с точностью до знака совпадает с формулой (1.53). Напомним, что f_1 – частота волны в точке излучения, f_2 – частота волны в точке приема.

В частности, при размещении генераторов на одной широте, но на разной высоте получаем формулу, обратную по знаку формуле (1.60a):

$$\frac{f_1 - f_2}{f_2} = - \frac{g}{c^2} (\rho_1 - \rho_2). \quad (1.80)$$

Проанализируем полученный результат. При распространении излучения от Земли вверх ($\rho_1 - \rho_2 < 0$) отсюда имеем $f_1 - f_2 > 0$. Это означает, что частота волны в верхней точке приема меньше, чем частота в нижней точке излучения, где потенциал выше. Иначе говоря, частота волны смещается в красную сторону спектра - «красное смещение». Если

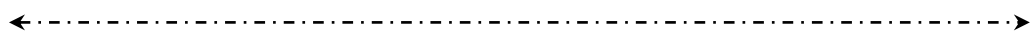
←----->

же волна распространяется сверху вниз, т.е. к Земле, то при положительной разности высот точек передачи и приема ($\rho_1 - \rho_2 > 0$) имеем $f_1 - f_2 < 0$. Это означает, что частота принимаемого излучения в нижней точке трассы выше, чем в верхней. «Падающее» в гравитационном поле излучение смещается по частоте в сторону высших частот – «фиолетовое смещение».

Если сравнить формулы (1.60а) и (1.83), то можно сделать следующий вывод: если частота задающего генератора часов при поднятии их на некоторую высоту увеличивается, то частота электромагнитной волны, распространяющейся между нижними и верхними часами, наоборот, в верхней точке уменьшается.

Рассмотренный эффект сдвига частоты ЭМВ (1.80) впервые теоретически предсказан Эйнштейном [7] и носит название *гравитационного смещения частоты*. При разности высот генераторов в 1000 м относительный гравитационный сдвиг частоты составляет $\Delta f / f_0 \approx 10^{-13}$.

В настоящее время справедливость формул (1.78) – (1.80) экспериментально подтверждена с относительной погрешностью 10^{-2} – 10^{-5} в целом ряде экспериментов (см., например, обзоры [68, 97]. Первый эксперимент был выполнен Адамсом и был посвящен наблюдению за смещением спектральных линий белого карлика Сириус-В. Наблюдения в целом подтвердили выводы ОТО, однако оставалось сомнение, что смещение частоты вызвано другими, неизвестными космическими причинами. Поэтому нужен был эксперимент на Земле. Такие опыты проведены Паундом и Ребкой в 1959 г. (точность около 10 %) [98], а затем Паундом и Снайдером [99] и в эксперименте [100] была достигнута точность лучше 1 %. В этих опытах использовалось гамма-излучение на эффекте Мёссбауэра, распространяющееся между двумя точками с разностью высот 22 м в башне Физической лаборатории Джефферсона в Гарвардском университете. В опыте Бёммеля [101] гамма-излучение распространялось горизонтально, но ускорение измерительной системы создавалось искусственно с помощью колебаний пьезокерамических оснований приемника и передатчика. В эксперименте Vessot [102] использовался стандарт частоты – водородный мазер – с нестабильностью 10^{-14} , размещенный на борту отделяемой суборбитальной головной части ракеты Scout. Высота подъема стандарта частоты составила 10273 км. При измерениях использовалась схема компенсации мешающего эффекта Допплера I порядка. Достигнутая относительная погрешность измерений составила 10^{-4} .



В эксперименте «Радиоастрон» [103, 104], выполненном международной кооперацией с участием российских ученых, использовался водородный стандарт с нестабильностью $2 \cdot 10^{-15}$. Точность измерений эффекта гравитационного смещения частоты достигла 10^{-5} . С целью повышения точности измерения этого эффекта Европейским космическим агентством в 2016 г. планируется космический эксперимент «Ансамбль атомных часов в космосе» – ACES (Atomic Clock Ensemble in Space) на борту МКС [38, 66]. В этом эксперименте предполагается разместить атомные часы со стабильностью и точностью до нескольких долей 10^{-16} и провести их сравнение с наземными атомными часами с помощью радиотехнических и лазерных измерительных линий. Планируемая погрешность измерения гравитационного смещения частоты составляет $2 \cdot 10^{-6}$, что уже имеет прикладное значение для измерения метрики гравитационного поля Земли в виде разности гравитационных потенциалов между МКС и наземной измерительной станцией с помощью электромагнитных волн.

1.3.4. Оптическая модель гравитационного поля и ее свойства

1.3.4.1. Экспериментальные подтверждения оптических свойств гравитационного поля

Одной из форм представления гравитационного поля является представление его в виде оптически плотной преломляющей среды без поглощения. Эта форма может быть интересна и удобна при изучении свойств и параметров распространения радиоволн и оптических лучей в околоземном пространстве-времени.

Эффективный коэффициент преломления постоянного гравитационного поля Шварцшильда при таком подходе определяется известным соотношением [2, 3]:

$$n_{эфф} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}, \quad (1.81)$$

где φ – гравитационный потенциал, определяемый для сферически симметричного тяготеющего тела в виде (1.41).

«Оптическая гравитационная среда» с таким коэффициентом преломления должна вызывать задержку электромагнитного луча вблизи тяготеющего тела. Действительно, представляя координатную задержку в виде

$$dt = \frac{dR}{c} n_{эфф},$$

←----->
 на основе соотношения (1.81) приходим к формулам (1.64) – (1.67), которые многократно проверены на практике.

Кроме того, воображаемая «оптическая среда» с показателем преломления (1.81) вызовет рефракцию электромагнитной волны, поскольку вблизи планеты она будет оптически более плотной, чем вдали от нее. Электромагнитная волна будет огибать планету и луч принимает форму гиперболы, в фокусе которой находится планета. Угол отклонения луча вблизи тяготеющего тела определяется как угол между асимптотами гиперболы [2, 3]:

$$\Delta\theta = \frac{4GM}{c^2\rho_M}, \quad (1.82)$$

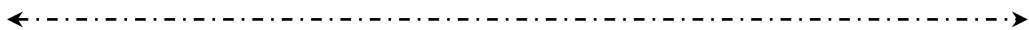
где ρ_M – минимальное расстояние от луча до центра планеты.

Для луча, проходящего вблизи Солнца этот угол составляет $1,75''$ ($\approx 8,8$ мкрад). Для условий Земли угол примерно равен $2,8 \cdot 10^{-3}$ мкрад.

Рассмотренный *эффект гравитационной рефракции*, как и *эффект задержки* радиолуча, вызван двумя причинами: неевклидовым характером пространственной метрики и изменением скорости лучей в поле тяготения. Эффект рефракции света в поле Солнца измерен в настоящее время методами оптической астрономии с ошибкой 4–5 % [68]. Использование современных радиоинтерферометров со сверхдлинной базой (РСДБ) позволило повысить точность угловых измерений до 0,1 мс дуги ($\approx 5 \cdot 10^{-4}$ мкрад) обеспечив измерение гравитационной рефракции с погрешностью 0,045 % [105, 106].

Наконец, гравитационная рефракция света вблизи массивных космических тел может создавать эффект гравитационной фокусировки, или *эффект гравитационной линзы*.

В качестве гравитационной линзы могут выступать самые разные космические объекты: планеты, звезды, галактики и т.д. Величина углов рефракции при гравитационной фокусировке зависит от массы гравитационной линзы. Значения этих углов имеют широкий диапазон: от $(10^{-9})''$ для планет до $(10^{-3})''$ для скоплений галактик. Для одной из ближайших галактик с массой $M = 10^{12} M_C$ (M_C – масса Солнца), находящейся на удалении 100 кпс, угол отклонения составляет $200''$. Эта величина вполне достаточна для формирования межпланетной линзы. Первая гравитационная линза была обнаружена Д. Уолшем в 1979 г. при наблюдении квазара *QSO 0957+561*. К настоящему времени обнаружено несколько десятков гравитационных линз.



В целом, оптическая модель гравитационного поля может быть весьма удобной при решении проблем распространения электромагнитных волн в околоземном пространстве.

Во вращающихся системах отсчета, связанных с Землей (ITRS, орбитальной и др.), в силу принципа эквивалентности в общей теории относительности возникают дополнительные силовые поля центробежных сил, которые по своему воздействию на электромагнитные поля неотличимы от воздействия истинного гравитационного поля Земли и полей ближайших небесных тел.

Поэтому для решения практических задач космической навигации, геодезии и синхронизации необходимо найти более общее решение для обобщенного коэффициента преломления «гравитационной преломляющей среды», учитывающее, кроме истинных гравитационных полей, влияние атмосферы, а также дополнительных «вихревых» гравитационных полей в системах отсчета, связанных с вращающейся Землей.

1.3.4.2. Экспериментальные подтверждения принципа эквивалентности

Как уже упоминалось, во всех ускоренных (в том числе вращающихся) системах отсчета возникает наведенное ускорением (вращением) гравитационное поле, которое, в соответствии с принципом эквивалентности в ОТО, по своему воздействию на СЧВ и электромагнитную волну не должно отличаться от воздействия истинного гравитационного поля.

Принцип эквивалентности (ПЭ) в ОТО предполагает равенство гравитационной и инертной масс тела. При этом тела в свободном падении ведут себя так, словно внешняя гравитация отсутствует.

Лабораторные проверки ПЭ проводятся путем сравнения ускорений свободного падения a_1, a_2 двух пробных тел. Когда тела находятся на одном и том же расстоянии от источника гравитационного поля, то выражение для искомой разности масс имеет вид [68] :

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{2(a_1 - a_2)}{a_1 + a_2} = \left[\frac{m_G}{m_{IN}} \right]_1 - \left[\frac{m_G}{m_{IN}} \right]_2 = \Delta \left[\frac{m_G}{m_{IN}} \right], \quad (1.83)$$

где m_G, m_{IN} – гравитационная и инертная масса каждого тела. Отсюда следует, чувствительность экспериментов по проверке ПЭ определяется точностью измерения разности ускорений свободного падения пробных тел.

На сегодняшний день проведено множество экспериментов по измерению отношения гравитационной и инертной масс в условиях наземной лаборатории [107]. Самые точные измерения разности ускорений достигнуты при использовании пробных тел из бериллия и титана группой Эт-Ваш (Eot-Wash) (США, Университет штата Вашингтон) [108, 109]. При этом относительная погрешность измерений составила $\Delta a/a = (1,0 \pm 1,4) \cdot 10^{-13}$. Это весьма высокая точность, однако значительные улучшения качества проверки ПЭ ожидаются от космических экспериментов. Среди множества космических проектов следует выделить несколько наиболее интересных:

1) Французский космический эксперимент «MicroSCOPE», основанный на использовании высокочувствительных электростатических дифференциальных акселерометров [110]. Эксперимент спланирован при поддержке Французского космического агентства CNES и Европейского космического агентства ESA. Электростатические разностные акселерометры используют задел, полученный при реализации нескольких космических гравитационных проектов, подготовленных Немецким национальным исследовательским центром геонаук (GFZ). Среди таких проектов следует назвать проект CHAMP (Gravity and Magnetic Field Mission) [111], GRACE (Gravity Recovery End Climate Experiment Mission, совместно с NASA) [112], GOCE (Global Ocean Circulating Experiment, совместно с ESA и другими европейскими странами) [113].

Ожидаемая точность эксперимента – 10^{-15} .

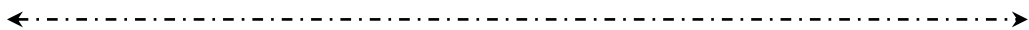
2) Проект космического эксперимента STUFF (Space Test of Universality of Free Fall) – «Космическая проверка универсальности свободного падения» [114]. Проект основан на использовании лазерных измерений.

Ожидаемая точность – порядка 10^{-17} .

3) Французский проект QuITE (Quantum Interferometer Test of the Equivalence Principle) – «Проверка принципа эквивалентности с помощью квантового интерферометра» [115] основан на использовании двух атомных интерферометров, работающих на атомах двух разных типов.

Ожидаемое повышение точности по сравнению с лабораторными экспериментами – на 7–9 порядков.

4) Французский космический проект I.C.E., разрабатываемый при поддержке CNES [116], направлен на разработку космического бортового высокоточного акселерометра, основанного на использовании интерференции атомов. Одной из главных целей проекта I.C.E. является высокоточная проверка принципа эквивалентности.



5) Проект GG (Galileo Galilei) – «Галилео Галилей» [114, 117] Итальянского космического агентства (ASI) основан на использовании дифференциальных акселерометров в виде коаксиальных концентрических цилиндров. Такая конструкция, как считают разработчики, способна обеспечить точность проверки ПЭ порядка 10^{-17} .

6) Проект STEP (Satellite Test of Equivalence Principle) – «Спутниковая проверка принципа эквивалентности» [118, 119] основан на использовании спутника без сноса и комплекс бортовых пробных масс, свободно движущихся внутри объема спутника. При использовании низких температур ожидаемая чувствительность составляет 10^{-18} .

В целом, уже имеющиеся результаты экспериментов вполне допускают использование ускоренных (в том числе, вращающихся) систем отсчета для высокоточного описания релятивистских явлений в СЧВ наземного и космического базирования, а также релятивистских явлений при распространении электромагнитных волн в околоземном пространстве-времени.

1.3.4.3. Экспериментальное обнаружение гравитационных волн по изменению их оптических свойств

Факт обнаружения гравитационных волн, вызванных слиянием двух черных дыр в двойной системе, был объявлен американскими учеными 11 февраля 2016 г. [120]. Обнаружение гравитационных волн было осуществлено с помощью двух лазерных интерферометров LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory). Проект LIGO начат в 1994 г. и был предназначен для непосредственного обнаружения гравитационных волн. Он представляет собой два лазерных интерферометра с длиной плеч 4 км, расположенных в США на расстоянии 3003 км друг от друга: один в Ливингстоне (штат Луизиана), другой – в Хэнфорде (штат Вашингтон).

Зафиксированное относительное изменение длины плеча интерферометра в эксперименте составило $\Delta l / l_0 = 3,4 \cdot 10^{-22}$, что соответствует абсолютному изменению длины плеча около $\Delta l \approx 10^{-18}$ м. На сегодняшний день эту цифру можно считать рекордно малой погрешностью измерений, полученной в лазерных интерферометрах.

Идея создания лазерной интерференционной гравитационной антенны была высказана в 1962 г. нашими соотечественниками: Герценштейном М.Е. и Пустовойтом В.И. (в те годы – рядовой сотрудник ВНИИФТРИ, ныне академик РАН) [121]. В этой работе был предложен метод регистрации гравитационной волны на основе наблюдения переменной картины интерференции в интерферометре Майкельсона. Дело в том,

←----->

что гравитационное излучение представляет собой квадрупольное излучение и поэтому если в одном плече интерферометра расстояние между зеркалами увеличивается, то в другом плече оно уменьшается. Поскольку поляризация и фаза волны переменные, то и сигнал на выходе интерферометра также изменяется, что упрощает его обнаружение и измерение.

Для описания гравитационной волны обычно используют геометрическую модель, в которой волна изменяет геометрию пространства-времени. При этом гравитационная волна представляет возмущение или, как иногда говорят, «рябь» метрики пространства-времени [1].

Однако возможно использование и оптической модели гравитационной волны, когда она представляется как анизотропная оптически плотная среда с переменным во времени коэффициентом преломления. Как показано в работах [120,121], оптика лазерных лучей в поле гравитационной волны может быть описана уравнением эйконала [1]. При этом эффективный коэффициент преломления «гравитационной среды» в волне определяется соотношением:

$$n_{эфф} = 1 + \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta, \quad (1.84)$$

где $h_{\alpha\beta}$ – амплитуда гравитационной волны; n^α – единичный вектор в направлении лазерного луча. В результате относительное изменение оптической длины плеч интерферометра составляет:

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta \approx \frac{1}{2} h_{22}, \quad (1.85)$$

где l_0 – невозмущенная длина плеча интерферометра.

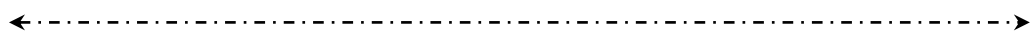
Именно эта формула, следующая из оптической модели гравитационной волны, и была подтверждена в приведенном выше эксперименте.

В настоящее время, кроме проекта LIGO, за рубежом существует несколько альтернативных проектов лазерных гравитационных антенн. Среди них наиболее интересными являются следующие:

1) Итальянско-французский проект VIRGO, создаваемый в Италии около Пизы, с длиной плеч 3 км [122, 123].

2) GEO-600 – совместный проект Великобритании (Кардиффский университет и Университет Глазго) и ФРГ (Институт им. Альберта Эйнштейна) [124, 125]. Лазерный интерферометр с длиной плеч 600 м располагается в Германии (около Ганновера).

3) Японская подземная лазерная антенна TAMA-300, которая имеет длину плеч 300 м и располагается вблизи Токио [126].



4) Японский национальный научный проект (с 2010 г.) – подземный лазерный интерферометр KAGRA (Kamioka Gravitational Wave Detector) [126–129]. Интерферометр будет иметь длину плеч 3 км и располагаться на глубине 200–500 м от поверхности горы Камиока в префектуре Гифу. Зеркала интерферометра будут охлаждаться с помощью специального криостата.

5) Европейский проект «Эйнштейновский телескоп» [130–131], который представляет собой подземный лазерный интерферометр с длиной плеч 10 км.

Кроме наземных антенн идет разработка космических лазерных гравитационных антенн, в частности:

6) Совместный космический проект Национального космического управления США (NASA) и Европейского космического агентства (ESA), который называется LISA (Laser Interferometer Space Antenna). [132–133]. Интерферометр располагается на гелиостационарной орбите с расстоянием между зеркалами около 1 млн. км. В декабре 2015 г. на орбиту Земли был запущен специальный спутник, предназначенный для отработки прецизионных лазерных измерений по технологии «спутник в спутнике». Испытания прошли успешно, при этом точность лазерных измерений расстояний между свободными массами внутри спутника составила 10^{-12} м.

7) Рассматривается возможность создания гравитационной антенны на основе пары спутников Земли, снабженных высокостабильными лазерами и обменивающимися лазерными сигналами [134].

1.4. Выводы к разделу 1

Анализ результатов обзора, выполненного в разделе 1, позволяет сделать следующие основные выводы.

1) Метрические свойства эталонов времени, частоты и длины в гравитационном поле зависят от координат исследуемых точек и скорости этих точек относительно начала системы координат. Метрические свойства эталонов длины в более сложных гравитационных полях предположительно зависят от ориентации оси эталона относительно осей системы координат.

В целом, результаты измерений времени, частоты и расстояний имеют смысл точных измерений только тогда, когда они привязаны к конкретной точке гравитационного поля с известными координатами и известна скорость их перемещения в выбранной системе отсчета. Точно так же эталоны времени, частоты и длины в гравитационном поле являются таковыми лишь в известной точке гравитационного поля при известной скорости их движения. В точке поля с неизвестными координатами они уже не являются эталонами.

←----->

Дальнейшее развитие релятивистской метрологии интервалов времени и пространства связано с необходимостью учета неоднородности гравитационного поля Земли, неравномерности вращения Земли, приливных явлений, а также особенностей гравитационного поля во вращающейся геоцентрической системе отсчета, жестко связанной с Землей, – ITRS (*International Terrestrial Reference System*).

2) Для практических исследований релятивистской метрологии можно использовать две релятивистские модели гравитационного поля: геометрическую и оптическую.

Для исследования релятивистских явлений в хранителях времени и частоты на основе первой модели целесообразно применять хорошо разработанный и экспериментально проверенный аппарат общей теории относительности и аппарат криволинейной геометрии Гаусса-Римана.

Аппаратом исследования во второй модели является теория распространения радиоволн в неоднородных оптически плотных средах при известном коэффициенте преломления «гравитационной» преломляющей среды.

Для повышения точности описания релятивистских эффектов в системах, использующих радиоволны, необходимо дальнейшее развитие оптической модели гравитационного поля в связи с использованием вращающихся земных систем отсчета типа ITRS, а также влиянием вращающейся атмосферы. Оптическая релятивистская модель эффективного гравитационного поля будет удобна радиофизикам и радиоинженерам, разрабатывающим прецизионные наземно-космические измерительные системы, поскольку она не требует специальных знаний в области геометрии Гаусса-Римана (теории геодезических линий, теории кривизны пространства-времени и т.д.)

3) Электромагнитная волна, в силу нулевого значения пространственно-временного интервала, является индикатором искажения пространственно-временной метрики в гравитационном поле. Это подтверждено многочисленными экспериментами по измерению релятивистских искажений (релятивистских эффектов) времени распространения, частоты и рефракции волн в статических гравитационных полях Земли, Солнца и удаленных звезд, а также в поле гравитационной волны.

Необходимо расширить спектр исследуемых параметров электромагнитного поля, которые реагируют на изменение метрики гравитационного поля (поляризация волны, напряженность электрического и магнитного полей, электрический заряд, электрический ток и т.д.). Кроме того, этот спектр параметров необходимо связать с вращающимися земными системами отсчета.

4) Релятивистские искажения параметров стандартов частоты и времени, а также параметров распространения ЭМВ (релятивистские эффекты) измерены в настоящее время с погрешностью 10^{-5} , планируется повышение точности до $2 \cdot 10^{-6}$, что уже имеет прикладное значение.

В связи с этим, задача практической релятивистской метрологии, связанной с использованием релятивистских изменений частоты и времени в СЧВ, а также параметров электромагнитного поля может быть рассмотрена в двух аспектах:

➤ в аспекте совершенствования методов релятивистской метрологии измерительных систем.

При этом релятивистские искажения (релятивистские добавления, дополнительные эффекты) могут рассматриваться как факторы, ограничивающие точность систем космической навигации, геодезии, синхронизации, связи, локации и др. и поэтому требуются точные алгоритмы их учета. Практика космических измерительных систем навигации, синхронизации и геодезии, а также систем хранения частоты и времени требует учета эффектов, пропорциональных $1/c^3$, поскольку их относительная величина в перечисленных системах превышает 10^{-13} – 10^{-14} . При нестабильности современных измерительных стандартов частоты и времени порядка 10^{-15} – 10^{-16} (в ближайшей перспективе 10^{-17} – 10^{-18}) это необходимо;

➤ в аспекте измерения величины релятивистских эффектов.

При этом релятивистские искажения могут рассматриваться как самостоятельные измеряемые физические эффекты, несущие информацию о параметрах гравитационного поля: потенциале и его пространственных производных – первых и последующих градиентах, а также параметрах ускорения и вращения систем отсчета. В этом случае речь идет о новых направлениях в измерительной технике и релятивистской метрологии – *релятивистской геодезии и релятивистской гравиметрии*.

Для решения всех этих задач необходимо развитие релятивистской метрологии времени и частоты в СЧВ с учетом неоднородности гравитационного поля, неравномерности вращения Земли, а также условий влияния гравитационных полей других небесных тел.

Кроме того, необходимо развитие теории распространения электромагнитных волн в средах, движущихся в гравитационных полях, в том числе гравитационных полях систем отсчета, вращающихся вместе с Землей, с учетом эффектов порядка $1/c^3$. Теоретической основой для этого является электродинамика движущихся сред, которую необходимо обобщить на неинерциальные системы отсчета.

2. МЕТРИКА ОКОЛОЗЕМНОГО ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ В РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМАХ ОТСЧЕТА

2.1. Необходимые сведения из геометрии Гаусса-Римана

2.1.1. Определение скаляра, вектора и тензора в криволинейных координатах

Как уже отмечалось, геометрия Гаусса-Римана является основой математического аппарата общей теории относительности, или теории гравитации. Согласно представлениям этой геометрии, угол между координатными осями не обязательно прямой, а сами координатные оси могут быть криволинейными. Поэтому определения векторов, тензоров, а также их производных в криволинейных координатах отличаются от определений в прямоугольных координатах [1, 135].

Рассмотрим преобразование одной четырехмерной системы координат x^0, x^1, x^2, x^3 в другую систему координат x'^0, x'^1, x'^2, x'^3 . Если значение некоторой функции f^i в разных координатах совпадают, т.е., если

$$f^i(x^0, x^1, x^2, x^3) = f^i(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3), \quad (2.1)$$

то говорят, что функция точки $f^i(x^0, x^1, x^2, x^3)$ есть *инвариант*, или *скаляр*. Примером скаляра является какое-либо постоянное число. Другим примером инварианта, как уже установлено выше, является квадрат пространственно-временного интервала в гравитационном поле (1.40):

$$ds^2 = \sum_{i=0}^3 \sum_{k=0}^3 g_{ik} dx_i dx_k.$$

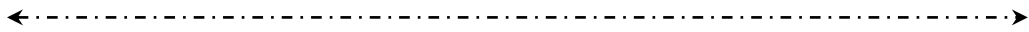
Условимся, что встречающиеся далее при обозначениях векторов и тензоров латинские индексы i, k, l, m и т.д. пробегает значения 0, 1, 2, 3.

При преобразовании координат их дифференциалы преобразуются по формулам:

$$dx^i = \sum_{k=0}^3 \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} dx'^k. \quad (2.2)$$

Отсюда следует определение вектора: всякая совокупность четырех величин A^i , которые при преобразовании координат преобразуются как их дифференциалы, называется *контравариантным четырехмерным вектором*, или *4-вектором*:

$$A^i = \sum_{k=0}^3 \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} A'^k. \quad (2.3)$$



Условимся также, что если далее в выражении для одночлена дважды встречается один и тот же индекс, то по нему производится суммирование. При этом знак суммы опускается. Это правило было введено Эйнштейном и называется суммированием по повторяющимся индексам. В результате последнее выражение принимает более простой вид:

$$A^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} A'^k. \quad (2.4)$$

Рассмотрим некоторый скаляр χ . Производные от этого скаляра $\partial\chi/\partial x^i$ при преобразовании координат преобразуются по формулам, отличным от (2.4):

$$\frac{\partial\chi}{\partial x^i} = \frac{\partial\chi}{\partial x'^k} \frac{\partial x'^k}{\partial x^i}. \quad (2.5)$$

Отсюда следует определение еще одной разновидности вектора: всякая совокупность четырех величин A_i , которые при преобразовании координат преобразуются как производные от скаляра, называются *ковариантным 4-вектором*:

$$A_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A'_k. \quad (2.6)$$

Здесь, как и выше, знак суммирования по повторяющимся индексам опускается.

Аналогичным образом определяются четырехмерные тензоры, или 4-тензоры второго и т.д. рангов.

Контравариантным 4-тензором 2-го ранга A^{ik} называется совокупность 16 величин, которые преобразуются как произведения двух рассмотренных выше контравариантных векторов. Закон преобразования имеет вид:

$$A^{ik} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} \frac{\partial x^k}{\partial x'^m} A^{lm}. \quad (2.7)$$

Ковариантным 4-тензором 2-го ранга называется тензор, преобразующийся по закону:

$$A_{ik} = \frac{\partial x'^l}{\partial x^i} \frac{\partial x'^m}{\partial x^k} A_{lm}. \quad (2.8)$$

Соответственно, смешанный 4-тензор 2-го ранга преобразуется по формуле:

$$A_k^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} \frac{\partial x'^m}{\partial x^k} A_m^l. \quad (2.9)$$

Следует заметить, что с точки зрения общего определения тензоров векторы иногда называют тензорами первого ранга, а скаляры – тензорами нулевого ранга.

Здесь следует привести в качестве примера очень важный смешанный тензор второго ранга – так называемый *единичный тензор*:

$$\delta_i^k = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}. \quad (2.10)$$

Интересно рассмотреть совокупность величин ε_{iklm} , антисимметричных относительно своих значков, причем $\varepsilon_{0123} = 1$. Из этого определения следует, что $\varepsilon_{iklm} = 0$, если два или больше значков совпадают, $\varepsilon_{iklm} = +1$, если $(iklm)$ представляют четную перестановку чисел (0123) , и $\varepsilon_{iklm} = -1$, если $(iklm)$ есть нечетная перестановка.

Совокупность величин ε_{iklm} называется *псевдотензором* и его составляющие можно рассматривать как ковариантные составляющие антисимметричного псевдотензора четвертого ранга. Контравариантные составляющие этого псевдотензора определяются по формуле:

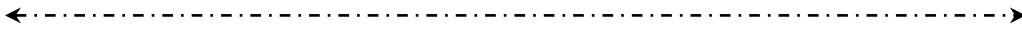
$$\varepsilon^{iklm} = -\varepsilon_{iklm}. \quad (2.11)$$

Если φ есть скаляр, то совокупность величин $\varphi_{iklm} = \varphi \varepsilon_{iklm}$ будет называться антисимметричным псевдотензором четвертого ранга. Подобно скаляру, такой тензор имеет только одну составляющую. Поэтому его принято называть *псевдоскаляром*.

Всякому антисимметричному тензору второго ранга A_{ik} с помощью псевдотензора ε^{iklm} можно сопоставить антисимметричный тензор \hat{A}_{ik} того же ранга:

$$\hat{A}^{ik} = \frac{1}{2} \varepsilon^{iklm} A_{lm}. \quad (2.12)$$

Полученный тензор называется *дуальным* по отношению к данному тензору.



2.1.2. Элементы тензорной алгебры

Рассмотрим необходимые алгебраические операции с тензорами.

Умножение тензора на скаляр. Умножая все составляющие какого-либо тензора A^l_{ik} на скаляр χ , мы получаем составляющие нового тензора χA^l_{ik} .

Сложение двух тензоров одного и того же вида (т.е. имеющих одинаковое количество нижних индексов и одинаковое количество верхних индексов). Операция сложения заключается при этом в сложении соответствующих составляющих данных тензоров. Суммой тензоров A^l_{ik} и B^l_{ik} является тензор:

$$C^l_{ik} = A^l_{ik} + B^l_{ik}. \quad (2.13)$$

Сложение тензоров обладает свойствами коммутативности и ассоциативности.

Рассмотрим контравариантный тензор второго ранга A^{ik} . Если при изменении порядка индексов его составляющие не изменяют своих значений, то такой тензор называется *симметричным*:

$$A^{ik} = A^{ki}. \quad (2.14)$$

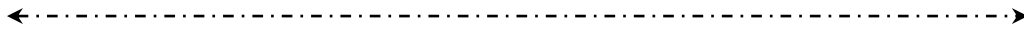
Если же при изменении порядка индексов составляющие тензора изменяют знак на обратный, то такой тензор называется *антисимметричным*:

$$A^{ik} = -A^{ki}. \quad (2.15)$$

Такие же определения справедливы и для ковариантного тензора второго ранга. Можно доказать, что любой контравариантный или ковариантный тензор второго ранга можно представить в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров.

Произведение двух тензоров. Пусть даны два произвольных тензора разных рангов, например, $A^i; B_{kl}$. Первый тензор первого ранга в четырехмерном пространстве имеет 4 составляющих, второй имеет $4^2 = 16$ составляющих. Перемножая каждую из 4 составляющих первого тензора на 16 составляющих второго, получаем тензор третьего ранга, имеющий $4^3 = 64$ составляющих:

$$C^i_{kl} = A^i B_{kl}. \quad (2.16)$$



2.1.3. Свойства фундаментального метрического тензора

Обратимся к квадрату пространственно-временного интервала (1.40). На основе вышеизложенного представим его в виде:

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k, \quad (2.17)$$

где составляющие метрического тензора g_{ik} являются функциями координат.

Это соотношение определяет квадрат расстояния между двумя бесконечно близкими мировыми точками в четырехмерном пространственно-временном многообразии, или континууме. Этой формулой устанавливаются метрические свойства этого многообразия, которое является римановым пространством. По определению, квадратичная форма (2.15) является скаляром и *инвариантом* к выбору системы координат.

Так как дифференциалы координат dx^i есть контравариантный вектор, то можно показать [135], что g_{ik} являются составляющими ковариантного тензора. Этот тензор в геометрии Гаусса-Римана называется *ковариантным фундаментальным метрическим тензором*.

Этот тензор удовлетворяет условию симметрии, т.е.

$$g_{ik} = g_{ki}, \quad (2.18)$$

а определитель этого тензора g отличен от нуля.

Два тензора A_{ik} ; B^{ik} называются обратными друг другу, если

$$A_{ik} B^{kl} = \delta_i^l. \quad (2.19)$$

Контравариантным метрическим тензором g^{ik} называется тензор, связанный с тензором g_{ik} как обратный, т.е.

$$g_{ik} g^{kl} = \delta_i^l. \quad (2.20)$$

Фундаментальный метрический тензор гравитационного поля содержит 16 компонентов. Поскольку для него справедливо соотношение (2.18), то 10 компонентов независимы:

$$g_{ik} = \begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}. \quad (2.21)$$

Любая векторная физическая величина может быть представлена как в контравариантных, так и в ковариантных компонентах. При этом единственными величинами, связывающими два вида компонентов векторов, являются компоненты метрического тензора. Такая связь очевидна:

$$A_i = g_{ik} A^k, \text{ или } A^i = g^{ik} A_k. \quad (2.22)$$

Аналогично, переход между различными формами одного и того же физического тензора также выполняется с помощью метрического тензора:

$$A_{ik} = g_{il} g_{km} A^{lm}; A_i^k = g^{kl} A_{li}; A^{ik} = g^{il} g^{km} A_{lm}. \quad (2.23)$$

Заметим, что g_{ik}, g^{ik}, g_i^k можно рассматривать как ковариантные, контравариантные и смешанные компоненты фундаментального тензора, ибо процесс повышения и понижения индексов применим и к этому тензору:

$$g_{ik} g^{kl} = g_i^k, \quad g_{ik} g^{il} g^{km} = g^{lm}, \quad (2.24)$$

т.е. процесс повышения значка производится с помощью тензора g^{ik} , а процесс понижения значка – с помощью g_{ik} .

2.1.4. Трехмерный метрический тензор

При решении практических задач, связанных с движением свободных тел и электромагнитных волн в постоянном гравитационном поле, из состава фундаментального метрического 4-тензора целесообразно выделять ту его часть, которая определяет только метрику трехмерного пространства, не связанную со временем.

Для решения этой задачи квадрат пространственно-временного интервала (2.17) представим в виде [1, 2]:

$$ds^2 = g_{00} c^2 dt^2 + 2g_{0\alpha} dx^\alpha dt + g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (2.25)$$

Здесь и далее греческие символы α, β, γ пробегает значения 1, 2, 3.

Добавляя в правую часть нулевую разность

$$\frac{g_{0\alpha} g_{0\beta}}{g_{00}} dx^\alpha dx^\beta - \frac{g_{0\alpha} g_{0\beta}}{g_{00}} dx^\alpha dx^\beta = 0,$$

интервал (2.25) приводим к виду:

$$ds^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta - \left(\sqrt{-g_{00}} - \frac{g_{0\alpha}}{\sqrt{-g_{00}}} \frac{V^\alpha}{c} \right)^2 c^2 dt^2, \quad (2.26)$$

←----->
 где $V^\alpha = dx^\alpha/dt$ – скорость тела, измеренная в координатном времени – координатная скорость; $\gamma_{\alpha\beta}$ – искомый трехмерный пространственный метрический тензор, определяемый выражением:

$$\gamma_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}}. \quad (2.27)$$

Этот тензор содержит 9 компонентов, 6 из которых независимы, так как $\gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{\beta\alpha}$:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

Чтобы установить свойства этого тензора, обратимся к связи (2.18) $g_{ik}g^{kl} = \delta_i^l$, где латинские индексы пробегают значения 0,1,2,3. Используя греческие индексы, (они, как условились, пробегают значения 1,2,3), правила сложения тензоров одного ранга, а также суммирование по повторяющимся индексам, связь (2.18) представим в виде:

$$g^{ik}g_{kl} = (g^{\alpha k} + g^{0k})(g_{k\beta} + g_{k0}) = g^{\alpha k}g_{k\beta} + g^{\alpha k}g_{k0} + g^{0k}g_{k\beta} + g^{0k}g_{k0} = \delta_\gamma^i. \quad (2.29)$$

Теперь, раскрывая в компонентах четыре полученных справа слагаемых, получаем для каждого из них следующие выражения:

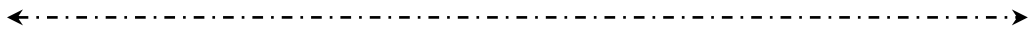
$$\begin{aligned} g^{\alpha k}g_{k\gamma} &= g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} + g^{\alpha 0}g_{0\gamma} = \delta_\gamma^\alpha, \\ g^{\alpha k}g_{k0} &= g^{\alpha\beta}g_{\beta 0} + g^{\alpha 0}g_{00} = \delta_0^\alpha = 0, \\ g^{0k}g_{k\beta} &= g^{0\gamma}g_{\gamma\beta} + g^{00}g_{0\beta} = \delta_\beta^0 = 0, \\ g^{0k}g_{k0} &= g^{0\alpha}g_{\alpha 0} + g^{00}g_{00} = \delta_0^0 = 1. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Из второго из полученных равенств находим: $g^{\alpha 0} = -\frac{g^{\alpha\beta}g_{\beta 0}}{g_{00}}$.

Подставляя это выражение в первое равенство (2.30), получаем:

$$g^{\alpha\beta}\gamma_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha, \quad (2.31)$$

где $\gamma_{\beta\gamma}$ – ковариантный трехмерный метрический тензор, определяемый формулой (2.27). Таким образом, ковариантный тензор $\gamma_{\beta\gamma}$ является обратным по отношению к контравариантному тензору $g^{\alpha\beta}$.



Этот результат можно представить иначе, утверждая, что, согласно соотношению (2.20), величины $g^{\alpha\beta}$ составляют контравариантный трехмерный метрический тензор, отвечающий метрике (2.27) [1]:

$$\gamma^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}. \quad (2.32)$$

Из четвертого равенства (2.30) определим контравариантную составляющую g^{00} :

$$g^{00} = \frac{1}{g_{00}} - \frac{g^{0\alpha} g_{\alpha 0}}{g_{00}}. \quad (2.33)$$

Для упрощения этого соотношения введем в рассмотрение ковариантный вектор g_α , определяемый в виде [1]:

$$g_\alpha = \frac{g_{0\alpha}}{-g_{00}}. \quad (2.34)$$

Далее будем его рассматривать как вектор в трехмерном пространстве с метрикой (2.27). В этом случае его контравариантные компоненты определяются в виде:

$$g^\alpha = \gamma^{\alpha\beta} g_\beta. \quad (2.35)$$

Из второго равенства (2.30) найдем выражение для компонент $g^{\alpha 0}$ и преобразуем его с помощью (2.32) и (2.34). В результате получим:

$$g^{\alpha 0} = g^{\alpha\beta} \frac{g_{\beta 0}}{-g_{00}} = \gamma^{\alpha\beta} g_\beta = g^\alpha. \quad (2.36)$$

На основе (2.34) и (2.36) соотношение (2.33) приводим к окончательному виду, который используется в практике гравитационных расчетов:

$$g^{00} = \frac{1}{g_{00}} + g_\alpha g^\alpha. \quad (2.37)$$

Следует привести также соотношение (без вывода) между определителями четырехмерного метрического тензора g и трехмерного метрического тензора γ , которое также часто используется на практике:

$$g = (-g_{00})\gamma. \quad (2.38)$$

2.1.5. Ковариантное дифференцирование

Как известно [135], в галилеевых координатах дифференциалы dA_i вектора A_i образуют вектор, а производные $\partial A_i / \partial x^k$ от компонент вектора по координатам образуют тензор.

В криволинейных координатах этого не происходит: dA_i не является вектором, а $\partial A_i / \partial x^k$ – не является тензором. Это легко показать. Выведем формулы преобразования дифференциалов dA_i в криволинейных координатах. Ковариантный вектор, как показано выше, преобразуется по формуле (2.6). Поэтому на основе этой формулы можем записать:

$$dA_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k + A'_k d \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k + A'_k \frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^i \partial x^l} dx'^l. \quad (2.39)$$

Таким образом, только при выполнении равенства $\frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^i \partial x^l} = 0$ дифференциал dA_i преобразуется как ковариантный вектор, т.е.

$$dA_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k. \quad (2.40)$$

Вышеизложенное относится и контравариантным векторам.

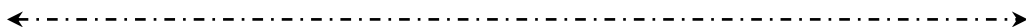
В криволинейных координатах дифференциалы ковариантного вектора DA_i и контравариантного вектора DA^i связаны с дифференциалами векторов dx^i и dx_i в галилеевых координатах соотношениями, соответственно:

$$DA_i = A_{i;l} dx^l, \quad DA^i = A^i_{;l} dx^l. \quad (2.41)$$

Здесь $A_{i;l}$, $A^i_{;l}$ – тензоры, которые обобщают искомое понятие производной от вектора на криволинейные координаты. Эти тензоры называются *ковариантными производными* соответственно векторов A_i и A^i . Ковариантное дифференцирование обозначается значком «точка с запятой», т.е. «;».

Развернутые выражения для ковариантных производных вектора имеют вид:

$$A_{i;l} = \frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma_{il}^k A_k, \quad (2.42)$$



$$A^i_{;l} = \frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma^i_{kl} A^k, \quad (2.43)$$

где величины Γ^l_{ik} носят название *символов Кристоффеля*. В галилеевых координатах $\Gamma^l_{ik} = 0$ и ковариантные производные переходят в обычные.

Поднимая с помощью фундаментального метрического тензора у ковариантных производных индекс, указывающий на дифференцирование, получаем так называемые *контравариантные производные*:

$$A_i{}^{;k} = g^{kl} A_{i;l}, \quad A^{i;k} = g^{kl} A^i_{;l}. \quad (2.44)$$

Ковариантные производные ковариантного и контравариантного тензоров имеют вид, соответственно:

$$A_{ik;l} = \frac{\partial A_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma^m_{il} A_{mk} - \Gamma^m_{kl} A_{im}, \quad (2.45)$$

$$A^{ik}{}_{;l} = \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{ml} A^{mk} + \Gamma^k_{ml} A^{im}. \quad (2.46)$$

Следует заметить, что ковариантная производная от скаляра χ понимается как обычная производная, т.е. как ковариантный вектор $\chi_k = \partial\chi/\partial x^k$, поскольку для скаляров $\delta\chi = 0$ и поэтому $D\chi = d\chi$.

Что касается ковариантной производной метрического тензора, то она равна нулю [135], т.е.

$$g_{ik;l} = g_i{}^{k;l} = g^{ik}{}_{;l} = 0. \quad (2.47)$$

Таким образом, при ковариантном дифференцировании фундаментальные метрические тензоры надо рассматривать как *постоянные величины*.

На основе полученного равенства символы Кристоффеля Γ^i_{kl} выражаются через компоненты метрического тензора g_{ik} в виде [1]:

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^m} \right). \quad (2.48)$$

С помощью полученных формул приводится к удобному виду выражение $A^i_{;i}$, которое является обобщением дивергенции вектора на криволинейные координаты:

$$A^i_{;i} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g} A^i)}{\partial x^i}, \quad (2.49)$$

где g – определитель фундаментального метрического тензора.

С использованием символов Кристоффеля легко определяется траектория свободной материальной частицы в гравитационном поле. В гравитационном поле частица движется так, что ее мировая точка перемещается по кратчайшей, или *геодезической линии*, в четырехмерном пространстве x^0, x^1, x^2, x^3 . При наличии гравитационного поля пространственное движение частицы уже не прямолинейно и неравномерно, а геодезическая – не прямая, как в галилеевом пространстве.

Уравнения движения частицы в гравитационном поле найдем путем обобщения дифференциальных уравнений свободного движения частицы в специальной теории относительности, т.е. в галилеевой четырехмерной системе координат [1]. Эти уравнения гласят, что $du^i/ds = 0$, т.е. $du^i = 0$, где ds – пространственно-временной интервал, u^i – четырехмерная скорость (или 4-скорость) частицы. Отсюда следует, что в криволинейных координатах дифференциал скорости также равен нулю, т.е. $Du^i = 0$.

Далее, опираясь на формулы для ковариантного дифференциала вектора (2.24) и (2.26), можем записать:

$$du^i + \Gamma_{kl}^i u^k dx^l = 0.$$

Разделив обе части этого уравнения на ds , получаем искомое уравнение движения частицы в гравитационном поле, или *уравнение геодезической* – наикратчайшей линии в пространстве Гаусса-Римана:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{kl}^i \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0. \quad (2.50)$$

Таким образом, движение частицы в гравитационном поле определяется величинами Γ_{kl}^i . Производная $d^2 x^i/ds^2$ определяет четырехмерное ускорение (4-ускорение) частицы. Если обозначить m – масса частицы, то величина $-m\Gamma_{kl}^i u^k u^l$ определяет 4-силу, действующую на частицу в гравитационном поле. Метрический тензор g_{ik} , входящий в выражение для символа Кристоффеля Γ_{kl}^i (2.48), играет роль потенциала гравитационного поля, а сам символ Кристоффеля – роль напряженности гравитационного поля (гравитационного ускорения). Следует, однако, заметить, что для электромагнитного луча уравнение геодезической в форме (2.33) неприменимо, поскольку вдоль его мировой линии $ds = 0$ и все члены этого уравнения обращаются в бесконечность.

2.2. Метрический тензор околоземного пространства-времени в геоцентрической небесной системе отсчета GCRS

2.2.1. Исходный метрический тензор для инерциальной геоцентрической небесной системы отсчета GCRS

Пространственно-временные системы отсчета, используемые для описания координат и шкал времени в Солнечной системе, определены резолюциями Международных научных организаций.

В частности, Резолюции Международного астрономического союза (МАС) (*IAU – Internatinal Astronomy Union*) [136, 137] определяют геоцентрическую небесную систему отсчета *Geocentric Celestial Reference System (GCRS)* с началом в центре масс Земли и *барицентрическую небесную систему отсчета (BCRS)* с началом в центре масс Солнца. Используемая здесь терминология соответствует терминологии, принятой Рекомендациями *Международного союза электросвязи, сектор Радиосвязи (МСЭ-Р) (ITU-R -International Telecommunication Union, Radiocommunication sector)* [11], материалами Конвенций Международной службы вращения Земли и опорных систем отсчета *IERS (International Earth Rotation and Reference Systems Service)* (2010 г.) [10] и соответствует Рекомендациям IAU, а также Рекомендациям Международного союза геодезии и геофизики (*IUGG-International Union of Geodesy and Geophysics*).

Согласно этим Рекомендациям, систему отсчета *GCRS* иногда обозначают как геоцентрическую инерциальную систему координат *Earth-Centered Inertial (ECI) coordinate system*. Кроме этой системы используется равноправная Международная небесная система отсчета *ICRS (International Celestial Reference System)*.

Выберем невращающуюся систему отсчета *GCRS (ICRS) OXYZ*, начало которой помещено в ее центр масс Земли, ось *OZ* перпендикулярна плоскости экватора и направлена в сторону северного полюса; плоскость *OXY* лежит в плоскости экватора, причем ось *OX* направлена в точку весеннего равноденствия Овна Υ , которая лежит на пересечении плоскости экватора Земли с плоскостью орбитального движения Земли вокруг Солнца; ось *OY* дополняет систему до правой [10]. Строго говоря, данная система является *квазиинерциальной*, поскольку центр масс Земли движется вокруг барицентра (центра масс Солнечной системы) с некоторым центростремительным гравитационным ускорением, направленным к

←----->
 барицентру. Другие небесные тела, например, Луна, также вызывает дополнительное гравитационное «лунное центростремительное» ускорение рассматриваемой системы отсчета. Ниже будет показано, что для Земли, свободно падающей в полях других небесных тел, влияние их потенциалов компенсируется с точностью до «приливных» потенциалов.

В обосновании характеристик невращающейся системы координат *GCRS* приняли участие многие зарубежные и отечественные исследователи, например [10, 138–142].

Фундаментальный метрический тензор в такой невращающейся системе отсчета в любой точке гравитационного поля медленно вращающейся Земли имеет компоненты [10]:

$$\begin{aligned} g_{00} &= -\left(1 - \frac{2\varphi}{c^2} + \frac{2\varphi^2}{c^4}\right) + O(c^{-5}), \\ g_{\alpha\beta} &= \delta_{\alpha\beta} \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right) + O(c^{-4}), \\ g_{0\alpha} &= -\frac{4}{c^3} \varphi^\alpha + O(c^{-5}); \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (2.51)$$

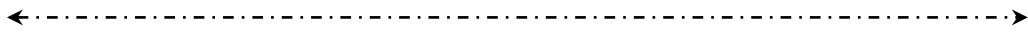
где $O(c^{-n})$ обозначают малые члены, величина которых пропорциональна c^{-n} ;

$$\varphi = \varphi_e + \Delta\varphi_m + \Delta\varphi_s + \Delta\varphi_i \left[\frac{M^2}{c^2} \right] \quad (2.52)$$

– скалярный гравитационный потенциал, равный сумме скалярного гравитационного потенциала Земли φ_e , а также скалярных потенциалов, вызванных влиянием массы Луны $\Delta\varphi_m$, Солнца $\Delta\varphi_s$ и других планет $\Delta\varphi_i$; скалярные потенциалы, в соответствии с принципом суперпозиции слабых полей, складываются;

$$\varphi_e^\alpha = -\frac{G}{2} \frac{[\overrightarrow{RS}]}{R^3} \left[\frac{M^3}{c^3} \right] \quad (2.53)$$

– векторный потенциал гравитационного поля вращающейся Земли; $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/\text{кг} \cdot \text{с}^2$ – гравитационная постоянная; \overrightarrow{S} – вектор углового момента Земли; \overrightarrow{R} – радиус-вектор рассматриваемой точки.



2.2.2. Основные характеристики гравитационного потенциала Земли

2.2.2.1. Скалярный потенциал гравитационного поля Земли

Потенциал ГПЗ φ_e наиболее полно описывается разложением по сферическим функциям [143]. Существует множество моделей ГПЗ, однако наиболее полной на сегодняшний день является модель EGM2008, содержащая 2159 гармоник в разложении потенциала [144].

Потенциал ГПЗ часто для удобства условно представляют в виде суммы нормальной φ_e^n и аномальной φ_e^{an} составляющих:

$$\varphi_e = \varphi_e^n + \varphi_e^{an}, \quad (2.54)$$

$$\varphi_e^n = \frac{\mu_e}{\rho} \left[1 - J_2 \left(\frac{R_e}{\rho} \right)^2 P_2(\sin \psi) \right] = \frac{\mu_e}{\rho} \left[1 - J_2 \left(\frac{R_e}{\rho} \right)^2 \left(\frac{3}{2} \sin^2 \psi - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (2.55)$$

– нормальная составляющая, которая включает нулевую и вторую зональную гармонику разложения; $J_2 = 1,0826 \cdot 10^{-3}$ – коэффициент второй зональной гармоники; $P_2(\sin \psi) = 1,5 \sin^2 \psi - 0,5$ – полином Лежандра второго порядка; ψ – геоцентрическая широта; $\mu_e = 3,986 \cdot 10^{14} \text{ м}^3/\text{с}^2$ – геоцентрическая гравитационная постоянная; $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ – геоцентрическое расстояние рассматриваемой точки; $R_e = 6,378 \cdot 10^6 \text{ м}$ – экваториальный радиус Земли (большая полуось референц-эллипсоида);

$$\begin{aligned} \varphi_e^{an} = & \frac{\mu_e}{\rho} \left[- \sum_{n=3}^{\infty} J_n \left(\frac{R_e}{\rho} \right)^n P_n(\sin \psi) + \right. \\ & \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left(\frac{R_e}{\rho} \right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \psi) \right] \end{aligned} \quad (2.56)$$

– аномальная составляющая поля, включающая зональные гармоники, начиная с третьей, а также секториальные и тессеральные гармоники разложения потенциала по сферическим функциям с коэффициентами C_{nm}, S_{nm} ; n, m – индексы, характеризующие степень и порядок членов ряда разложения; $P_{nm}(\sin \psi)$ – присоединенные полиномы Лежандра; λ – долгота рассматриваемой точки.

В ряде случаев [145] потенциал ГПЗ представляют в иной форме:

$$\varphi_e = \frac{\mu_e}{\rho} + T_e \left[\frac{M^2}{c^2} \right], \quad (2.57)$$

где первое слагаемое представляет собой потенциал Земли как идеального шара, второе слагаемое T_e получило название возмущающего потенциала и его выражают в виде разложения по сферическим функциям в виде:

$$T_e(\rho, \psi, \lambda) = \mu_e \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{R_e^n}{\rho^{n+1}} (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \psi), \quad (2.58)$$

где обозначения те же, что и в формуле (2.56).

Величина первого слагаемого в выражении для потенциала (2.57) для экваториальной точки поверхности Земли ($R_e = 6,378 \cdot 10^6$ м) достигает $6,23 \cdot 10^7$ м²/с². С ростом геоцентрической высоты потенциал уменьшается и для КА, находящегося на орбите высотой 300 км, он составляет $5,95 \cdot 10^7$ м²/с². Величина наиболее значимой второй зональной гармоники возмущающего потенциала (2.54) на 3 порядка меньше, величина других гармоник еще на 2–3 порядка меньше.

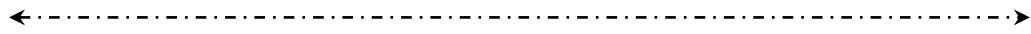
Принципы построения приборов, непосредственно измеряющих разность гравитационных потенциалов поля Земли, в настоящее время неизвестны. Определенные перспективы таких измерений связаны с использованием эффектов гравитационного замедления времени и гравитационного смещения частоты (см. раздел 11 данной книги).

2.2.2.2. Ускорение свободного падения

Второй важнейшей характеристикой ГПЗ является ускорение свободного падения (УСП), или ускорение силы тяжести, которое определяется как градиент потенциала:

$$\nabla \varphi_e = \vec{g}_u + \left(\vec{i} \frac{\partial T_e}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial T_e}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial T_e}{\partial z} \right), \quad (2.59)$$

где $\vec{g}_u = -\frac{\mu}{\rho^2} \vec{\rho}_0 = \vec{i}g_x + \vec{j}g_y + \vec{k}g_z$ – УСП Земли как шара; $\vec{\rho}_0$ – единичный вектор геоцентрической высоты; знак минус указывает на направление УСП к центру Земли; $g_f = -\frac{\mu}{\rho^3} f$ (здесь $f = x; y; z$) – составляющие УСП



по осям координат x ; y ; z ; оператор ∇ (набла) обозначает взятие производной по пространственным координатам. Второе слагаемое формулы (2.59) определяет аномалии силы тяжести ГПЗ.

Единицы измерения ускорение свободного падения: м/с^2 , Гал (1 Гал = 10^{-2} м/с^2), мГал, мкГал (1 мкГал = 10^{-8} м/с^2). На поверхности Земного шара $g_{ш} = -\frac{\mu_e}{R_e^2} \approx -9,8 \frac{\text{М}}{\text{с}^2} = -980 \text{ Гал}$, для КА, находящегося на орбите высотой 300 км, $g_{КА} \approx -8,9 \frac{\text{М}}{\text{с}^2} = -890 \text{ Гал}$. Соответственно, величина аномалий на 3 и более порядков меньше.

Приборы, измеряющие ускорение свободного падения (УСП) и его аномалии, называются гравиметрами.

2.2.2.3. Градиент гравитационного ускорения поля Земли (гравитационный градиент)

Повторное применение оператора ∇ к выражению для ускорения свободного падения (2.59) дает выражение для составляющих градиента гравитационного ускорения:

$$\begin{aligned} \text{grad } \vec{g} = \nabla(\nabla \varphi_e) = \\ = -\frac{\mu_e}{\rho^5} \begin{pmatrix} \rho^2 - 3x^2 & \rho^2 - 3xy & \rho^2 - 3xz \\ \rho^2 - 3yx & \rho^2 - 3y^2 & \rho^2 - 3yz \\ \rho^2 - 3zx & \rho^2 - 3zy & \rho^2 - 3z^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 T_e}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 T_e}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 T_e}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 T_e}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 T_e}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 T_e}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 T_e}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 T_e}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 T_e}{\partial x^2} \end{pmatrix} \left[\frac{1}{c^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Гравитационный градиент измеряется в Этвешах (Е); $1 \text{ Е} = 10^{-9} \text{ с}^{-2}$.

Вторые производные потенциала гравитационного поля Земли связаны уравнением Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (2.61)$$

Приборы, измеряющие градиент гравитационного поля, называют гравитационными градиентометрами, гравиградиентометрами, в зарубежной печати их иногда называют градиометрами.

2.2.2.4. Векторный потенциал ГПЗ

Вектор углового момента Земли, входящий в определение векторного потенциала (2.53), определяется известным выражением:

$$\vec{S} = \frac{2}{3} I \vec{\Omega}_e, \quad (2.62)$$

где $\vec{\Omega}_e$ – вектор угловой скорости Земли; I_e – момент инерции Земного шара радиусом R_e как твердого тела с массой M_e , определяемый формулой $I = \frac{2}{5} M_e R_e^2$.

В результате векторная форма потенциала приобретает вид:

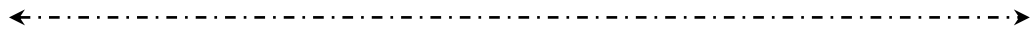
$$\varphi^\alpha = -\frac{2}{15} \frac{\mu_e R_e^2}{R^3} \left[\vec{R} \vec{\Omega}_e \right]^\alpha, \quad (2.63)$$

где $\mu_e = GM_e$ – геоцентрическая гравитационная постоянная. В силу малости составляющих метрического тензора здесь принимаем равенство контравариантных и ковариантных компонентов векторного потенциала. Учитывая далее, что $\vec{\Omega}_e = \vec{k} \Omega_z$, $\vec{R} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$, пространственно-временной компонент тензора (2.51) представим в векторном виде:

$$\begin{aligned} g_{0\alpha} &= K_g \left[\vec{R} \vec{\Omega}_z \right]_\alpha = g_\alpha, \\ \vec{g} &= \vec{i}g_1 + \vec{j}g_2 + \vec{k}g_3, \\ g_1 &= K_g y \Omega_z; \quad g_2 = -K_g x \Omega_z; \quad g_3 = 0, \\ K_g &= \frac{8}{15} \frac{\mu_e R_e^2}{c^3 R^3}. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Используя те же данные о параметрах Земли, векторный потенциал (2.53) можно привести к виду, удобному для оценок величины потенциала и составляющей тензора $g_{0\alpha}$:

$$\frac{1}{c^3} \varphi^\alpha = -\frac{2}{15} \frac{\mu_e \Omega_e}{c^3} \left(\frac{R_e}{R} \right)^2 \cos \psi, \quad (2.65)$$



где R, ψ – удаление от центра Земли и геоцентрическая широта рассматриваемой точки в околоземном пространстве. На поверхности Земли ($R = R_e$) на экваторе ($\psi = 0$) абсолютная величина векторного потенциала максимальна и составляет $3,9 \cdot 10^9 \text{ м}^3/\text{с}^3$. На основе (2.65) компонент $g_{0\alpha}$ исходного метрического тензора (2.51) принимает вид:

$$g_{0\alpha} = \frac{8}{15} \frac{\mu_e \Omega_e}{c^3} \left(\frac{R_e}{R} \right)^2 \cos \psi . \quad (2.66)$$

Полученное соотношение можно использовать для расчета векторного потенциала как для точек на поверхности Земли, так и для точек на орбитах спутников Земли. На поверхности Земли $g_{0\alpha} \approx 6 \cdot 10^{-16}$. С ростом геоцентрической высоты рассматриваемой точки величина этого компонента изменяется обратно пропорционально квадрату высоты.

2.2.3. Приливные потенциалы Луны и Солнца

Начало выбранной небесной невращающейся системы отсчета $O\{0,0,0\}$, находящееся в центре Земли, и исследуемая точка $P\{x_p, y_p, z_p\}$ в окрестности Земли (на ее поверхности или в околоземном космосе) одновременно находятся в гравитационном поле других небесных тел: Луны, Солнца и планет. При этом Земля и начало связанной с ней невращающейся системы свободно движется («падает») в гравитационном поле другого ближайшего небесного тела с центростремительным гравитационным ускорением, определяемым массой небесного тела и расстоянием до него.

При свободном падении, как на любом свободном спутнике, основная часть гравитационного потенциала, создаваемого небесным телом компенсируется, однако остается нескомпенсированная (дополнительная) часть, определяемая центральной симметрией поля небесного тела. Это так называемый приливообразующий, или *приливный потенциал*. Теория этого потенциала достаточно глубоко разработана в отечественной и зарубежной литературе [145, 146].

Следуя известным исследованиям [10, 145, 146], определим дополнительную, приливную, разность потенциалов между точкой P в околоземном пространстве и началом системы отсчета, вносимую гравитационными полями этих небесных тел, в виде разложения:

$$\delta\varphi_i = \frac{GM_i}{r_i} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r_i} \right)^n P_n(\cos z_i), \quad (2.67)$$

←----->

где $i = M, S, J$ – обозначения, соответственно, Луны, Солнца и ближайшей тяжелой планеты Юпитер; G – гравитационная постоянная; M_i – масса небесного тела; ρ – расстояние от центра Земли до исследуемой точки; z_i – зенитное расстояние рассматриваемой точки относительно направления на небесное тело; $P_n(\cos z_i)$ – полином Лежандра n -го порядка.

Приведенная формула справедлива для любых материальных точек в околоземном пространстве: наземных и космических в пределах геостационарной орбиты. Наибольший вклад в приливные явления вносит первый член разложения (2.67), однако при больших расстояниях от Земли до исследуемых точек и высоких требованиях к точности определения потенциалов необходимо учитывать и следующие члены этого разложения.

Для точек на поверхности Земли $\rho = R_e$, поэтому, учитывая лишь полином P_2 , формулу (2.67) приводим к виду:

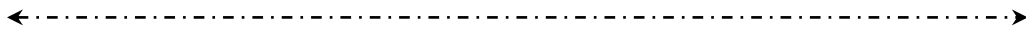
$$\delta\varphi_i = \frac{GM_i}{2r_i} \left(\frac{R_e}{r_i} \right)^2 (3\cos^2 z_i - 1). \quad (2.68)$$

Далее, учитывая, что $\cos^2 z = 0,5(1 + \cos 2z)$, эту формулу приводим к окончательному виду, пригодному для исследования влияния приливов на поверхности Земли:

$$\delta\varphi_i = D_i \left(\cos 2z_i - \frac{1}{3} \right), \quad (2.69)$$

где $D_i = 3GM_i R_e^2 / 4r_i^3$ – постоянная Дудсона, которая имеет различное значение для небесных тел. Так, для Луны $D_M = 2,6206 \text{ м}^2\text{с}^{-2}$; для Солнца $D_S = 1,2035 \text{ м}^2\text{с}^{-2}$ [145]. Максимальный диапазон изменения этих потенциалов будет при изменении угла z_i от 0° до 90° . При этом выражение в скобке изменяется от -1 до $+2$.

Величину приливного потенциала оценим по формуле (2.67) на основе исходных данных, приведенных в Приложении А. Для спутников ГЛОНАСС ($R = 2,55 \cdot 10^7 \text{ м}$) амплитуда приливного потенциала, создаваемого Луной и Солнцем, составляют соответственно $83 \text{ м}^2/\text{с}^2$ и $36 \text{ м}^2/\text{с}^2$. Для точек на поверхности Земли ($R = 6,378 \cdot 10^6 \text{ м}$) эти потенциалы в 16 раз меньше, а для космических аппаратов на геостационарной орбите ($R = 4,3 \cdot 10^7 \text{ м}$) эти величины возрастают в 45 раз.



2.2.4. Общая форма четырехмерного и трехмерного метрических тензоров для инерциальной системы отсчета GCRS (ICRS)

Пренебрегая в общем определении метрического тензора членами вида $O(c^{-n})$, метрический тензор (2.51) запишем в виде:

$$g_{00} = -\left(1 - \frac{2\varphi}{c^2} + \frac{2\varphi^2}{c^4}\right), g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right), \quad (2.70)$$

$$g_{0\alpha} = g_{\alpha}; \quad \vec{g} = \vec{i}g_1 + \vec{j}g_2; \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3.$$

где g_{α} определяется соотношением (2.64), суммарный скалярный потенциал φ определяется соотношением (2.52), потенциал поля Земли – соотношениями (2.56) или (2.57), приливные потенциалы – в форме (2.67). Развернутая форма метрического тензора (2.70) имеет вид:

$$g_{ik} = \begin{bmatrix} -\left(1 - \frac{2\varphi}{c^2} + \frac{2\varphi^2}{c^4}\right) & g_1 & g_2 & 0 \\ g_1 & \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right) & 0 & 0 \\ g_2 & 0 & \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right) \end{bmatrix}. \quad (2.71)$$

Компоненты соответствующего трехмерного метрического тензора найдем с помощью формулы (2.27). В результате имеем следующие выражения для ненулевых его компонентов:

$$\gamma_{11} = \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2} + g_1^2\right), \quad \gamma_{22} = \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2} + g_2^2\right), \quad \gamma_{33} = \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right), \quad \gamma_{12} = \gamma_{21} = g_1g_2, \quad (2.72)$$

или в развернутом виде:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2} + g_1^2\right) & g_1g_2 & 0 \\ g_1g_2 & \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2} + g_2^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right) \end{bmatrix}. \quad (2.73)$$

←----->

Вычисление определителя трехмерного метрического тензора дает следующий результат:

$$\gamma = 1 + \frac{6\varphi}{c^2} + \frac{4\varphi^2}{c^4} + O(c^{-5}). \quad (2.74)$$

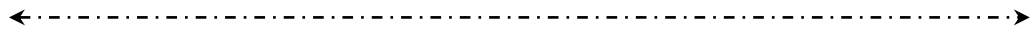
Соответственно определитель четырехмерного тензора составляет:

$$g = 1 + \frac{4\varphi}{c^2} + \frac{6\varphi^2}{c^4} + O(c^{-5}). \quad (2.75)$$

2.2.5. Упрощенные формы метрических тензоров для системы GCRS (ICRS)

Оценим величину составляющих метрического тензора (2.71). На поверхности Земли потенциал максимален и поэтому величина $\varphi/c^2 \approx 6,9 \cdot 10^{-10}$. Соответственно, $(\varphi/c^2)^2 \leq 4,8 \cdot 10^{-19}$. При вычислении параметров шкал времени и распространения радиоволн компонент тензора $g_{0\alpha}$ должен умножаться на дробь V/c , где $V \leq 7,9 \cdot 10^3$ м/с – скорость исследуемой точки в гравитационном поле Земли. Поскольку, согласно формуле (2.66), у поверхности Земли $g_{0\alpha} \leq 6 \cdot 10^{-16}$, то произведение $g_{0\alpha} V/c$ не превысит $2 \cdot 10^{-22}$ у Земли и 10^{-20} на геостационарной орбите.

Поэтому, ограничиваясь учетом лишь величин $\leq 10^{-18}$, для решения большинства практических задач в околоземном пространстве составляющими тензоров, содержащими $(\varphi/c^2)^2$ и $g_{0\alpha}$, без ущерба точности расчетов можно пренебречь. Обращаясь к оценкам размаха максимальной величины приливных потенциалов (от -1 до $+2$), выполненных выше для расстояний в пределах высоты орбит геостационарных спутников по формуле (2.67), находим, что для Луны $(\Delta\varphi_M/c^2)_{\max} \approx 8 \cdot 10^{-15}$, для Солнца $(\Delta\varphi_S/c^2)_{\max} \approx 3,4 \cdot 10^{-15}$. Вычисления этих величин для ближайших планет – Венеры и Юпитера при их максимальном сближении с Землей дают результат, соответственно, $0,3 \cdot 10^{-18}$ и $2,4 \cdot 10^{-20}$. Поэтому в конечной формуле для компонентов метрического тензора необходимо оставить лишь приливные потенциалы Луны и Солнца.



В результате упрощенная форма метрического тензора (2.70) в невращающейся системе отсчета приобретает вид:

$$g_{00} = -\left(1 - \frac{2\varphi}{c^2}\right), g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right), \quad (2.76)$$

$$g_{0\alpha} = 0, \varphi = \varphi_e + \Delta\varphi_M + \Delta\varphi_s,$$

или в развернутой форме:

$$g_{ik} = \begin{bmatrix} -(1 - \frac{2\varphi}{c^2}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 + \frac{2\varphi}{c^2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1 + \frac{2\varphi}{c^2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1 + \frac{2\varphi}{c^2}) \end{bmatrix}. \quad (2.77)$$

Соответственно изменится и трехмерный метрический тензор:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 + \frac{2\varphi}{c^2}, & \alpha = \beta, \\ 0, & \alpha \neq \beta, \end{cases} \quad (2.78)$$

или в развернутой форме:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} (1 + \frac{2\varphi}{c^2}) & 0 & 0 \\ 0 & (1 + \frac{2\varphi}{c^2}) & 0 \\ 0 & 0 & (1 + \frac{2\varphi}{c^2}) \end{bmatrix}. \quad (2.79)$$

Изменяются также значения определителей:

$$\gamma = 1 + \frac{6\varphi}{c^2} + O(c^{-4}), \quad (2.80)$$

$$g = 1 + \frac{4\varphi}{c^2} + O(c^{-4}). \quad (2.81)$$

←----->

Одной из особенностей рассмотренной геоцентрической небесной системы отсчета GCRS является наличие в ней движущейся преломляющей среды – атмосферы, скорость которой в районе экватора достигает 465 м/с. Это обстоятельство важно при релятивистском рассмотрении параметров распространения электромагнитных волн в космических радиопереходах навигации, геодезии, связи и т.д. Второй особенностью системы GCRS является подвижность всех рассматриваемых материальных точек в системе, в том числе наземных, поскольку эти точки в системе движутся с линейной скоростью, определяемой вращением Земли.

2.3. Метрический тензор околоземного пространства-времени в системе отсчета, вращающейся вместе с Землей

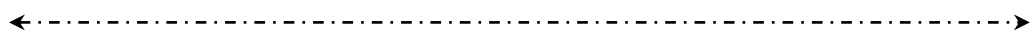
2.3.1. Общая характеристика систем отсчета, связанных с неравномерно вращающейся Землей

В соответствии с Резолюциями Международного Астрономического Союза (IAU) и Международного Союза по Геодезии и Геофизике (IUGG) для обозначения общего класса систем отсчета, вращающихся вместе с Землей, с 2007 г. (Резолюция № 2) вместо прежнего названия Условная земная система отсчета CTRS (Conventional Terrestrial Reference System) введено новое название: Геоцентрическая земная система отсчета GTRS (Geocentric Terrestrial Reference System). Иногда в научных публикациях такую систему называют ECEF (Earth-Centered, Earth-Fixed) – Геоцентрическая связанная с Землей система отсчета.

В практике космической навигации и геодезии в качестве наиболее важной из реализаций систем GTRS широко используется Международная земная система отсчета *ITRS (International Terrestrial Reference System)*, жестко связанная с вращающейся Землей [10].

Система ITRS принята IAU в Вене в 1991 г. и одобрена IUGG в 2007 г. (Резолюция № 2). Она представляется как предпочтительная GTRS для научных и технических приложений и рекомендуется для позиционирования на Земле. Ответственность за реализацию, использование и продвижение системы ITRS возложена на Международную службу вращения Земли и опорных систем отсчета *IERS (International Earth Rotational Service)* [147, 148].

Эта система удовлетворяет следующим условиям [95]:



1. Система ITRS – геоцентрическая с началом в центре масс Земли, с учетом океанов и атмосферы.

2. Единица длины – метр (СИ). Масштаб согласован с Геоцентрическим координатным временем (t_{TCG} – Geocentric Coordinate Time, см разд. 3).

3. Ориентация осей системы определяется из наблюдений IERS. Международным бюро времени БИВ (Bureau International del'Heure, *фр.*) она представлена на эпоху 1984,0. Ось OZ направлена по оси вращения Земли в Опорный Полюс IERS (IRP – IERS Reference Pole). Ось OX располагается в плоскости Опорного меридиана IERS (IRM – IERS Reference Meridian), а ось OY дополняет систему до правой. Опорный меридиан ITRS проходит примерно в 102 м к востоку от оси Гринвичской обсерватории ($\sim 5,3''$ по углу).

Положение точки в пространстве в ITRS определяется тремя координатами X, Y, Z . При этом центр масс Земли с учетом океанов и атмосферы имеет координаты $\{0, 0, 0\}$.

Наземная реализация рассмотренной системы ITRS представляется в виде декартовых координат X, Y, Z и скоростей V_x, V_y, V_z совокупности реперных точек, входящих в сеть наземных станций IERS, и носит название Международной опорной системы отсчета ITRF (*International Terrestrial Reference Frame*).

В настоящее время данная система в версии ITRF2014 включает около 900 точек, жестко связанных с корой Земли [10]. Шкалой времени системы служит шкала земного времени ТТ (Terrestrial Time, см. раздел 3). Для непрерывного уточнения координат точек, входящих в ITRF, используются данные, в основном, четырех мировых измерительных сетей: сеть радиоинтерферометров со сверхдлинными базами (РСДБ), сеть станций спутниковой лазерной локации, сеть приемников ГНСС, а также наземная сеть радиомаяков доплеровских станций DORIS. Данные от измерительных станций в виде временных рядов обрабатываются вычислительным Центром ITRS-PS по формированию Международной земной системы отсчета ITRS при IERS.

Второй системой, которая реализует геоцентрическую земную систему отсчета GTRS, является Мировая геодезическая система WGS-84 (World Geodetic System) [150, 151], которая, как и ITRS, широко используется в навигации, геодезии и картографии. Система полностью совместима с системой ITRS, поддерживается Национальным агентством геопространственной разведки США, с 1987 года решением Министерства обороны США принята в качестве опорной системы отсчета для GPS.

←----->

Геодезическая система координат основана на эллипсоиде вращения, который получается вращением вокруг оси OZ эллипса с экваториальным радиусом $R_e = 6378137,0$ м и параметром сжатия $f = 1/298,257223563$. Средняя угловая скорость и геоцентрическая гравитационная постоянная имеют значения, соответственно:

$$\Omega_e = 7,292115 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}; \mu_e = 3,986004418 \cdot 10^{14} \text{ м}^3 \text{ с}^{-2}.$$

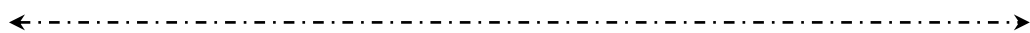
Последняя версия WGS-84 полностью соответствует системе ITRF2008.

В России в качестве системы, реализующей геоцентрическую земную систему отсчета GTRS, используется Система геодезических параметров «Параметры Земли ПЗ-90.11» [152], которая является альтернативой системе WGS-84. Переход к этой системе был выполнен с 15.00 31 декабря 2013 г. на основе Постановления Правительства РФ от 28 декабря 2012 г. №1463 «О единых государственных системах координат». Система предназначена для использования в целях геодезического обеспечения орбитальных полетов и решения навигационных задач. Система ПЗ-90.11 основана на системе ITRS. В качестве отсчетной поверхности в ПЗ-90.11 принят общеземной эллипсоид со следующими параметрами:

$$R_e = 6378136,0 \text{ м}; \quad f = 1/298,25784.$$

Значения угловой скорости и геоцентрической гравитационной постоянной аналогичны соответствующим параметрам в системе WGS-84.

Важнейшая особенность любой системы отсчета, вращающейся вместе с Землей, заключается в том, что в силу принципа эквивалентности в общей теории относительности в этой системе в околоземном пространстве появляется наведенное вращением дополнительное гравитационное поле (поле сил инерции), действие которого на метрические свойства эталонов длины, времени, частоты аналогично действию истинного гравитационного поля Земли. В этой системе метрические свойства пространства-времени должны изменяться от суммарного воздействия ГПЗ, гравитационных полей ближайших небесных тел, а также наведенного вращением поля сил инерции. Суммарное воздействие этих факторов должно учитываться в фундаментальном метрическом тензоре геоцентрических вращающихся земных систем.



В силу универсальности системы ITRS вычисления метрических свойств геоцентрических земных систем далее свяжем именно с этой системой, хотя для других перечисленных выше систем (WGS-84 и ПЗ-90.11) вычисления дадут аналогичный формальный результат.

Чтобы найти компоненты этого тензора, будем использовать в качестве исходного метрический тензор околоземного пространства-времени в геоцентрической невращающейся системе $GCRS$ ($ICRS$) в форме (2.76) – (2.77). Соответствующее выражение для квадрата пространственно-временного интервала (2.17) имеет вид:

$$dS^2 = -\left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right)c^2 dt^2 + \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (2.82)$$

где, согласно (2.76), $\varphi = \varphi_e + \Delta\varphi_M + \Delta\varphi_S$. Приливные потенциалы других небесных тел (Юпитера, Венеры и др.), в силу их малости, не учитываются. Данная форма интервала, как установлено выше, учитывает гравитационные воздействия с погрешностью на уровне $\delta\varphi/c^2 \leq 10^{-18}$.

Для перехода от системы $GCRS$ к системе отсчета ITRS, равномерно вращающейся в плоскости XOY с угловой скоростью Ω_z , в плоскости XOZ с угловой скоростью Ω_y , в плоскости YOZ с угловой скоростью Ω_x последовательно воспользуемся преобразованиями координат вида [267]:

$$M_z(\alpha_z) = \begin{pmatrix} \cos\alpha_z & -\sin\alpha_z & 0 \\ \sin\alpha_z & \cos\alpha_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_z = \Omega_z t, \quad (2.83)$$

$$M_y(\alpha_y) = \begin{pmatrix} \cos\alpha_y & 0 & \sin\alpha_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha_y & 0 & \cos\alpha_y \end{pmatrix}, \quad \alpha_y = \Omega_y t, \quad (2.84)$$

$$M_x(\alpha_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_x & -\sin\alpha_x \\ 0 & \sin\alpha_x & \cos\alpha_x \end{pmatrix}, \quad \alpha_x = \Omega_x t. \quad (2.85)$$

Чтобы выяснить, насколько отличаются угловые скорости вращения системы отсчета ITRS по всем трем координатным осям, необходимо установить характеристики вращения Земли как твердого тела.

2.3.2. Характеристики неравномерности вращения Земли

Вектор угловой скорости неравномерно вращающейся Земли Ω_3 в небесной геоцентрической земной системе координат представим в виде [153]:

$$\Omega = i\Omega_x + j\Omega_y + k\Omega_z, \quad (2.86)$$

где $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ – проекции скорости на координатные оси, причем

$$\Omega_z = \Omega_{z0} + \Delta\Omega_z, \quad (2.87)$$

где Ω_{z0} – номинальное (среднее) значение модуля угловой скорости Земли; $\Delta\Omega_z$ – отклонение угловой скорости от номинального значения, характеризующее неравномерность суточного вращения Земли.

Среднее значение угловой скорости вращения Земли вокруг оси OZ небесной системы ICRS принимается Международной службой вращения Земли и опорных систем отсчета IERS (International Earth Rotation and Reference Systems Service) и составляет $\Omega_{z0} = 7,292115 \cdot 10^{-5} \text{ c}^{-1}$ [148, 149].

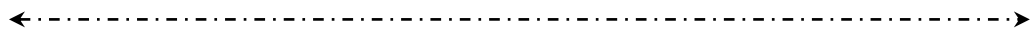
Данные о текущих значениях угловой скорости вращения Земли регулярно вычисляются по результатам инструментальных наблюдений, выполненных Государственной службой времени, частоты и определения параметров вращения Земли (ГСВЧ) России и национальными лабораториями других государств. Они публикуются в специальных бюллетенях. В целом, вариации модуля угловой скорости содержат линейную по времени часть, а также годичную и полугодичную волны. Например, в течение 2013 г. значения относительного отклонения угловой скорости Земли $\Delta\Omega_z / \Omega_0$ находились в пределах $(-187 \div -30) \cdot 10^{-10} \text{ c}^{-1}$. Например, на 1 июля 2014 г. это значение составило $-40 \cdot 10^{-10}$ [154].

Помимо указанной вариации частоты, неравномерность вращения Земли относительно небесной системы координат ICRS характеризуется прецессией и нутацией оси вращения Земли, а также конусообразующим движением линии полюсов Земли вокруг её оси вращения [10, 147].

Прецессия оси вращения имеет период около 26 тысяч лет и величину $\mathcal{G}_{PP} \approx 50''/\text{год}$ ($2,5 \cdot 10^{-4}$ рад/год). Составляющие угловой скорости прецессии по осям геоцентрической небесной системы координат равны [147]:

$$\begin{aligned} \Omega_x^{PP} &= 0, \quad \Omega_y^{PP} \approx -\mathcal{G}_{PP} \sin \varepsilon \approx -3,2 \cdot 10^{-12} \text{ c}^{-1}, \\ \Omega_z^{PP} &\approx \mathcal{G}_{PP} \cos \varepsilon \approx 6,3 \cdot 10^{-12} \text{ c}^{-1}, \end{aligned} \quad (2.88)$$

где $\varepsilon \approx 23,4^\circ$ – средний наклон эклиптики к экватору.



Нутация имеет период 18,6 года и амплитуду угла отклонения от оси OZ $\vartheta_H \approx 10''$ ($\sim 5 \cdot 10^{-5}$ рад) [147]. Ввиду малости данного угла текущие нутационные проекции вектора угловой скорости Земли на оси геоцентрической системы ICRS определяются соотношениями:

$$\begin{aligned}\Omega_x^H &\approx \Omega_0 \sin \vartheta_H \cos \Phi_H \approx \Omega_0 \vartheta_H \cos \Phi_H, \\ \Omega_y^H &\approx \Omega_0 \sin \vartheta_H \sin \Phi_H \approx \Omega_0 \vartheta_H \sin \Phi_H, \quad \Omega_z^H \approx 0,\end{aligned}\quad (2.89)$$

где $\Phi_H = 2\pi\tau_0/T_H - \varphi_H$ – полная фаза нутации; T_H, φ_H – период и начальная фаза нутации. Отсюда следует, что амплитуда составляющих угловой скорости нутации по осям OX, OY не превышает $(\Omega_x^H, \Omega_y^H)_{\max} \approx 3,7 \cdot 10^{-9} \text{ с}^{-1}$.

Сложное коническое движение линии полюсов относительно вращающейся Земли складывается из колебаний с периодами примерно один год и 430 суток. Угловая амплитуда движения составляет $\vartheta_{II} \approx 0'',5$ ($\sim 2,5 \cdot 10^{-6}$ рад) [10]. Пространственная амплитуда качания полюсов Земли при этом составляет 15–16 м. По аналогии с нутацией, текущие «полюсные» проекции вектора угловой скорости Земли на оси геоцентрической системы координат составляют:

$$\Omega_x^{II} \approx \Omega_0 \vartheta_{II} \cos \Phi_{II}, \quad \Omega_y^{II} \approx \Omega_0 \vartheta_{II} \sin \Phi_{II}, \quad \Omega_z^{II} \approx 0,\quad (2.90)$$

где $\Phi_{II} = 2\pi\tau_0/T_{II} - \varphi_{II}$ – полная фаза колебания полюса; T_{II}, φ_{II} – период и начальная фаза колебания полюса. Амплитуда угловых скоростей по осям вследствие «качания» полюсов достигает $1,8 \cdot 10^{-10} \text{ с}^{-1}$.

Составляющие углового ускорения $\dot{\Omega}_{x,y,z}$ неравномерно вращающейся Земли по всем осям выбранной системы координат вычисляются как производные по времени от соответствующих составляющих угловой скорости. По результатам наблюдений за угловой скоростью Земли [154], их амплитуда не превышает $10^{-18} - 10^{-19} \text{ с}^{-2}$, что на суточном интервале дает приращение угловой скорости на $10^{-13} - 10^{-14} \text{ с}^{-1}$.

Учитывая, что все характеристики неравномерности вращения Земли весьма малы и независимы, их можно суммировать линейно. На этом основании из формул (2.88) - (2.90) получаем следующие выражения для составляющих угловой скорости Земли, входящих в формулу (2.86):

$$\begin{aligned}\Omega_x &= \Omega_x^H + \Omega_x^{II}, & \Omega_y &= \Omega_y^{PP} + \Omega_y^H + \Omega_y^{II}, \\ \Omega_z &= \Omega_0 + \Delta\Omega_z + \Omega_z^{PP}.\end{aligned}\quad (2.91)$$

←----->

**2.3.3. Метрический тензор в ITRS
с учетом неравномерности вращения Земли**

Таким образом, составляющие угловых скоростей Земли по осям ОХ, ОУ существенно меньше основной составляющей – по оси ОZ, причем различие достигает нескольких порядков: $\frac{\Omega_x}{\Omega_z}, \frac{\Omega_y}{\Omega_z} = 10^{-5} \div 10^{-7}$. В этой связи при выводе составляющих метрического тензора следует удерживать лишь члены вида Ω_{xyz}/c , а членами, содержащими произведения малых угловых скоростей и их квадраты, можно пренебречь. Оценка показала, что величина отброшенных членов не превысит 10^{-18} .

Учитывая результаты предыдущего анализа, можно записать, что $\Omega_x t, \Omega_y t \ll \Omega_z t$. Поэтому в соответствующих матрицах преобразования координат (2.83)–(2.85) можно записать: $\sin \Omega_{x,y} t \approx \Omega_{x,y} t$; $\cos \Omega_{x,y} t \approx 1$. Преобразования координат с учетом этого замечания имеют вид:

1) при повороте вокруг оси ОZ :

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \Omega_z t - y \sin \Omega_z t, \\ y' &= x \sin \Omega_z t + y \cos \Omega_z t, \\ z' &= z, \\ t' &= t. \end{aligned} \tag{2.92}$$

Вычисляя дифференциалы этих координат

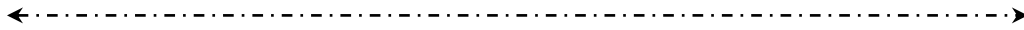
$$\begin{aligned} dx' &= dx \cos \Omega_z t - dy \sin \Omega_z t - x \Omega_z dt \sin \Omega_z t - y \Omega_z dt \cos \Omega_z t, \\ dy' &= dx \sin \Omega_z t + dy \cos \Omega_z t + x \Omega_z dt \cos \Omega_z t - y \Omega_z dt \sin \Omega_z t, \end{aligned}$$

возводя их в квадрат и подставляя в (2.82), получаем:

$$\begin{aligned} dS^2 &= -Bc^2 dt^2 + \frac{\Omega_z^2}{c^2} D(x^2 + y^2) c^2 dt^2 + D(dx^2 + dy^2 + dz^2) + \\ &+ 2D \frac{\Omega_z x}{c} dy c dt - 2D \frac{\Omega_z y}{c} dx c dt, \end{aligned} \tag{2.93}$$

где $B = 1 - \frac{2\varphi}{c^2}$; $D = \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right)$;

2) преобразования при повороте вокруг оси ОУ :



$$\begin{aligned} z' &= z \cos \Omega_y t - x \sin \Omega_y t \approx z - x \Omega_y t, \\ x' &= z \sin \Omega_y t + x \cos \Omega_y t \approx z \Omega_y t + x; \end{aligned} \quad (2.94)$$

3) преобразования при повороте вокруг оси OX :

$$\begin{aligned} y' &= y \cos \Omega_x t - z \sin \Omega_x t = y - z \Omega_x t, \\ z' &= y \sin \Omega_x t + z \cos \Omega_x t = y \Omega_x t + z. \end{aligned} \quad (2.95)$$

Последовательно вычисляя дифференциалы и подставляя их в полученное ранее выражение для dS^2 окончательно получаем:

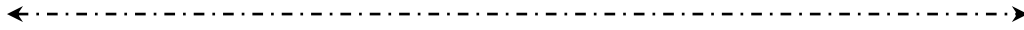
$$\begin{aligned} dS^2 &= -Bc^2 dt^2 + \frac{\Omega_z^2}{c^2} D(x^2 + y^2) c^2 dt^2 + \\ &+ D(dx^2 + dy^2 + dz^2) + 2D\left(\frac{\Omega_y z}{c} - \frac{\Omega_z y}{c}\right) dx(cdt) + \\ &+ 2D\left(\frac{\Omega_z x}{c} - \frac{\Omega_x z}{c}\right) dy(cdt) + 2D\left(\frac{\Omega_x y}{c} - \frac{\Omega_y x}{c}\right) dz(cdt). \end{aligned} \quad (2.96)$$

Отсюда находим компоненты искомого фундаментального метрического тензора системы ITRS с учетом неравномерности вращения Земли и членов, превышающих 10^{-18} :

$$\left. \begin{aligned} g_{00} &= -\left(1 - \frac{2\varphi}{c^2} - G_\alpha G^\alpha\right), g_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 + \frac{2\varphi}{c^2}, & \alpha = \beta, \\ 0, & \alpha \neq \beta, \end{cases} \\ g_{0\alpha} &= G_\alpha = \frac{[\vec{\Omega} \vec{R}]}{c} \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right), G_1 = \frac{\Omega_y z}{c} - \frac{\Omega_z y}{c} \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right), \\ G_2 &= \frac{\Omega_z x}{c} \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right) - \frac{\Omega_x z}{c}, G_3 = \frac{1}{c} (\Omega_x y - \Omega_y x), \end{aligned} \right\} \quad (2.97)$$

где потенциал истинного гравитационного поля φ определяется, в соответствии с (2.52), суммой потенциалов полей Земли, Луны и Солнца (потенциалами других небесных тел пренебрегаем):

$$\varphi = \varphi_e + \varphi_M + \varphi_S. \quad (2.97a)$$



Развернутая форма этого тензора имеет вид:

$$g_{ik} = \begin{bmatrix} -(1 - \frac{2\varphi}{c^2} - G^2) & G_1 & G_2 & G_3 \\ G_1 & (1 + \frac{2\varphi}{c^2}) & 0 & 0 \\ G_2 & 0 & (1 + \frac{2\varphi}{c^2}) & 0 \\ G_3 & 0 & 0 & (1 + \frac{2\varphi}{c^2}) \end{bmatrix}. \quad (2.98)$$

Трехмерный метрический тензор системы ITRS, определяемый по формуле (2.27) на основе компонентов фундаментального метрического тензора (2.98), имеет следующие ненулевые компоненты:

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= (1 + \frac{2\varphi}{c^2} + G_1^2), \quad \gamma_{22} = (1 + \frac{2\varphi}{c^2} + G_2^2), \\ \gamma_{33} &= (1 + \frac{2\varphi}{c^2}), \quad \gamma_{12} = \gamma_{21} = G_1 G_2. \end{aligned} \quad (2.99)$$

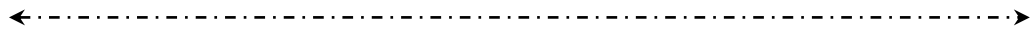
Соответствующая развернутая форма этого тензора имеет вид:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} (1 + \frac{2\varphi}{c^2} + G_1^2) & G_1 G_2 & 0 \\ G_1 G_2 & (1 + \frac{2\varphi}{c^2} + G_2^2) & 0 \\ 0 & 0 & (1 + \frac{2\varphi}{c^2}) \end{bmatrix}. \quad (2.100)$$

Определители четырехмерного и трехмерного метрических тензоров системы ITRS, вычисляемые на основе метрических тензоров (2.99) и (2.101), имеют следующие значения:

$$g = 1 + \frac{4\varphi}{c^2} + O(c^{-4}), \quad (2.101)$$

$$\gamma = 1 + \frac{6\varphi}{c^2} + G^2 + O(c^{-4}). \quad (2.102)$$



Компоненты контравариантного фундаментального метрического тензора g^{ik} находятся из соотношения $g_{ik}g^{kl} = \delta_i^l$. При этом составляются 16 линейных уравнений ($i \times l = 16$) с известными компонентами g_{ik} из (2.97). В каждом из этих уравнений производится суммирование по $k = 0, 1, 2, 3$. В результате решения системы этих уравнений находятся компоненты искомого тензора. Начальный компонент g^{00} находится из соотношения (2.37) с погрешностью $O(c^{-4})$. В результате искомые ненулевые компоненты контравариантного метрического 4-тензора имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} g^{00} &= -\left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right), g^{11} = 1 - \frac{2\varphi}{c^2} - (G^1)^2, \\ g^{22} &= 1 - \frac{2\varphi}{c^2} - (G^2)^2, g^{33} = 1 - \frac{2\varphi}{c^2}, \\ g^{0\alpha} &= G^\alpha = \frac{[\vec{\Omega}\vec{R}]^\alpha}{c} \left(1 - \frac{2\varphi}{c^2}\right), G^1 = \frac{\Omega_y z}{c} - \frac{\Omega_z y}{c} \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right), \\ G^2 &= \frac{\Omega_z x}{c} \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right) - \frac{\Omega_x z}{c}, G^3 = \frac{1}{c}(\Omega_x y - \Omega_y x), \end{aligned} \right\} \quad (2.103)$$

а сам тензор принимает следующую развернутую форму:

$$g^{ik} = \begin{bmatrix} -\left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right) & G^1 & G^2 & 0 \\ G^1 & 1 - \frac{2\varphi}{c^2} - (G^1)^2 & -G^1 G^2 & 0 \\ G^2 & -G^1 G^2 & 1 - \frac{2\varphi}{c^2} - (G^2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(1 - \frac{2\varphi}{c^2}\right) \end{bmatrix}. \quad (2.104)$$

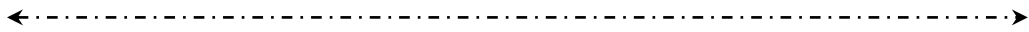
Для решения большинства практических задач следует использовать земную вращающуюся систему отсчета ITRS без учета характеристик неравномерности Земли. Поэтому для упрощения описания метрических свойств этой системы необходимо пренебречь малыми угловыми скоростями $\Omega_x, \Omega_y, \Delta\Omega_z$ в формулах (2.86)–(2.87), а также в выражениях для компонентов метрических тензоров (2.97)–(2.104).

В заключение следует подчеркнуть две практические особенности рассмотренной системы ITRS. Во-первых, в этой системе все наземные точки неподвижны, что облегчает расчет частотных и временных релятивистских эффектов в стационарных и мобильных стандартах частоты и времени. Во-вторых, в этой системе атмосфера неподвижна, что облегчает построение оптической модели гравитационного поля и упрощает расчет релятивистских эффектов при распространении электромагнитных волн.

2.4. Метрический тензор околоземного пространства-времени во вращающейся орбитальной системе отсчета

С развитием спутниковых навигационных систем ГЛОНАСС, GPS, GALILEO на средних высотах созданы орбитальные структуры, в которых в одной орбитальной плоскости находятся до 8 навигационных КА. Поскольку в инерциальной геоцентрической системе координат они обладают очень близкими высотами, а также близкими по величине и направлению векторами скорости, то взаимное расстояние между ними изменяется очень слабо. Взаимные скорости, по сравнению с орбитальными, также на 2–3 порядка меньше. На борту навигационных КА размещаются высокостабильные стандарты частоты и времени, требующие регулярной синхронизации с использованием наземных станций. Поскольку это по многим причинам затруднительно (влияние атмосферы на точность синхронизации, необходимость глобальной сети наземных станций и др.), в последние годы развивается идея высокоточной синхронизации ГЛОНАСС через взаимную синхронизацию стандартов соседних спутников – по орбитальному кольцу навигационных КА – с помощью прецизионных лазерных измерительных средств («лазерный ГЛОНАСС») [155]. По сравнению с наземным вариантом синхронизации в предлагаемом варианте существенно снижаются погрешности, вызванные влиянием орбитальных скоростей стандартов относительно наземных станций.

Другим примером КА, тандемно движущихся по одной орбите, является пара геодезических спутников GRACE [112], которые предназначены для решения задачи глобального уточнения параметров гравитационного поля Земли. Относительные скорости движения КА, в силу одинаковых орбит, очень малы. Измеряемым параметром в этом проекте является изменение взаимного расстояния между спутниками, которое в настоящее время определяется с ошибкой в единицы микрометров. На спутниках GRACE проведены успешные релятивистские эксперименты с целью повышения



точности взаимной синхронизации бортовых стандартов времени. В перспективном проекте GRACE-FO погрешность измерения взаимного расстояния предполагается снизить примерно на 2 порядка – до 20 нм.

Наконец, главный эталон времени может располагаться на борту КА, находящемся на круговой орбите. При этом поведение вторичных эталонов, находящихся на Земле и на других орбитах, целесообразно рассматривать в орбитальной системе отсчета, связанной с КА – носителем главного эталона.

Взаимные радиотехнические и оптические измерения в системах эталонов времени также целесообразно рассматривать в орбитальной системе отсчета. Центр такой орбитальной системы отсчета размещается в центре масс Земли, плоскость орбиты совмещена с плоскостью XOY , ось OX жёстко связана с главным КА системы, а ось OZ перпендикулярна плоскости орбиты и совпадает с вектором кинетического момента.

В такой системе, как и в системе ITRS, существуют несколько гравитационных полей: истинное гравитационное поле Земли, поля соседних небесных тел, а также поле центробежных сил инерции, вызванных вращением системы. Следует подчеркнуть, что в ГЛОНАСС действие полей сил инерции будет более значительным, чем в ITRS, поскольку угловая скорость орбитальной системы выше, а межспутниковые расстояния достигают 20 тыс. км. В низкоорбитальных системах межспутниковые расстояния меньше, однако ожидаемая угловая скорость примерно на порядок выше. Поэтому метрические свойства такой системы будут существенно отличаться от метрики ITRS.

Угловая скорость КА, находящегося на кеплеровской орбите, и соответственно, угловая скорость рассматриваемой системы изменяется по закону[156]:

$$\Omega_{orb} = \sqrt{\frac{\mu_e}{p^3}}(1 + e \cos \vartheta)^2, \quad (2.105)$$

где p – фокальный параметр, e – эксцентриситет орбиты, $\vartheta(t)$ – истинная аномалия, как функция времени.

Для орбит с незначительным эксцентриситетом ($e \ll 1$) это соотношение существенно упрощается:

$$\Omega_{orb} \approx \sqrt{\frac{\mu_e}{p^3}}(1 + 2e \cos \vartheta). \quad (2.106)$$

Оценку средних значений этого параметра проведём при $e = 0,01$ для низких орбит ($p = 7 \cdot 10^6$ м) и средневысотных орбит ГЛОНАСС ($p = 25,5 \cdot 10^6$ м). В результате имеем: для низких орбит $\Omega_{орб} = 1,08 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$, для средневысотных орбит $\Omega_{орб} = 1,56 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$.

Четырёхмерный метрический тензор в орбитальной системе отсчета с угловой скоростью $\Omega_{орб}$ имеет такие же компоненты, как и соответствующий тензор системы ITRS вида (2.97):

$$\left. \begin{aligned} g_{00} &= -\left(1 - \frac{2\varphi}{c^2} - G_\alpha G^\alpha\right), g_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 + \frac{2\varphi}{c^2}, & \alpha = \beta, \\ 0, & \alpha \neq \beta, \end{cases} \\ g_{0\alpha} &= G_\alpha = \frac{[\bar{\Omega R}]_\alpha}{c} \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right), G_1 = -\frac{\Omega_{орб} y}{c} \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right), \\ G_2 &= \frac{\Omega_{орб} x}{c} \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right), G_3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.107)$$

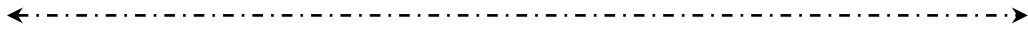
Вместе с тем, здесь мы пока не касаемся вопроса неравномерности вращения системы с оценкой величины векторов $(\Omega_x, \Omega_y)_{орб}$.

Геометрической особенностью орбитальной системы отсчета является то, что скорость атмосферы Земли в ней определяется разностным вектором:

$$\bar{V}_a = [\bar{\Omega}_{орб} \bar{R}_a] - [\bar{\Omega}_e \bar{R}_a], \quad (2.108)$$

где \bar{R}_a – радиус-вектор рассматриваемой точки атмосферы.

Поэтому и для низковысотных, и для средневысотных орбит атмосфера имеет очень высокую скорость, практически равную орбитальной, поскольку второе слагаемое в последнем выражении существенно меньше первого. Поэтому эффекты, связанные с распространением радиоволн и оптических лучей, в данной системе существенно выше, чем в инерциальной геоцентрической системе GCRS (ITRS). Исключение составляет лишь геостационарная орбита, для которой $\Omega_{орб} = \Omega_e$, и поэтому $V_a = 0$. Однако в этом случае мы приходим к уже рассмотренной выше земной системе ITRS.



Другая особенность орбитальной системы состоит в том, что при ненулевом эксцентриситете она обладает угловым ускорением, которое определяется теми же кинематическими орбитальными параметрами в виде:

$$\dot{\Omega}_{orb} = -\frac{2\mu_e}{p^3} e \sin \vartheta (1 + e \cos \vartheta)^3. \quad (2.109)$$

При достаточно малом эксцентриситете ($e \leq 0,01$), характерном для космических навигационных и геодезических систем, эта формула упрощается:

$$\dot{\Omega}_{orb} \approx \frac{2\mu_e}{p^3} e \sin \vartheta. \quad (2.110)$$

Оценка амплитуды углового орбитального ускорения для низкой орбиты ($p = 7 \cdot 10^6$ м) и для орбиты ГЛОНАСС ($p = 25,5 \cdot 10^6$ м) дает результат, соответственно: $\dot{\Omega}_{orb} = 2,3 \cdot 10^{-8} \text{ с}^{-2}$; $\dot{\Omega}_{orb} = 4,8 \cdot 10^{-10} \text{ с}^{-2}$.

Как уже отмечалось, во вращающейся геоцентрической системе, кроме истинного гравитационного поля Земли и других небесных тел, существует наведенное вращением системы поле центробежных сил. Действие сил гравитации и центробежных сил, в силу базового принципа эквивалентности теории относительности, неразличимо.

Угловое ускорение системы отсчета создает еще один тип гравитационного поля – вихревое концентрическое поле сил инерции. Согласно принципу эквивалентности, это равносильно концентрическому полю сил с гравитационным ускорением $a_{\odot} = \dot{\Omega}R$ и, соответственно, гравитационным потенциалом

$$d\varphi_{\odot} = a_{\odot} dl = \dot{\Omega}R_{\odot} dl, \quad (2.111)$$

где R_{\odot} – радиус вращения; dl – элемент длины концентрической окружности, вдоль которой направлены гравитационные силы.

На длине окружности $l = 2\pi R_{\odot}$ наведенный ускоренным вращением дополнительный концентрический гравитационный потенциал составляет:

$$\Delta\varphi_{\odot} = 2\pi\dot{\Omega}R_{\odot}^2, \left[\frac{M^2}{c^2} \right]. \quad (2.112)$$

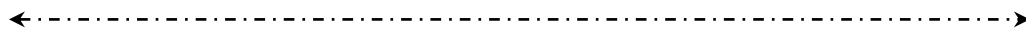
←----->

На половине длины орбиты величина этого потенциала при высоте орбиты $p = 7 \cdot 10^6$ м составляет около $3 \cdot 10^6$ м²/с², при высоте орбиты $p = 25,5 \cdot 10^6$ м – около 10^6 м²/с². Это довольно значительные потенциалы, которые могут иметь практическое значение.

Малое угловое ускорение является характеристикой слабо переменного гравитационного поля, возникающего в орбитальной системе отсчета. Формально угловое ускорение в тензоре (2.107) можно ввести через добавку в пространственно-временной компонент метрического тензора, которую выразим в виде:

$$\Delta g_{0\alpha} = \Delta G_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{[\vec{\Omega R}]_{\alpha}}{c} = \frac{\partial G_{\alpha}}{\partial t} dt = \dot{G}_{\alpha} dt. \quad (2.113)$$

Это допустимо лишь в том случае, когда прибавка в скорости элементов системы за счет углового ускорения $a_{\circ} = \dot{\Omega}R$ за время распространения радиосигнала в пределах геостационарной орбиты $t_r = R/c$ пренебрежимо мало по сравнению с орбитальной скоростью рассматриваемых орбитальных часов $\Omega_z R$. Нетрудно подсчитать, что для орбиты ГЛОНАСС ($\Omega_z = 1,56 \cdot 10^{-4}$ с⁻¹; $\dot{\Omega}_{orb} = 4,8 \cdot 10^{-10}$ с⁻²) это условие выполняется, поскольку искомое отношение не превышает 10^{-6} .



ЧАСТЬ II. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕТРОЛОГИЯ ВРЕМЕНИ, ЧАСТОТЫ И РАССТОЯНИЙ

3. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕТРОЛОГИЯ ВРЕМЕНИ И РАССТОЯНИЙ НА ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ

3.1. Собственное время в слабо изменяющемся гравитационном поле

3.1.1. Релятивистское определение интервала собственного времени

Для вывода общего закона изменения собственного (действительного, измеряемого) времени для хранителя частоты и времени, движущегося в околоземном пространстве-времени, воспользуемся общим выражением для квадрата пространственно-временного интервала ds [1, 2]:

$$ds^2 = g_{00}c^2 dt^2 + 2g_{0\alpha} dx^\alpha c dt + g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (3.1)$$

где c – скорость света; dt – бесконечно малый интервал координатного времени t , не зависящего от параметров гравитационного поля; g_{00} , $g_{0\alpha}$, $g_{\alpha\beta}$ – компоненты четырехмерного метрического тензора g_{ik} гравитационного поля в выбранной системе отсчета; dx^α , dx^β – пространственные бесконечно малые интервалы; здесь и далее греческие индексы α , $\beta = 1, 2, 3$; латинские $i, k = 0, 1, 2, 3$.

Интервал ds инвариантен к выбору системы отсчета и поэтому не меняет своего значения в любой мгновенно введенной инерциальной невращающейся системе отсчета [2]. Для инерциальной системы, как известно, $ds^2 = g_{00}c^2 dt^2 + g_{11}dx^2 + g_{22}dy^2 + g_{33}dz^2$, где $g_{\alpha\alpha} = 1$, $g_{00} = -1$. Поэтому для двух событий в одной и той же пространственной точке этой системы координат ($dx = dy = dz = 0$) выражение для этого интервала имеет вид:

$$ds^2 = g_{00}c^2 dt^2 = -c^2 d\tau^2, \quad (3.2)$$

где $d\tau$ – собственное время системы. Поэтому соотношение (3.1) можно привести к виду:

$$-c^2 d\tau^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta - \left(\sqrt{-g_{00}} c dt - \frac{g_{0\alpha}}{\sqrt{-g_{00}}} dx^\alpha \right)^2, \quad (3.3)$$

где $\gamma_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}}$ – трехмерный метрический тензор (2.27).

←----->

Координатная скорость движения рассматриваемого хранителя относительно начала выбранной системы отсчета

$$V_k^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dt}; V_k^2 = V_\alpha V^\alpha = \gamma_{\alpha\beta} V^\alpha V^\beta. \quad (3.4)$$

На основании этого соотношения из формулы (3.3) находим релятивистский коэффициент преобразования шкалы собственного времени τ относительно шкалы координатного времени t для хранителя, движущегося в гравитационном поле с координатной скоростью V_k [153, 157]:

$$\theta = \frac{d\tau}{dt} = \left\{ \left(\sqrt{-g_{00}} - \frac{g_{0\alpha} V_k^\alpha}{c \sqrt{-g_{00}}} \right)^2 - \frac{V_k^2}{c^2} \right\}^{0,5}. \quad (3.5)$$

Введем в рассмотрение стационарный (базовый, эталонный) хранитель T_0 с эталонной шкалой собственного и координатного времени τ_0 и t_0 , а также подвижный хранитель частоты и времени T_m (вторичный эталон) шкал времени τ_m и t_m .

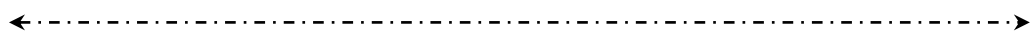
Связь между интервалами собственного времени в двух точках пространства установим при условии, что для обоих хранителей промежутки координатного времени одинаковы: $dt_m = dt_0$. Кроме того, для перехода от координатной скорости подвижного хранителя V_k^α (3.4) к действительной его скорости V^α , измеренной в единицах собственного времени τ_0 базового хранителя, используем соотношение $V_k^\alpha = V^\alpha \theta_0$. В результате получаем:

$$d\tau_m = \frac{\theta_m}{\theta_0} d\tau_0 = \theta_0^m d\tau_0, \quad (3.6)$$

где

$$\theta_0^m = \frac{\theta_m}{\theta_0} \quad (3.7)$$

– интегральный коэффициент преобразования шкал времени. Двухуровневое размещение символов в его обозначении имеет конкретный смысл, поскольку определяет положение числителя и знаменателя с соответствующими символами в формуле (3.7); далее будет использоваться такой же интегральный коэффициент, но с обратным расположением символов;



θ_m – коэффициент преобразования шкалы собственного времени τ_m относительно координатного t_m для подвижного хранителя T_m , определяемый из той же формулы:

$$\theta_m = \left\{ \left(\sqrt{-g_{00}^m} - \frac{\vec{G}_m \vec{V}_m \theta_0}{c \sqrt{-g_{00}^m}} \right)^2 - \left(\frac{\vec{V}_m \theta_0}{c} \right)^2 \right\}^{0,5}, \quad (3.8)$$

где $(\vec{G}_m)_\alpha = g_{0\alpha}^m$ – компоненты векторного потенциала гравитационного поля \vec{G}_m , определяемые вдоль маршрута подвижного хранителя; $\vec{V}_m = (\vec{i}V_x + \vec{j}V_y + \vec{k}V_z)_m$ – скорость подвижного хранителя с составляющими по осям $(V_x, V_y, V_z)_m$, которые в общем случае изменяются вдоль маршрута движения; g_{00}^m – временной компонент четырехмерного метрического тензора, также изменяющийся вдоль маршрута подвижного хранителя.

Для нахождения коэффициента θ_0 , соответствующего базовым часам, по аналогии с формулой (3.8) получаем квадратное уравнение [153]:

$$\left\{ 1 + \frac{V_0^2}{c^2} + \frac{(g_{0\alpha} V_0^\alpha)^2}{c^2 g_{00}^0} \right\} \theta_0^2 + \frac{2g_{0\alpha} V_0^\alpha}{c} \theta_0 + g_{00}^0 = 0,$$

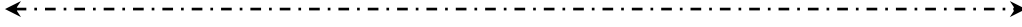
которое имеет решение в виде:

$$\theta_0 = -\frac{b}{2a} \pm \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{h}{a} \right)^{0,5}, \quad (3.9)$$

где $a = 1 + \frac{V_0^2}{c^2} + \frac{b^2}{4g_{00}^0}$; $b = \frac{2g_{0\alpha} V_0^\alpha}{c}$; $h = g_{00}^0$. В этом решении два корня,

однако корень со знаком «минус» соответствует отрицательному течению времени и поэтому далее не используется. Используя выражения для a, b, h , из этой формулы получаем точное выражение для искомого коэффициента θ_0 .

В частном случае неподвижных часов ($V_k^\alpha = 0$), что соответствует наземным стационарным часам во вращающейся системе ITRS или размещению часов на полюсе Земли в инерциальной невращающейся системе ICRS, формула для θ_0 существенно упрощается:



$$\theta_0 = \frac{d\tau_0}{dt_0} = \sqrt{-g_{00}^0}. \quad (3.9a)$$

Определим релятивистскую разность промежутков времени, отсчитываемых по базовым эталонным и мобильным часам. Промежуток времени $\Delta\tau_m$, отсчитываемый по подвижным часам, определяется интегрированием соотношения (3.6) на интервале времени базового хранителя $\Delta\tau_0$. Тогда искомое релятивистское расхождение определяется соотношением:

$$\Delta\tau_P = \Delta\tau_m - \Delta\tau_0 = \int_{\tau_{01}}^{\tau_{02}} \left(\frac{\theta_m}{\theta_0} - 1 \right) d\tau_0 = \int_{\tau_{01}}^{\tau_{02}} \theta_0^m d\tau_0 - \Delta\tau_0, \quad (3.10)$$

где τ_{01}, τ_{02} – моменты начала и окончания интервала интегрирования по шкале τ_0 ; $\Delta\tau_0 = \tau_{02} - \tau_{01}$; $\theta_m = \theta_m(\tau_0, \vec{R})$ – коэффициент преобразования шкалы времени подвижных часов (3.8), определяемый вдоль пути перемещения подвижных часов.

Установим закон изменения релятивистской разности частот задающих генераторов движущихся часов в гравитационном поле. Согласно разделу 1.3.2.3 и соотношению (3.6), интервалы времени $d\tau_m, d\tau_0$, отсчитываемые по шкалам времени двух часов, связаны с частотами их задающих генераторов f_m^0, f_0^0 соотношением (частоту задающего генератора будем обозначать верхним индексом 0) [13]:

$$\frac{d\tau_m}{d\tau_0} = \frac{f_m^0}{f_0^0} = \theta_0^m, \quad (3.11)$$

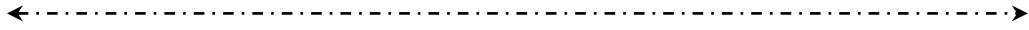
где θ_0^m определяется связью (3.7).

Поэтому частоту генератора мобильных часов можно выразить через частоту генератора эталонных часов в любой точке гравитационного поля в виде:

$$f_m^0 = \frac{\theta_m}{\theta_0} f_0^0 = \theta_0^m f_0^0. \quad (3.12)$$

Отсюда следует искомое выражение для релятивистского расхождения частот задающих генераторов двух часов δf_P^0 :

$$\Delta f_P^0 = f_m^0 - f_0^0 = (\theta_0^m - 1) f_0^0 = \left(\frac{\theta_m}{\theta_0} - 1 \right) f_0^0. \quad (3.13)$$



В более общем случае, когда рассматривается пара подвижных часов со шкалами времени τ_{m1}, τ_{m2} , соотношение интервалов их собственного времени при условии равенства интервалов координатного времени $dt_{m1} = dt_{m2}$ на основании (3.5) имеет вид:

$$d\tau_{m1} = \frac{\theta_{m1}}{\theta_{m2}} d\tau_{m2}, \quad (3.14)$$

где

$$\theta_{mk} = \left\{ \left(\sqrt{-g_{00}^{mk}} - \frac{\vec{G}_{mk} \vec{V}_{mk} \theta_0}{c \sqrt{-g_{00}^{mk}}} \right)^2 - \left(\frac{\vec{V}_{mk} \theta_0}{c} \right)^2 \right\}^{0,5}; \quad k=1, 2; \quad (3.15)$$

где коэффициент θ_0 относится к точке размещения баллистического центра, относительно которого определяется скорость обоих часов.

Релятивистское расхождение шкал рассматриваемых часов как функция от времени, отсчитываемого по одной из этих шкал, находится из соотношения:

$$\Delta\tau_P = \Delta\tau_{m1} - \Delta\tau_{m2} = \int_{\tau_{m2}^1}^{\tau_{m2}^2} \left(\frac{\theta_{m1}}{\theta_{m2}} - 1 \right) d\tau_{m2} = \int_{\tau_{m2}^1}^{\tau_{m2}^2} \frac{\theta_{m1}}{\theta_{m2}} d\tau_{m2} - \Delta\tau_{m2}, \quad (3.16)$$

где τ_{m2}^1, τ_{m2}^2 – моменты начала и окончания интегрирования по шкале τ_{m2} ; $\Delta\tau_{m2} = \tau_{m2}^2 - \tau_{m2}^1$.

В соответствии с (3.11), соотношение частот задающих генераторов двух разнесенных часов определяется формулой:

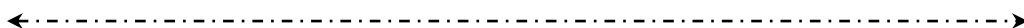
$$f_{m1}^0 = \frac{\theta_{m1}}{\theta_{m2}} f_{m2}^0, \quad (3.17)$$

откуда следует выражение для релятивистской разности этих частот:

$$\Delta f_P^0 = f_{m1}^0 - f_{m2}^0 = \left(\frac{\theta_{m1}}{\theta_{m2}} - 1 \right) f_{m2}^0. \quad (3.18)$$

или в относительном измерении

$$\frac{\Delta f_P^0}{f_{m2}^0} = \frac{f_{m1}^0 - f_{m2}^0}{f_{m2}^0} = \frac{\theta_{m1}}{\theta_{m2}} - 1. \quad (3.19)$$



3.1.2. Обобщенная формула для расхождения временных шкал двух стандартов

Отклонения текущего времени, фиксируемого подвижными часами, от истинного, воспроизводимого эталоном времени, определяется не только релятивистскими явлениями, но и, как известно, разностью частот задающих генераторов эталона и рассматриваемых часов. Поэтому необходимо установить совместное влияние этих двух причин.

Рассмотрим, как и прежде, систему из двух хранителей времени: ведомого хранителя T_m и эталона T_0 . Условимся, что оба хранителя размещены в одной и той же точке в непосредственной близости друг от друга. При этом условии релятивистские и гравитационные эффекты не проявляются, а расхождение временных шкал часов определится лишь различием частот задающих генераторов. Поэтому шкалы времени исследуемых часов будем считать промежуточными и обозначим, соответственно, через τ_m^* и τ_0^* .

Расхождение часов T_m и T_0 $d\tau^*$ представим в виде ряда:

$$d\tau^* = d\tau_c^* + \frac{\partial \tau^*}{\partial \tau_0^*} d\tau_0^* + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \tau^*}{\partial \tau_0^{*2}} d\tau_0^{*2} + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 \tau^*}{\partial \tau_0^{*3}} d\tau_0^{*3} + \dots, \quad (3.20)$$

где $d\tau^* = d(\tau_m^* - \tau_0^*)$; $d\tau_c = d(\tau_m^* - \tau_0^*)_c$ – начальное расхождение часов на момент времени синхронизации τ_{0c}^* . Ограничиваясь двумя членами разложения и переходя к конечным приращениям, получаем

$$\Delta \tau_m^* = \Delta \tau_0^* + \left(\frac{\partial \tau_m^*}{\partial \tau_0^*} - 1 \right) \Delta \tau_0^* + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau_0^*} \left(\frac{\partial \tau_m^*}{\partial \tau_0^*} - 1 \right) \Delta \tau_0^{*2} + \sigma_\tau, \quad (3.21)$$

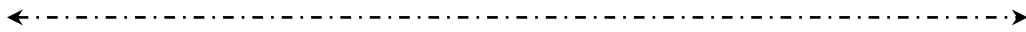
где $\Delta \tau_m^* = \tau_m^* - \tau_{mc}^*$; $\Delta \tau_0^* = (\tau_0^* - \tau_{0c}^*)$; σ_τ – случайная составляющая расхождения временных шкал.

Представляя приращения времени в виде $d\tau_m^* = Nf_m$, $d\tau_0^* = Nf_0$, где N – постоянный коэффициент, получаем:

$$\Delta \tau_m^* = \Delta \tau_0^* + C_1 \Delta \tau_0^* + C_2 \Delta \tau_0^{*2} + \sigma_\tau. \quad (3.22)$$

Здесь $C_1 = \frac{f_m - f_0}{f_0} = \frac{\Delta f}{f_0}$ – коэффициент, характеризующий отно-

сительное начальное расхождение частот задающих генераторов T_m и T_0 ;



$C_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau_0} \left(\frac{\Delta f}{f_0} \right)$ – коэффициент, характеризующий относительную нестабильность частоты генератора T_m относительно частоты эталонного генератора T_0 .

Условимся далее, что хранитель времени T_m начинает двигаться в гравитационном поле относительно начальной точки размещения обоих часов. В этом случае связь между действительным временем движущихся часов τ_m и временем покоящихся часов τ_m^* устанавливается с помощью соотношения (3.6):

$$\Delta \tau_m = \theta_0^m \Delta \tau_m^*. \quad (3.23)$$

Кроме того, поскольку часы T_0 остались в начальной точке, то $\Delta \tau_0^* = \Delta \tau_0$. Используя эти замечания, формулу (3.22) приводим к виду:

$$\Delta \tau_m = \Delta \tau_0 + \left[\theta_0^m C_1 + (\theta_0^m - 1) \right] \Delta \tau_0 + \theta_0^m C_2 \Delta \tau_0^2 + \sigma_\tau. \quad (3.24)$$

Учитывая, что на практике обычно $C_1; C_2; (\theta_0^m - 1) \ll 10^{-9}$, можно считать, что $\theta_0^m C_1 \approx C_1; \theta_0^m C_2 \approx C_2$. Тогда формула (3.24) принимает окончательный вид:

$$\Delta \tau_m = \Delta \tau_0 + \left[C_1 + \left(\frac{\theta_0^m}{\theta_0} - 1 \right) \right] \Delta \tau_0 + C_2 \Delta \tau_0^2 + \sigma_\tau, \quad (3.25)$$

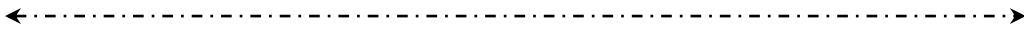
где $\Delta \tau_m = \tau_m - \tau_{mc}; \Delta \tau_0 = \tau_0 - \tau_{0c}$.

Это же соотношение можно представить в виде текущего расхождения двух шкал, как функции времени эталона τ_0 :

$$\tau_m - \tau_0 = (\tau_m - \tau_0)_c + \left[C_1 + \left(\frac{\theta_0^m}{\theta_0} - 1 \right) \right] \Delta \tau_0 + C_2 \Delta \tau_0^2 + \sigma_\tau, \quad (3.26)$$

где $(\tau_m - \tau_0)_c$ – начальное расхождение шкал на момент синхронизации.

Эти формулы позволяют рассчитать суммарное смещение шкал, вызванное начальными взаимными частотными сдвигами задающих генераторов, а также релятивистскими сдвигами времени.



3.1.3. Методы релятивистской синхронизации пространственно разнесенных часов на основе компенсации сдвигов времени и частоты

3.1.3.1. Релятивистская синхронизация на основе коррекции шкалы времени

Релятивистская синхронизация мобильных часов имеет смысл тогда, когда релятивистские эффекты сравнимы или превышают эффекты смещения частоты и времени, вызванные нестабильностью бортовых задающих генераторов [171]. Поэтому, если в формуле (3.25) положить

$C_1, C_2 \ll \frac{\theta_m}{\theta_0} - 1$, то она принимает вид: $\Delta\tau_m = \Delta\tau_0 + \Delta\tau_p + \sigma_\tau$, где

$\Delta\tau_p = (\theta_0^m - 1)\Delta\tau_0$. Прибавив слева и справа корректирующую поправку в виде $-\Delta\tau_p^k$, получаем выражение:

$$\Delta\tau_m^k = \Delta\tau_0 + \delta\tau_p + \sigma_\tau, \quad (3.27)$$

где $\Delta\tau_m^k = \Delta\tau_m - \Delta\tau_p^k$ – скорректированное значение времени мобильных часов; $\delta\tau_p = \Delta\tau_p - \Delta\tau_p^k$ – ошибка компенсации релятивистских эффектов.

Если выполняется условие $\Delta\tau_p^k = \Delta\tau_p$, то ошибка компенсации равна нулю. При этом условии из (3.27) следует, что

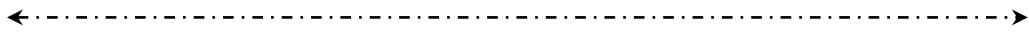
$$\Delta\tau_m^k = \Delta\tau_0 + \sigma_\tau. \quad (3.28)$$

Это означает, что в релятивистском смысле с точностью до случайной составляющей показания мобильных и базовых часов совпадают, т.е. скорректированная шкала времени мобильных часов *синхронизирована со шкалой базовых часов*.

Корректирующая релятивистская поправка $\Delta\tau_p^k = \Delta\tau_p$, которую необходимо внести в текущую шкалу времени мобильных часов, вычисляется непрерывно вдоль маршрута по формуле, следующей из соотношения (3.25):

$$\Delta\tau_p = \left(\frac{\theta_m}{\theta_0} - 1 \right) \Delta\tau_0, \quad (3.29)$$

где коэффициент преобразования времени θ_m определяются общей формулой (3.5) как функция текущего гравитационного потенциала и скорости мобильных часов вдоль их маршрута движения; коэффициент θ_0 для неподвижных базовых часов определяется формулой (3.9а).



Определение текущего значения коэффициента θ_m вдоль маршрута движения наиболее просто выполнить с помощью НАП ГНСС, которая выдает текущие координаты и скорость часов на маршруте.

Вычисленную таким образом текущую релятивистскую поправку можно вносить в шкалу времени мобильных часов как непрерывно на маршруте, так и однократно в конце маршрута. В первом случае процесс вычисления поправок, например, по данным НАП ГЛОНАСС/GPS, и их цифровой ввод в шкалу мобильных часов ведутся непрерывно, и поэтому на маршруте движения постоянно поддерживается синхронность шкал мобильного и базового хранителей времени. Во втором случае задача компенсации решается в конце маршрута по накопленным за время движения навигационным данным.

3.1.3.2. Релятивистская синхронизация на основе коррекции частоты задающих генераторов

Поскольку, согласно соотношению (3.13),

$$\frac{\Delta f_P}{f_0} = \frac{f_m - f_0}{f_0} = \left(\frac{\theta_m}{\theta_0} - 1 \right),$$

(верхний индекс «0» для простоты опускаем), то соотношение (3.25) можно представить в виде:

$$\Delta \tau_m = \Delta \tau_0 + \left[C_1 + C_1^k + \frac{\Delta f_P}{f_0} \right] \Delta \tau_0 + C_2 \Delta \tau_0^2 + \sigma_\tau,$$

где C_1^k – корректирующая поправка относительного значения частоты задающего генератора. Отсюда следует условие компенсации релятивистского частотного сдвига:

$$C_1^k = -\frac{\Delta f_P}{f_0}. \quad (3.30)$$

Таким образом, искусственно вводя поправку в относительное значение частоты бортового задающего генератора C_1^k , мы достигаем полной компенсации частотных релятивистских эффектов и приходим к исходной формуле (3.22).

←----->

Следствием компенсации релятивистского сдвига частоты мобильного задающего генератора является синхронизация шкал времени мобильного и базового стандартов. Действительно, в случае высокостабильных генераторов, когда $C_1, C_2 \ll \frac{\Delta f_P}{f_0}$, из (3.25) имеем: $\Delta \tau_m = \Delta \tau_0 + \sigma_\tau$.

Естественно, для полного совмещения обеих шкал времени необходима начальная их синхронизация.

Метод синхронизации на основе коррекции частоты наиболее удобен при работе с неподвижными стандартами. Действительно, в системе отсчета ITRS при $V = 0$ коэффициент θ_m , определяемый формулой (3.8), постоянен. Поскольку θ_0 , определяемый формулой (3.9а), тоже постоянный, то и релятивистский сдвиг частоты (3.13) также не изменяется. Соответственно постоянна и корректирующая поправка частоты, которая вводится однократно.

Для подвижных часов релятивистская синхронизация на основе использования постоянной корректирующей частотной поправки возможна при постоянстве всех членов коэффициента θ_m (3.8) вдоль трассы движения мобильных часов. Возможности реализации этой идеи для наземных мобильных часов рассмотрены ниже в разделе 3.4, а для космических часов – в разделе 4.

3.1.3.3. Комбинированная релятивистская синхронизация

Если релятивистское смещение (3.13) представить в виде суммы постоянной Δf_P^- и переменной Δf_P^\approx составляющих в виде

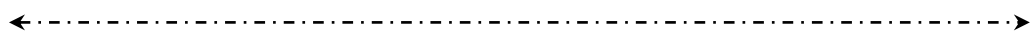
$$\frac{\theta_m}{\theta_0} - 1 = \frac{\Delta f_P^-}{f_0} + \frac{\Delta f_P^\approx}{f_0},$$

то соотношение (3.25) можно привести к следующей форме:

$$\Delta \tau_m = \Delta \tau_0 + \Delta \tau_P^\approx + \left(C_1 + \frac{\Delta f_P^-}{f_0} \right) \Delta \tau_0 + C_2 \Delta \tau_0^2 + \sigma_\tau, \quad (3.31)$$

где $\Delta \tau_P^\approx = \int_{\tau_0} \frac{\Delta f_P^\approx}{f_0} d\tau_0$ – переменный релятивистский сдвиг шкалы времени.

Полагая далее, что для высокостабильных генераторов $C_1, C_2 \ll \frac{\Delta f_P^-}{f_0}, \frac{\Delta f_P^\approx}{f_0}$,



вводя в шкалу времени корректирующую поправку $\Delta\tau_p^{k\approx}$, а в частоту бортового генератора – поправку по частоте $C_1^{k=}$, последнее соотношение приводим к виду:

$$\Delta\tau_m = \Delta\tau_0 + (\Delta\tau_p^{\approx} + \Delta\tau_p^{k\approx}) + \left(C_1^{k=} + \frac{\Delta f_p^{\approx}}{f_0} \right) \Delta\tau_0 + \sigma_\tau. \quad (3.32)$$

При $\Delta\tau_p^{k\approx} = -\Delta\tau_p^{\approx}$ и при $C_1^{k=} = -\frac{\Delta f_p^{\approx}}{f_0}$ мы приходим к состоянию релятивистской синхронизации шкал времени мобильных и стационарных часов: $\Delta\tau_m = \Delta\tau_0 + \sigma_\tau$.

На практике незначительные переменные релятивистские сдвиги корректируют смещением бортовой шкалы времени, а большие линейные сдвиги – путем введения искусственной поправки в частоту задающего генератора бортовых часов. Рассмотренный комбинированный способ релятивистской синхронизации реализован в спутниковых навигационных системах типа ГЛОНАСС и GPS.

3.2. Метрика расстояний в околоземном пространстве-времени

Следуя известному методу [1, 2], истинное расстояние между двумя бесконечно близкими точками в гравитационном поле определим радиолокационным способом с помощью радиолуча, распространяющегося между этими точками в направлении «туда и обратно». При этом расстояние между двумя точками $d\delta$ определится известным соотношением радиолокации:

$$d\delta = \frac{c}{2} d\tau_p,$$

где $d\tau_p$ – собственное (измеряемое) время от момента излучения прямого (запросного) до момента приема обратного (отраженного) радиолуча между двумя точками. Это время измеряется с помощью часов, которые покоятся в точке размещения радиолокационного измерителя, причем связь с координатным временем распространения определяется соотношением (3.8), откуда

$$d\delta = \frac{c}{2} \sqrt{-g_{00}} dt_p, \quad (3.33)$$

где g_{00} относится к точке размещения измерительных часов.

Пространственно-временной интервал для электромагнитного луча в теории относительности по определению равен нулю, т.е. $ds=0$. Поэтому выражение (3.1) для электромагнитной волны принимает вид квадратного уравнения относительно искомого времени dt :

$$g_{00}c^2dt^2 + 2g_{0\alpha}dx^\alpha cdt + g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = 0.$$

Решение этого уравнения имеет два корня, определяющих координатное время распространения прямого (запросного) и обратного (отраженного) радиосигналов:

$$\left. \begin{aligned} dt_\uparrow &= \frac{1}{c(-g_{00})} \left\{ g_{0\alpha}dx^\alpha - \sqrt{(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}g_{00})dx^\alpha dx^\beta} \right\}, \\ dt_\downarrow &= \frac{1}{c(-g_{00})} \left\{ g_{0\alpha}dx^\alpha + \sqrt{(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}g_{00})dx^\alpha dx^\beta} \right\}. \end{aligned} \right\}$$

Искомое координатное время распространения определяется разностью этих решений:

$$dt_p = \frac{2}{c(-g_{00})} \sqrt{(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}g_{00})dx^\alpha dx^\beta}. \quad (3.34)$$

Подставляя полученное значение времени распространения в формулу (3.33), получаем формулу для пространственного трехмерного расстояния в гравитационном поле:

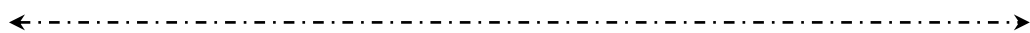
$$d\delta = \sqrt{\left(g_{\alpha\beta} - \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}} \right) dx^\alpha dx^\beta}, \quad (3.35)$$

или

$$d\delta^2 = \left(g_{\alpha\beta} - \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}} \right) dx^\alpha dx^\beta = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (3.36)$$

где $\gamma_{\alpha\beta}$ – трехмерный метрический тензор, определяемый общим соотношением (2.27).

Таким образом, трехмерные расстояния в околоземном пространстве-времени определяются его трехмерными метрическими свойствами и зависят от выбранной системы отсчета в гравитационном поле.



Используя трехмерный метрический тензор для наиболее общего случая – для системы ITRS (2.99), из (3.36) получаем выражение для пространственной длины во вращающейся системе отсчета:

$$d\delta^2 = \left[1 + \frac{2\varphi}{c^2} + (\vec{G}\vec{e})^2 \right] dR^2, \quad (3.37)$$

где $dR^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$; \vec{e} – единичный вектор в направлении измерения длины.

Таким образом, во вращающейся системе типа ITRS или орбитальной вращающейся системе пространственная длина зависит от направления измерения. Наибольшее изменение длины будет в направлении вектора $\vec{G} = \frac{[\vec{\Omega}_z \vec{R}]}{c}$, т.е. в плоскости вращения перпендикулярно радиусу вращения.

Изменение длины в истинном гравитационном поле Земли от направления не зависит, поскольку это поле в первом приближении изотропно. Разлагая (3.38) в ряд и оставляя лишь первые члены разложения, выражение для пространственной длины представим в виде рабочей формулы:

$$d\delta = \left[1 + \frac{\varphi}{c^2} + \frac{1}{2} (\vec{G}\vec{e})^2 \right] dR. \quad (3.38)$$

Рассмотрим расстояния между точками на поверхности Земли. Определяя гравитационный потенциал в виде (2.57), пренебрегая возмущающими потенциалами, вызванными неоднородностью ГПЗ, а также влиянием приливных потенциалов Луны и Солнца, нетрудно подсчитать, что чисто «гравитационное» удлинение Δl_φ наземных пространственных отрезков длиной l в относительном исчислении, согласно (3.38), составляет:

$$\frac{\Delta l_\varphi}{l} = \frac{\varphi_e}{c^2} \approx 6,9 \cdot 10^{-10}. \quad (3.39)$$

Отсюда находим, что при $\Delta l_\varphi \leq 1$ мм (требование в соответствии с программой GGOS) предельное значение геодезической длины, при измерении которой еще можно не учитывать гравитационную поправку Δl_φ , составляет 145 км. При большей длине это необходимо делать.

В частности, длина экватора и длина меридиана за счет воздействия гравитационного поля увеличиваются примерно на 28 мм.

←----->

Относительное увеличение длины отрезков Δl_Ω на поверхности Земли за счет ее вращения, согласно (3.38), составит:

$$\frac{\Delta l_\Omega}{l} = \frac{1}{2c^2} (\Omega_z R_e \cos \psi \sin A)^2, \quad (3.40)$$

где ψ – геоцентрическая широта точки измерения длины; A – азимут, вдоль которого ориентирован измеряемый отрезок длины.

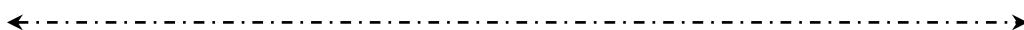
Таким образом, длина эталонных наземных отрезков в системе ITRS зависит от места их размещения на меридиане и ориентации относительно местного меридиана. Максимальное изменение длины за счет вращения наблюдается на экваторе ($\psi = 0$) при азимуте ориентации $A = 90^\circ$ и составляет, как следует из (3.40), $\approx 1,2 \cdot 10^{-12}$.

Метрологические характеристики современных наземных эталонов длины уже соизмеримы с этой величиной. В частности, неисключенная систематическая погрешность воспроизведения единицы длины в Государственном первичном эталоне единицы длины – метра ГЭТ 2-2010, созданном ФГУП «ВНИИМ им. Д.И. Менделеева», составляет $2,2 \cdot 10^{-12}$. Как считают разработчики этого эталона, использование последних достижений в ядерной резонансной флуоресценции открывают перспективы создания эталонов длины с точностью воспроизведения до 10^{-20} . При такой точности длина эталона будет существенно зависеть от его пространственной ориентации. Следует также отметить, что для широты Санкт-Петербурга, где расположен ВНИИМ им. Д.И. Менделеева, относительное изменение длины (3.40), в зависимости от азимута, находится в интервале $0 \div 0,3 \cdot 10^{-12}$.

Теперь оценим изменение длины орбиты спутников Земли за счет влияния ГПЗ, потенциал которого определяется формулой (2.57). Пренебрегая возмущающими потенциалами, вызванными неоднородностью ГПЗ, а также влиянием приливных потенциалов, гравитационное изменение длины орбиты радиусом R_{orb} в первом приближении получаем в виде:

$$d\delta_\varphi = \frac{\mu_e}{c^2 R_{orb}} 2\pi R_{orb} = \frac{2\pi\mu_e}{c^2} \approx 28 \text{ мм}. \quad (3.41)$$

Таким образом, любая орбита ИСЗ из-за влияния гравитационного поля удлиняется примерно на 28 мм, причем это удлинение не зависит от высоты орбиты.



3.3. Взаимное релятивистское смещение шкал собственного времени двух стационарных наземных часов

3.3.1. Практические релятивистские шкалы времени в околоземном пространстве и связь между ними

3.3.1.1. Шкалы атомного времени

Шкалы времени, основанные на явлении атомного или молекулярного резонанса, называются шкалами атомного времени. Основной шкалой времени, базирующейся на атомных часах, является Международная шкала атомного времени (*International Atomic Time – TAI*), которая рассчитывается Международным бюро мер и весов (BIPM) по взвешенным средним значениям атомных часов в лабораториях времени, рассредоточенных по всему миру. Это – непрерывная опорная шкала времени без скачков [158, 11].

3.3.1.2. Координированные шкалы времени

К ним относятся шкалы времени, в которых числовые выражения любого события отличаются на значение, не превышающее установленного допуска. К таковым относятся:

– шкала Всемирного координированного времени UTC: шкала времени, формируемая Международным бюро мер и весов и Международной службой вращения Земли и опорных систем отсчета так, что смещение относительно Международной шкалы атомного времени составляет целое число секунд;

– национальная шкала координированного времени Российской Федерации UTC(SU): национальная шкала времени России, формируемая так, что значение ее смещения относительно шкалы Всемирного координированного времени не превышает установленного значения.

В 2011 г. решением BIPM установлено соотношение: $UTC = TAI - 34 \text{ с}$. Каждый месяц BIPM распространяет UTC в «Циркуляре T» BIPM в форме значений разницы для конкретных национальных лабораторий времени $UTC(k)$.

3.3.1.3. Шкалы координатного времени

Координатное время t – это независимая переменная в уравнениях движения физических тел и в уравнениях распространения электромагнитных волн. Как уже отмечалось выше, это математическая координата в четырехмерной пространственно-временной системе координат. Для данного события координатное время имеет одно и то же значение в любой точке пространства-времени. Значения координатного времени не измеряются, они при необходимости вычисляются по собственному времени τ , которое измеряется собственными, т.е. сопутствующими часами.

В практике измерений времени в Солнечной системе и в околоземном пространстве используется несколько шкал координатного времени, которые связаны между собой релятивистскими соотношениями [11].

- *Барицентрическое координатное время t_{TCB} (Barycentric Coordinate Time – TCB)* – это координатное время в системе координат с началом в барицентре Солнечной системы – в центре масс Солнца.

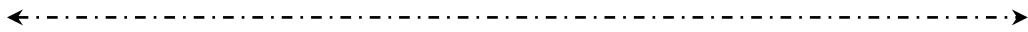
- *Геоцентрическое координатное время t_{TCG} , или просто t (Geocentric Coordinate Time – TCG)* – это координатное время в невращающейся небесной системе координат, центр которой находится в центре Земли. В околоземном пространстве оно является основным.

- *Земное время t_{TT} (Terrestrial Time – TT)* – это еще одно координатное время, которое выводится на основе TCG таким образом, что оно имеет примерно ту же скорость хода, что и собственное время часов, покоящихся на поверхности геоида. Оно вводится во вращающейся земной системе отсчета и его использование иногда удобно при расчете собственного времени наземных часов.

- *Барицентрическое динамическое время t_{TDB} (Barycentric Dynamical Time – TDB)* – вспомогательное барицентрическое координатное время.

Связь между барицентрическим и геоцентрическим координатным временем применительно к невращающейся барицентрической небесной системы координат установим с помощью соотношения (3.8). Применительно к данному случаю оно устанавливает связь между координатным временем в барицентрической системе (в данном случае t_{TCB}) и собственным временем в любой точке солнечной орбиты Земли (обозначим τ_{TCG}).

Если положить для Солнца $g_{0\alpha} = 0$, $g_{00} = -\left(1 - \frac{\varphi_S}{c^2}\right)$, а орбиту Земли считать круговой, то получаем:



$$d\tau_{TCG} = \left(1 - \frac{\varphi_s}{c^2} - \frac{V_e^2}{2c^2}\right) dt_{TCB} \approx \left(1 - \frac{3\mu_s}{2c^2\rho_e}\right) dt_{TCB}, \quad (3.42)$$

где $\varphi_s = \frac{\mu_s}{\rho_e}$ – потенциал Солнца на орбите Земли; $V_e^2 = \frac{\mu_s}{\rho_e}$ – квадрат орбитальной круговой скорости Земли; μ_s – гравитационная постоянная Солнца; ρ_e – радиус круговой орбиты Земли. Для конкретных значений величин, входящих в эту формулу, получаем:

$$d\tau_{TCG} \approx (1 - L_c) dt_{TCB}, \quad (3.43)$$

где $L_c = \frac{3\mu_s}{2c^2\rho_e} \approx 1,48082686741 \cdot 10^{-8}$. Поскольку для круговой орбиты Земли эта величина практически постоянна, то полученное собственное время принимается в качестве геоцентрического координатного времени, то есть $\tau_{TCG} = t_{TCG}$. Из (3.43) следует выражение для текущего расхождения двух рассматриваемых временных шкал: $t_{TCB} - t_{TCG} = L_c t_{TCB}$, что составляет $\approx 1,28$ мс за сутки. Это соотношение содержит также периодические члены, вызванные неравномерностью движения Земли, однако здесь мы их не рассматриваем в силу их малости.

Чтобы установить связь между геоцентрическим координатным временем t_{TCG} и земным временем t_{TT} , воспользуемся формулой (3.9а). С помощью этой формулы для вращающейся системы отсчета ITRS установим соотношение промежутков собственного времени неподвижных часов на поверхности Земли и промежутка геоцентрического координатного времени t_{TCG} :

$$d\tau_{TT} = \sqrt{-g_{00}} dt_{TCG} = \sqrt{-g_{00}} dt. \quad (3.44)$$

Здесь, согласно определению метрического тензора для системы ITRS (2.97),

$$g_{00} = -\left(1 - \frac{2\varphi}{c^2} - G^2\right), \quad (3.45)$$

потенциал нормального гравитационного поля Земли φ_e устанавливается соотношениями (2.54) – (2.55), $G = \left[\vec{\Omega}\vec{R}_e\right]$.

На Земле есть поверхность, которая является поверхностью равного потенциала, или эквипотенциальная поверхность, с потенциалом $\varphi_G = const$. Это поверхность геоида, для которой $g_{00}^G = const$ в любой его точке, т.е., согласно (3.45),

$$g_{00}^G = -\left(1 - \frac{2\varphi_G}{c^2}\right) = const,$$

где

$$\varphi_G = \left(\varphi_e + \frac{1}{2}[\overline{\Omega R_e}]^2\right)_G. \quad (3.46)$$

Наиболее просто этот потенциал вычислить на основе соотношений (3.46), (2.54)–(2.55) для точки на экваторе, когда геоцентрическая высота $\rho = R_e$, а геоцентрическая широта $\psi = 0$. Уточненное значение потенциала на поверхности геоида принято в 2015 г. Резолюцией № 1 Международной Ассоциации геодезии (IAG) (Prague, Czech Republic) [159]:

$$\varphi_G = \frac{\mu_e}{R_e} \left(1 + \frac{J_{20}}{2}\right) + \frac{\Omega^2 R_e^2}{2} = 6,26368534 \cdot 10^7 \text{ м}^2/\text{с}^2. \quad (3.47)$$

На основании этих соотношений связь интервалов времени (3.44) получаем в виде:

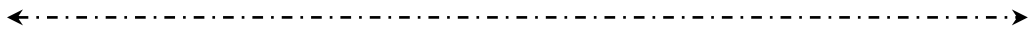
$$d\tau_{TT} = \left(1 - \frac{\varphi_G}{c^2}\right) dt_{TCG} = (1 - L_G) dt_{TCG}, \quad (3.48)$$

где $L_G = \frac{\varphi_G}{c^2} = 6,969290134 \cdot 10^{-10}$. Поскольку это величина постоянная, то время τ_{TT} можно принять в качестве координатного, т.е.

$$dt_{TT} = (1 - L_G) dt_{TCG} = (1 - L_G) dt. \quad (3.49)$$

Нетрудно подсчитать, что ежесуточное постоянное расхождение шкал времени dt_{TCG} и t_{TT} составляет 60,2 мкс. Практической реализацией земного времени TT является Международная шкала атомного времени TAI , причем $TT = TAI + 32,184 \text{ с}$.

Барицентрическое динамическое время t_{TDB} является еще одним координатным временем в барицентрической солнечной системе координат, которое вводится для достижения примерно той же скорости хода, что и у Земного времени TT . Действительно, на основе предыдущих соотношений (3.49) и (3.43) можно получить соотношение:



$$dt_{TT} = (1 - L_C)(1 - L_G) dt_{TCB} \approx (1 - L_B) dt_{TCB}, \quad (3.50)$$

где $L_B \approx L_C + L_G$. На основании этой связи вводится шкала координатного времени t_{TDB} с таким же ходом, как и шкала t_{TT} :

$$\frac{dt_{TDB}}{dt_{TCB}} = 1 - L_B, \quad (3.51)$$

где $L_B = 1,550519798 \cdot 10^{-8}$.

Перечисленные шкалы координатного времени введены Резолюциями Международного астрономического союза [137] и опубликованы в Рекомендациях Международного союза радиосвязи [11].

3.3.2. Общее определение релятивистского расхождения шкал собственного времени и частоты наземных стационарных часов

Проблеме определения расхождения стационарных и мобильных часов посвящен ряд работ, например [160–170]. Определим релятивистское расхождение частоты и времени двух атомных часов, размещенных на поверхности Земли. Первые атомные часы обозначим индексом «0» и назовем их базовыми, т.к. они являются хранителями шкалы собственного (действительного, измеряемого) времени τ_0 и собственной частоты f_0 . Вторые часы обозначим индексом «B» и назовем их ведомыми, – они являются хранителями собственного времени τ_B и частоты f_B . В качестве координатного времени используем рассмотренное выше геоцентрическое координатное время $t_{TCG} = t$ [153].

Метрологический эксперимент с часами рассмотрим в невращающейся небесной геоцентрической системе координат *ICRS OXYZ*. Начало системы находится в центре вращающейся Земли, плоскость *XOY* совмещена с плоскостью экватора, а ось *OX* направлена в точку весеннего равноденствия. Текущее положение обоих часов в выбранной системе координат характеризуется радиус-векторами, соответственно \vec{R}_0 и \vec{R}_B , а скорости перемещения – векторами \vec{V}_0 и \vec{V}_B . В рассматриваемом случае скорость стационарных наземных часов равна их линейной скорости вследствие суточного вращения Земли.

Релятивистское расхождение временных шкал подвижных базовых и подвижных ведомых часов определим из соотношения (3.10), которое в новых обозначениях имеет вид:

$$\Delta\tau_P = \Delta\tau_B - \Delta\tau_0 = \int_{\tau_{01}}^{\tau_{02}} \left(\frac{\theta_B}{\theta_0} - 1 \right) d\tau_0, \quad (3.52)$$

где τ_{01}, τ_{02} – моменты начала и окончания интервала интегрирования по шкале τ_0 ; $\Delta\tau_0 = \tau_{02} - \tau_{01}$; $\theta_0 = \theta_0(\tau_0, \vec{R})$ – коэффициент преобразования шкалы времени подвижных часов «0», определяемый вдоль их пути перемещения по формуле (3.9); $\theta_B = \theta_B(\tau_0, \vec{R})$ – коэффициент преобразования шкалы подвижных часов «B», определяемый по формуле (3.8), который в новых обозначениях имеет вид:

$$\theta_B = \left\{ \left(\sqrt{-g_{00}^B} - \frac{\vec{G}_B \vec{V}_B \theta_0}{c \sqrt{-g_{00}^B}} \right)^2 - \left(\frac{\vec{V}_B \theta_0}{c} \right)^2 \right\}^{0,5}, \quad (3.53)$$

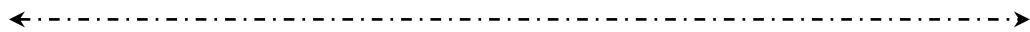
где $(\vec{G}_B)_\alpha = g_{0\alpha}^B$ – компоненты векторного потенциала гравитационного поля \vec{G}_B , определяемые вдоль маршрута подвижного хранителя; $\vec{V}_B = (iV_x + jV_y + kV_z)_B$ – скорость подвижного хранителя с составляющими по осям $(V_x, V_y, V_z)_B$, которые в общем случае изменяются вдоль маршрута движения; g_{00}^B – временной компонент четырехмерного метрического тензора, также изменяющийся вдоль маршрута подвижного хранителя. Для подвижных базовых часов эти же величины имеют индекс «0».

Соответствующее выражение для релятивистского расхождения частот задающих генераторов двух часов δf_P^0 находится из соотношения (3.13), которое в новых обозначениях имеет вид:

$$\Delta f_P^0 = f_B^0 - f_0^0 = (\theta_0^B - 1) f_0^0 = \left(\frac{\theta_B}{\theta_0} - 1 \right) f_0^0. \quad (3.54)$$

Для вычисления коэффициентов преобразования шкал необходимо воспользоваться метрическим тензором для невращающейся небесной системы отсчета в виде (2.70) и (2.71). Пренебрегая членами вида $O(c^{-4})$, на основе компонентов этого тензора из (3.9) и (3.53) находим:

$$\theta_0 = 1 - \frac{\varphi_0}{c^2} - \frac{V_0^2}{2c^2} - \frac{1}{c} g_{0\alpha} V_0^\alpha, \quad \theta_B = 1 - \frac{\varphi_B}{c^2} - \frac{V_B^2}{2c^2} - \frac{1}{c} g_{0\alpha} V_B^\alpha, \quad (3.55)$$



где скорость и квадрат скорости часов определяются формулами (соответствующие индексы индексы 0; B опускаем):

$$\mathbf{V} = [\mathbf{\Omega}\mathbf{R}] = \mathbf{i}V_x + \mathbf{j}V_y + \mathbf{k}V_z \quad V^2 = V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2, \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} V_x &= \Omega_y z - \Omega_z y, \quad V_y = \Omega_z x - \Omega_x z, \\ V_z &= \Omega_x y - \Omega_y x, \quad V^\alpha = \{V_x, V_y, V_z\}, \end{aligned} \quad (3.57)$$

где $\mathbf{\Omega}_3$ – угловая скорость движения Земли, определяемая формулами (2.86), (2.87) и (2.91); \mathbf{R} – радиус-вектор точек размещения рассматриваемых часов; x, y, z – текущие координаты часов.

Вычисление искомого релятивистского смещения частоты и времени проведем по формулам (3.54) и (3.52), используя формулы (3.55) – (3.57). При этом для упрощения анализа полученных результатов выполним переход от текущих прямоугольных координат часов к сферическим по формулам:

$$\begin{aligned} x(\tau) &= R \cos \psi \cos(\Omega_0 \tau + \lambda), \\ y(\tau) &= R \cos \psi \sin(\Omega_0 \tau + \lambda), \\ z &= R \sin \psi, \end{aligned} \quad (3.58)$$

где $R, \psi, \lambda(\tau)$ – радиус-вектор, геоцентрическая широта и текущая долгота точек на поверхности вращающейся Земли.

В результате для релятивистской разности частот задающих генераторов $\Delta f_P = f_B - f_0$ имеем (верхний индекс 0 для частоты задающего генератора для упрощения записей опускаем):

$$\frac{\Delta f_P}{f_0} = -\frac{\varphi_B - \varphi_0}{c^2} - \frac{\Omega_0^2}{2c^2} (R_B^2 \cos^2 \psi_B - R_0^2 \cos^2 \psi_0) - \frac{1}{c} (g_{0\alpha}^B V_B^\alpha - g_{0\alpha}^0 V_0^\alpha) - \frac{1}{f_0} \sum_{i=1}^3 \delta f_i^\Omega, \quad (3.59)$$

где

$$\frac{\delta f_1^\Omega}{f_0} = -\frac{\Omega_0 \Omega_y}{c^2} (y_B z_B - y_0 z_0), \quad (3.60)$$

$$\frac{\delta f_2^\Omega}{f_0} = -\frac{\Omega_0 \Omega_x}{c^2} (x_B z_B - x_0 z_0), \quad (3.61)$$

$$\frac{\delta f_3^\Omega}{f_0} = \frac{\Omega_0 (\Delta \Omega_z + \Omega_z^{IP})}{c^2} (R_B^2 \cos^2 \psi_B - R_0^2 \cos^2 \psi_0). \quad (3.62)$$

Здесь, согласно формуле (2.52), скалярные потенциалы φ_B, φ_0 равны сумме скалярного гравитационного потенциала Земли φ_e , а также скалярных потенциалов, вызванных влиянием массы Луны $\Delta\varphi_m$, Солнца $\Delta\varphi_s$ и других планет $\Delta\varphi_i$. Пространственно-временной компонент метрического тензора $g_{0\alpha}$ определяется формулой (2.66).

В формуле (3.59) первые два члена описывают два хорошо известных эффекта: эффект гравитационного смещения частоты вследствие различия гравитационных потенциалов в точках размещения часов и эффект Доплера 2 порядка, вызванный различием линейных скоростей движения часов на разных широтах вследствие вращения Земли в выбранной небесной невращающейся системе отсчета. Третий член описывает эффект, вызванный ненулевым векторным потенциалом Земли (моментом импульса Земли), а эффекты под знаком суммы вызваны неравномерностью вращения Земли и движением ее полюсов.

Пользуясь формулами (3.55) – (3.57), из (3.52) находим выражение для релятивистского расхождения шкал времени стационарных ведомых и базовых часов [153]:

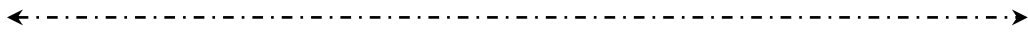
$$\begin{aligned} \Delta\tau_p = & -\frac{\varphi_B - \varphi_0}{c^2} \Delta\tau_0 - \frac{\Omega_0^2}{2c^2} (R_B^2 \cos^2 \psi_B - R_0^2 \cos^2 \psi_0) \Delta\tau_0 - \\ & - \frac{g_{0\alpha}^B V_B^\alpha - g_{0\alpha}^0 V_0^\alpha}{c} \Delta\tau_0 - \frac{1}{f_0} \sum_{i=1}^3 \int_{\tau_0} \delta f_i d\tau_0, \end{aligned} \quad (3.63)$$

где все члены имеют такое же физическое значение, как и в формуле для частоты (3.59); $\Delta\tau_0, d\tau_0$ – интервалы времени по базовым часам.

Проанализируем полученные формулы, имея ввиду, что Земной потенциал, согласно (2.56), существенно зависит от географического положения точек размещения анализируемых часов.

3.3.3. Постоянные релятивистские смещения частоты и времени наземных часов

Выделим из общих формул (3.59) и (3.63) постоянные релятивистские смещения частоты $\Delta f_B^{f_0}$ и времени $\Delta\tau_p^{f_0}$, вызванные разностью статических потенциалов ГПЗ φ_e^0, φ_e^B в точках размещения часов, эффектом Доплера II порядка и моментом импульса Земли:



$$\frac{f_B - f_0}{f_0} = \frac{\varphi_e^0 - \varphi_e^B}{c^2} + \frac{\Omega_0^2}{2c^2} (R_0^2 \cos^2 \psi_0 - R_B^2 \cos^2 \psi_B) + \frac{1}{c} (g_{0\alpha}^B V_B^\alpha - g_{0\alpha}^0 V_0^\alpha), \quad (3.64a)$$

$$\Delta \tau_P = \frac{f_B - f_0}{f_0} \Delta \tau_0. \quad (3.64b)$$

Здесь статический потенциал ГПЗ φ_e определяется разложением по сферическим функциям в виде суммы нормальной и аномальной его составляющих в виде (2.54) – (2.56).

3.3.3.1. Смещения, вызванные разностью статических потенциалов ГПЗ

Разместим исследуемые часы на одной геоцентрической широте ψ , но на разных геоцентрических высотах: ρ_0 ; $\rho_B = \rho_0 + H$, где разность высот $H \ll \rho_0$. Используя формулы (2.54) и (2.55), оценку величины гравитационного смещения частоты и времени (3.64) для наземных часов проведем для нормального поля с потенциалами:

$$\begin{aligned} \varphi_e^0 &= \frac{\mu_e}{\rho_0} \left[1 - J_2 \left(\frac{R_e}{\rho} \right) \left(\frac{3}{2} \sin^2 \psi_B - \frac{1}{2} \right) \right], \\ \varphi_e^B &= \frac{\mu_e}{\rho_B} \left[1 - J_2 \left(\frac{R_e}{\rho_B} \right) \left(\frac{3}{2} \sin^2 \psi_B - \frac{1}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.65)$$

В результате смещение, вызванное только разностью статических потенциалов φ_e^0, φ_e^B в формуле (3.64), принимает вид:

$$\frac{\Delta f_P^\varphi}{f_0} = \frac{f_B^\varphi - f_0}{f_0} = \frac{g_0 H}{c^2} (1 - 3J_2 P_2) - \frac{W_{zz}}{2c^2} H^2 (1 - 4J_2 P_2), \quad (3.66a)$$

$$\Delta \tau_P^\varphi = \frac{\Delta f_P^\varphi}{f_0} \Delta \tau_0, \quad (3.66b)$$

где g_0 – ускорение свободного падения в точке размещения базовых часов; W_{zz} – вертикальный градиент ГПЗ; P_2 – полином Лежандра, определяемый формулой (2.55). Полученные формулы обобщают ранее полученные соотношения (1.68) – (1.60).

←----->

Коэффициент гравитационного относительного смещения частоты и времени на поверхности Земли довольно значителен: $\frac{\Delta f_p^e}{f_0} = \frac{\varphi_e}{c^2} =$

$= \frac{\mu_e}{c^2 R_e} \approx 6,9 \cdot 10^{-10}$. Однако разностное относительное гравитационное смещение шкал времени двух наземных часов $(\varphi_e^0 - \varphi_e^B) / c^2 \approx g_0 H / c^2$ существенно меньше: при разности высот 1000 м у поверхности Земли оно составляет $\approx 10^{-13}$. Такое различие высот часов ведет к взаимному гравитационному смещению частоты задающих генераторов часов и их шкал времени. На суточном интервале $\Delta \tau_0 = 8,6 \cdot 10^4$ с взаимное смещение шкал времени составляет $\tau_B - \tau_0 = \Delta \tau_0 g_0 H / c^2 \approx +8,6$ нс, причем часы на большей высоте опережают наземные. Наземные часы, находящиеся в точке с более высоким потенциалом, идут медленнее. Образно говоря, ход часов, находящихся ближе к центру Земли, как бы «замораживается» в более «плотном» гравитационном поле.

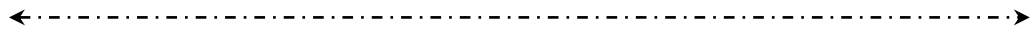
При той же разности высот смещения шкал времени наземных часов, определяемые коэффициентом при второй зональной гармонике J_2 , на 3 порядка меньше. Поэтому соответствующие суточные релятивистские расхождения составляют единицы пикосекунд. Влияние коэффициентов других зональных, секториальных и тессеральных гармоник еще на 2–3 порядка меньше и проявляется только при больших интервалах времени наблюдения.

3.3.3.2. Представление разности потенциалов ГПЗ через потенциал геоида

Для решения некоторых практических задач удобно представлять разность потенциалов в двух наземных точках через потенциал на поверхности геоида φ_G , который определяется формулой (3.47) и который имеет постоянное значение в любой точке Земли.

При этом потенциал в точке размещения исследуемых часов представляется в виде:

$$\varphi = \varphi_G - \Delta\varphi = \varphi_G - \int g(H) dH_{OPT} \approx \varphi_G - gH_{OPT},$$



где $H_{ОРТ}$ – ортометрическая высота рассматриваемой точки размещения часов, отсчитываемая от поверхности геоида до точки на физической поверхности Земли, находящейся в теле Земли; g – среднее значение ускорения свободного падения вдоль ортометрической высоты, соответствующей точке размещения часов.

Важность развития методов определения разности высот по измерениям разности гравитационных потенциалов между двумя точками на поверхности Земли подчеркивается Резолюцией № 1 Международной Ассоциации Геодезии (IAG, Prague, Czech Republic, 2015) «Об определении и реализации Международной опорной системы высот» [159]. Этой Резолюцией предложено назвать разность гравитационных потенциалов в точке измерения $\Delta\varphi$ и потенциалом на поверхности геоида φ_G геопотенциальным числом C_p :

$$-\Delta\varphi_p = \varphi_G - \varphi_p = C_p = gH_{ОРТ}. \quad (3.67)$$

В результате релятивистские смещения частоты и времени (3.64), вызванные только статическим потенциалом Земли, определяются соотношениями:

$$\frac{\Delta f_p^\varphi}{f_0} = \frac{f_B^\varphi - f_0}{f_0} = \frac{g_0 H_{опт}^0 - g_B H_{опт}^B}{c^2} (1 - 3J_2 P_2) - \frac{W_{zz}}{2c^2} \Delta H_{опт}^2 (1 - 4J_2 P_2), \quad (3.68)$$

$$\Delta \tau_p^\varphi = \frac{g_0 H_{опт}^0 - g_B H_{опт}^B}{c^2} (1 - 3J_2 P_2) \Delta \tau_0 - \frac{W_{zz}}{2c^2} \Delta H_{опт}^2 (1 - 4J_2 P_2) \Delta \tau_0, \quad (3.69)$$

где $\Delta H_{опт} = H_{опт}^0 - H_{опт}^B$ – разность ортометрических высот базовых и ведомых часов.

При известном значении ускорения свободного падения g_0 и ортометрической высоты $H_{опт}^0$ в точке размещения базовых часов, а также измеренном значении g_B и времени наблюдения $\Delta \tau_0$ из этих формул возможно определение ортометрической высоты ведомых часов $H_{опт}^B$. При этом измеряемыми физическими величинами являются либо релятивистское смещение частоты задающих генераторов Δf_p , либо релятивистское смещение шкал времени $\Delta \tau_p$. Этому обстоятельству посвящено значительное число работ [96, 172–188].

Здесь уместно отметить, что в настоящее время методы непосредственного измерения разности гравитационных потенциалов и соответствующей разности ортометрических высот точек над поверхностью геоида неизвестны. Широко используемые на практике нормальные высоты наземных точек отсчитываются от точек на физической поверхности Земли до поверхности квазигеоида, который не совпадает с поверхностью геоида. Ниже (см. раздел 11) будут представлены материалы реальных экспериментов по измерению разности гравитационных потенциалов, проведенных автором с группой помощников на реальных высокостабильных часах.

3.3.3.3. Смещения, вызванные эффектом Допплера II порядка

Установим максимальное значение члена, определяемого разностным эффектом Допплера II порядка в (3.64):

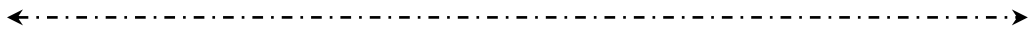
$$\frac{\Delta f_P^D}{f_0} = \frac{\Omega_0^2}{2c^2} (R_0^2 \cos^2 \psi_0 - R_B^2 \cos^2 \psi_B). \quad (3.70)$$

При размещении базовых часов вблизи экватора ($\psi = 0$), а ведомых часов – вблизи полюса ($\psi = 90^\circ$) и при равенстве их высот ($R_0 = R_B = R_e$) относительное смещение частоты оценивается величиной $f_B - f_0 = f_0(1 + 1,1 \cdot 10^{-12})$, т.е. частота задающего генератора «северных» часов выше, чем экваториальных. Отсюда, согласно (3.66б), следует, что $\tau_B - \tau_0 = 1,1 \cdot 10^{-12} \Delta \tau_0$, т.е., как и следовало ожидать, «северные» часы идут быстрее «южных». «Южные» часы, имеющие большую скорость обращения вокруг центра Земли, идут медленнее. На суточном интервале при $\Delta \tau_0 = 8,64 \cdot 10^4$ с релятивистское расхождение шкал времени вследствие эффекта Допплера II порядка составляет +95 нс. При других значениях геоцентрической широты релятивистские сдвиги меньше.

3.3.3.4. Смещения, вызванные моментом импульса Земли

Последний член формулы (3.64а), вызванный влиянием момента импульса вращающейся Земли, на основе формулы (2.66) представим в виде:

$$\frac{\Delta f_P^\Delta}{f_0} = \frac{8}{15} \frac{\mu_e \Omega^2 R_e}{c^4} (\cos^2 \psi_B - \cos^2 \psi_0). \quad (3.71)$$



Этот частотный сдвиг не изменяется во времени. Однако он зависит от разности линейных скоростей часов, которая определяется различием географических широт. Его величина при $\psi_B = 0$, $\psi_0 = \pi/2$ составляет приблизительно 10^{-21} . Относительный сдвиг шкал времени двух часов при времени интегрирования 1 год ($\sim 3 \cdot 10^7$ с) составляет около $3 \cdot 10^{-2}$ пс. Рассмотренные смещения представляют собой частотно-временные аналоги известного в общей теории относительности баллистического «гравитомагнитного» эффекта Лензе-Тирринга для двух тел, движущихся по разным эллиптическим орбитам [153].

3.3.4. Приливные релятивистские смещения частоты и времени наземных часов

Взаимные релятивистские смещения шкал частоты и времени пары наземных часов, возникающих вследствие приливных явлений, определим из формул (3.13) и (3.10) на основе формул (2.67)–(2.69) в виде:

$$\frac{\Delta f_P}{f_0} = \frac{f_B - f_0}{f_0} = \frac{1}{c^2} \sum_i (\delta\varphi_0^i - \delta\varphi_B^i), \quad (a)$$

$$\Delta\tau_P = \frac{1}{c^2} \int_{\tau_0} \frac{\Delta f_P}{f_0} d\tau_0 = \frac{1}{c^2} \int_{\tau_0} \sum_i (\delta\varphi_0^i - \delta\varphi_B^i) d\tau_0, \quad (б) \quad (3.72)$$

где индекс $i = M; S; J$ обозначает смещения, вызванные влиянием Луны M , Солнца S и других небесных тел J (Юпитера и др.).

Для последующего анализа влияния приливного потенциала на частоту и время используем выражение (2.69). Суммарный потенциал на поверхности Земли определится суммой:

$$\varphi_C = \varphi_e + \sum_i \delta\varphi^i. \quad (3.73)$$

Поскольку при воздействии приливных потенциалов происходит деформирование Земли и, как следствие, перераспределения ее массы, то изменяется и собственный потенциал планеты. При этом дополнительный приливообразующий потенциал составляет:

$$\delta\varphi_k^i = k\delta\varphi^i, \quad (3.74)$$

где $k = 0, 2$ – так называемое *второе число Лява* [146].

←----->

Приливный потенциал (2.69) вызывает изменение уровенной поверхности (уровня эквипотенциальной поверхности геоида), что хорошо наблюдается на акватории океана. Это изменение составляет:

$$\zeta_0 = \frac{\delta\varphi^i}{g}, \quad (3.75)$$

где $g = \mu_e / R_e^2$ – ускорение свободного падения.

Уровень поверхности твердой упругой Земли «тянется» за этим изменением, однако в точности его не повторяет. В первом приближении приливное изменение высоты твердой поверхности Земли, на которой размещены исследуемые часы, определяется формулой:

$$\zeta = h\zeta_0 = h \frac{\delta\varphi^i}{g}, \quad (3.76)$$

где $h = 0,5$ – так называемое *первое число Лява* [146].

Вследствие изменения высоты поверхности Земли изменяется и потенциал ГПЗ на ее поверхности. Приливное увеличение радиуса Земли (подъем точки поверхности) должно приводить к незначительному уменьшению потенциала ГПЗ. Действительно, принимая форму Земли в виде шара, потенциал ГПЗ с учетом (3.75) и (3.76) в точке размещения часов при условии $\zeta \ll R_e$ получаем в виде:

$$\varphi_e = \frac{\mu_e}{R_e + \zeta} \approx \frac{\mu_e}{R_e} - h\delta\varphi^i, \quad (3.77)$$

В результате, прибавляя к (3.73) дополнительный потенциал (3.74) и используя выражение для φ_e (3.77), соотношение для суммарного потенциала (3.73) приводим к виду:

$$\varphi_C = \frac{\mu_e}{R_e} + \gamma \sum_i \delta\varphi^i, \quad (3.78)$$

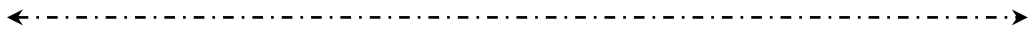
где $\gamma = 1 + k - h = 0,7$.

Отсюда следует итоговое выражение для суммарного приливного потенциала в некоторой точке k на поверхности Земли:

$$\delta\varphi_k = \gamma \sum_i \delta\varphi^i, \quad (3.78a)$$

а также разности потенциалов между точками установки часов (3.59):

$$\varphi_0 - \varphi_B = \gamma \sum_i (\delta\varphi_0^i - \delta\varphi_B^i). \quad (3.79)$$



Оценку приливных смещений частоты и времени проведем на основе формул (3.72 а,б), которые с учетом (3.79) приобретают вид:

$$\frac{\Delta f_P}{f_0} = \frac{f_B - f_0}{f_0} = \frac{\gamma}{c^2} \sum_i (\delta\varphi_0^i - \delta\varphi_B^i), \quad (a)$$

$$\Delta\tau_P = \frac{\gamma}{c^2} \int_{\tau_0} \sum_i (\delta\varphi_0^i - \delta\varphi_B^i) d\tau_0. \quad (б) \quad (3.80)$$

В формуле для приливного потенциала (2.69) единственной переменной можно считать только зенитное расстояние возмущающего светила. Преобразование этой формулы с учетом этого условия проведем с использованием известных соотношений сферической тригонометрии [145]:

$$\cos z = \sin \psi \sin \delta + \cos \psi \cos \delta \cos t_\odot, \\ \cos 2z = 2 \cos^2 z - 1,$$

где ψ – широта места установки часов на Земле; δ – склонение светила; t_\odot – часовой угол светила. В результате этих преобразований суммарный приливный потенциал (3.78а) получаем в виде:

$$\delta\varphi_k^i = \gamma D_i \left[3 \left(\sin^2 \delta_i - \frac{1}{3} \right) \left(\sin 2\psi_k - \frac{1}{3} \right) + \right. \\ \left. + \cos 2t_k^i \sin 2\delta_i \sin 2\psi_k + \cos 2t_k^i \cos^2 \delta_i \cos^2 \psi \right], \quad (3.81)$$

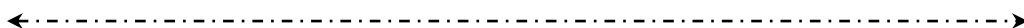
где $i = M, S; k = 0; B$.

Используя это выражение, можно найти искомые взаимные релятивистские смещения частоты и времени двух часов (3.80) как сумму приливных воздействий ближайших небесных тел. В частности, для любого из этих тел выражение для разностного релятивистского частотного сдвига (3.80 а) имеет вид:

$$\frac{f_B - f_0}{f_0} = \frac{\Delta f_A}{f_0} + \frac{\Delta f_B}{f_0} + \frac{\Delta f_C}{f_0}, \quad (3.82)$$

где с учетом связи $\sin^2 \delta = (\cos 2\delta + 1) / 2$ имеем:

$$\frac{\Delta f_A}{f_0} = \frac{3\gamma D}{2c^2} \left[\left(\sin^2 \psi_0 - \frac{1}{3} \right) \left(\cos 2\delta_0 + \frac{1}{3} \right) - \left(\sin^2 \psi_B - \frac{1}{3} \right) \left(\cos 2\delta_B + \frac{1}{3} \right) \right]; \quad (3.83)$$



$$\frac{\Delta f_B}{f_0} = \frac{\gamma D}{c^2} (\sin 2\psi_0 \sin 2\delta_0 \cos t_\odot^0 - \sin 2\psi_B \sin 2\delta_B \cos t_\odot^B); \quad (3.84)$$

$$\frac{\Delta f_C}{f_0} = \frac{\gamma D}{c^2} (\cos^2 \psi_0 \cos^2 \delta_0 \cos 2t_\odot^0 - \cos^2 \psi_B \cos^2 \delta_B \cos 2t_\odot^B). \quad (3.85)$$

Проанализируем формулы (3.83)–(3.85). Поскольку для обоих часов склонение светила одинаковое, то при размещении их на разных широтах формула (3.83) преобразуется к виду:

$$\frac{\Delta f_A}{f_0} = \frac{3\gamma D}{2c^2} \left(\cos 2\delta + \frac{1}{3} \right) (\sin^2 \psi_0 - \sin^2 \psi_B). \quad (3.86)$$

Выражение во второй скобке есть величина постоянная, поэтому изменение этого смещения происходит только по причине изменения склонения светила. Поэтому период изменения рассматриваемой составляющей приливного смещения частоты составляет полгода для Солнца и полмесяца – для Луны. Учитывая, что для Луны $D_M = 2,6206 \text{ м}^2\text{с}^{-2}$; для Солнца $D_S = 1,2035 \text{ м}^2\text{с}^{-2}$ [146], максимальное значение частотного смещения, определяемого величиной коэффициента перед формулой (3.86), для Луны составляет $3 \cdot 10^{-17}$, для Солнца – $1,4 \cdot 10^{-17}$.

Смещение (3.84) преобразуем при условии установки часов на одной и той же широте. В результате получаем:

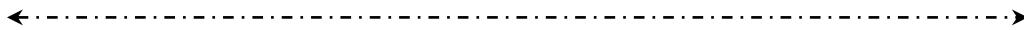
$$\frac{\Delta f_B}{f_0} = \frac{2\gamma D}{c^2} \sin 2\psi_0 \sin 2\delta_0 \sin \left(t_\odot^0 + \frac{\Delta t_\odot}{2} \right) \sin \frac{\Delta t_\odot}{2}, \quad (3.87)$$

где $\Delta t_\odot = t_\odot^0 - t_\odot^B$ – разность часовых углов светила для исследуемых точек 0 и B из-за географического разноса по долготе. Отсюда следует, что данное смещение имеет суточный период колебания, причем максимального значения достигает при разносе часов по долготе, равном 180° . Амплитуда колебания разности частот $2\gamma D / c^2$ составляет: для Луны – $4 \cdot 10^{-17}$, для Солнца – $1,8 \cdot 10^{-17}$.

Смещение (3.85) при тех же условиях преобразуем к виду:

$$\frac{\Delta f_C}{f_0} = -\frac{2\gamma D}{c^2} \cos^2 \psi_0 \cos^2 \delta_0 \sin(2t_\odot^0 + \Delta t_\odot) \sin \Delta t_\odot. \quad (3.88)$$

Отсюда видно, что данное смещение имеет полусуточный период колебания, а максимального значения достигает при разносе часов по долготе на 90° . Амплитуда полусуточного колебания частоты равна амплитуде его суточного колебания.



3.3.5. Релятивистские смещения частоты и времени, вызванные неравномерностью вращения Земли

Как уже отмечалось выше, угловая скорость вращения Земли отличается от своего номинального значения вследствие неравномерности суточного вращения (см. формулы (2.86) – (2.87)), а также вследствие прецессии и нутации оси вращения Земли, а также конусообразующего движения линии полюсов Земли вокруг её оси вращения (формулы (2.91)). По этим причинам в формуле для взаимного частотного смещения задающих генераторов двух разнесенных часов (3.59) и взаимного смещения шкал их времени (3.63) появились составляющие [153]:

$$\frac{\Delta f_P^\Omega}{f_0} = -\frac{1}{f_0} \sum_{i=1}^3 \delta f_i^\Omega, \quad (a) \quad \Delta \tau_P^\Omega = -\frac{1}{f_0} \sum_{i=1}^3 \int_{\tau_0} \delta f_i^\Omega d\tau_0, \quad (б) \quad (3.89)$$

в которых частотные сдвиги δf_i^Ω определяются формулами (3.60) – (3.62).

Для оценки величины релятивистского смещения δf_1^Ω , вызванного влиянием Ω_y , соотношение (3.60) преобразуем при условиях $\psi_B = \psi_0 = \psi$ и $\lambda_B = \lambda_0 + \pi$ (часы находятся на одной широте, но их долгота отличается на 180°). В результате при $R_B = R_0 = R_e = 6,4 \cdot 10^6$ м имеем:

$$\frac{\delta f_1}{f_0} = \frac{\Omega_0 R_e^2}{c^2} (\Omega_y^{PP} + \Omega_y^H + \Omega_y^N) \sin 2\psi \sin(\Omega_0 \tau + \lambda_B). \quad (3.90)$$

Оценка амплитуд вкладов каждой составляющей неравномерности вращения Земли в относительное смещение частоты дает следующие результаты: по нутации – $1,2 \cdot 10^{-16}$; по отклонению полюсов – $0,6 \cdot 10^{-17}$; по прецессии – $1 \cdot 10^{-19}$. Эти эффекты имеют суточный период колебания и их амплитуда максимальна при размещении часов на широте 45° и разнице в долготе на 180° .

Влияние угловой скорости Ω_x определяется формулой, следующей из (3.61) при тех же условиях:

$$\frac{\delta f_2}{f_0} = \frac{\Omega_0 R_e^2}{c^2} (\Omega_x^H + \Omega_x^N) \sin 2\psi \sin(\Omega_0 \tau + \lambda_B). \quad (3.91)$$

←----->

Оценки вкладов Ω^H , Ω^P по величине аналогичны предыдущим, однако здесь нет влияния прецессии.

Для оценки влияния неравномерности вращения по оси OZ формулу (3.62) упростим, приняв условие $\psi_0 = 0^\circ$, $\psi_B = 90^\circ$ (одни часы – на экваторе, другие – вблизи полюса):

$$\frac{\delta f_3}{f_0} = -\frac{\Omega_0 R_e^2}{c^2} (\Delta\Omega_z + \Omega_z^{PP}). \quad (3.92)$$

При условии, что $\Delta\Omega_z$ в последние годы изменялась, как отмечалось выше, в пределах $-187 \cdot 10^{-10} \div -3 \cdot 10^{-9}$, ее вклад в сдвиг частоты находится в пределах $1 \cdot 10^{-16} \div 6 \cdot 10^{-16}$. Вклад прецессии при этом составляет $1 \cdot 10^{-19}$. Важной особенностью смещения частоты (3.92) является ее независимость от суточного вращения.

Интегрирование смещений шкал времени (3.89) на основе частотных смещений (3.90)–(3.92) дает следующие результаты:

1) по влиянию составляющей угловой скорости Ω_y :

$$\delta\tau_1 = \int \frac{\delta f_1}{f_0} d\tau_0 = \frac{R_e^2}{c^2} (\Omega_y^H + \Omega_y^P + \Omega_y^{PP}) \sin 2\psi \cos(\Omega_0 \tau_0 + \lambda_B). \quad (3.93)$$

Оценка амплитуды периодических суточных эффектов, определяемых этой формулой, составила: по нутации – 16,4 пс; по отклонению полюсов – 8 пс; по прецессии – $1,4 \cdot 10^{-3}$ пс;

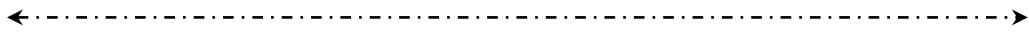
2) по влиянию составляющей угловой скорости Ω_x : если не учитывать очень малый эффект прецессии, то можно считать $\delta\tau_1 = \delta\tau_2$;

3) по влиянию изменений угловой скорости, направленной вдоль оси OZ:

$$\delta\tau_3 = \int \frac{\delta f_3}{f_0} d\tau_0 = \frac{\Omega_0 R_e^2}{c^2} (\Delta\Omega_z + \Omega_z^{PP}) \Delta\tau_0. \quad (3.94)$$

При среднем значении изменения модуля угловой $\Delta\Omega_z = -100 \cdot 10^{-10} \text{ с}^{-1}$ и интервале интегрирования 3 месяца (четверть периода изменения $\Delta\Omega_z$) эффект смещения шкалы времени составляет около 2500 пс. На практике этот изменяющийся во времени эффект необходимо вычислять путем численного интегрирования по текущим данным, поступающим от Службы вращения Земли.

Эффект прецессии, вычисляемый по формуле (2.88), на интервале 1 год составляет 3,1 пс.



Таким образом, проведенный релятивистский анализ показывает, что шкалы времени и частоты пространственно разнесенных наземных высокостабильных атомных часов испытывают достаточно значимое влияние неравномерности вращения Земли. Эти смещения могут быть измерены с помощью высокостабильных стандартов частоты и времени в прецизионных метрологических экспериментах. Годовые вариации модуля угловой скорости вызывают относительное релятивистское изменение частоты задающего генератора часов в пределах $(1 \div 6) \cdot 10^{-16}$, а смещение шкалы времени на 3-х месячном периоде может превышать 2500 пс. Нутационные относительные смещения частоты имеют период 1 сутки и амплитуду $1,2 \cdot 10^{-16}$. Соответствующая амплитуда нутационных суточных колебаний сдвига времени составляет 16,4 пс. Относительный частотный сдвиг, вызванный периодическим отклонением линии полюсов, имеет амплитуду суточных колебаний $6 \cdot 10^{-18}$. Соответствующая амплитуда колебания сдвига времени составляет 8 пс. Влияние прецессии оси вращения Земли на относительное изменение частоты и на смещение времени незначительно и на периоде накопления 1 год оценивается величинами соответственно 10^{-19} и 3,1 пс.

3.4. Релятивистские смещения частоты и времени в наземных мобильных атомных часах

3.4.1. Общее решение

Рассмотрим релятивистские эффекты взаимного смещения шкал времени и частоты мобильных наземных атомных часов и наземных стационарных часов [157]. Для этого введем в рассмотрение подвижный (мобильный) хранитель частоты и времени T_m со шкалой собственного и координатного времени τ_m и t_m , а также стационарный (базовый) хранитель T_0 шкал времени τ_0 и t_0 .

Закон изменения собственного (действительного, измеряемого) времени для наземного мобильного хранителя частоты и времени, движущегося с небольшой скоростью \vec{V} относительно поверхности Земли, выведем применительно к вращающейся вместе с Землей геоцентрической земной системе координат (ITRS). Метрический тензор в неравномерно вращающейся земной системе ITRS, определяемый формулами (2.98) и (2.99), представим в общем виде:

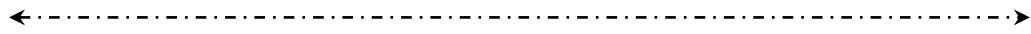
$$g_{ik} = \begin{bmatrix} -\left(1 - \frac{2\Phi^2}{c^2}\right) & G_1 & G_2 & G_3 \\ G_1 & \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right) & 0 & 0 \\ G_2 & 0 & \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right) & 0 \\ G_3 & 0 & 0 & \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right) \end{bmatrix}, \quad (3.95)$$

где ненулевые компоненты определяются в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} g_{00} &= -\left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right); g_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 + \frac{2\varphi}{c^2}, & \alpha = \beta, \\ 0, & \alpha \neq \beta; \end{cases} \\ g_{0\alpha} = G_\alpha &= \frac{[\vec{\Omega}\vec{R}]_\alpha}{c} \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right); G_1 = \frac{\Omega_y z}{c} - \frac{\Omega_z y}{c} \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right); \\ G_2 &= \frac{\Omega_x z}{c} \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right) - \frac{\Omega_x z}{c}; G_3 = \frac{1}{c} (\Omega_x y - \Omega_y x); \\ \Phi &= \varphi + \frac{1}{2} G_\alpha G^\alpha; \varphi = \varphi_e + \Delta\varphi_M + \Delta\varphi_S. \end{aligned} \right\} \quad (3.96)$$

Эта форма представления метрического тензора вращающейся системы ITRS позволяет учитывать влияние приливов Луны и Солнца ($\Delta\varphi_M, \Delta\varphi_S$, формулы (2.67) и (2.76)), неравномерность вращения Земли ($\Omega_x, \Omega_y, \Delta\Omega_z$, формулы (2.86), (2.87), (2.91)), а также неоднородность статического гравитационного потенциала Земли φ_e , который определяется в общем случае соотношениями (2.54) – (2.56).

Искомое релятивистское смещение частоты задающего генератора мобильных часов f_m относительно частоты базовых часов f_0 определяется из соотношения (3.13), а соответствующее расхождение шкал времени – по формуле (3.10).



Входящий в эти соотношения коэффициент преобразования шкалы времени мобильных часов θ_m определяется общей формулой (3.8), а коэффициент преобразования шкалы стационарных базовых часов θ_0 при $V_0 = 0$ – формулой (3.9а). В результате вычислений, пренебрегая членами порядка $O(c^{-4})$, получаем:

$$\theta_0 = 1 - \frac{\Phi_0}{c^2}; \quad \theta_m = 1 - \frac{\Phi_m}{c^2} - \frac{1}{c} \vec{G}_m \vec{V} - \frac{V^2}{2c^2}, \quad (3.97)$$

где $\Phi_0 = \varphi_{e0} + \Delta\varphi_{M0} + \Delta\varphi_{S0} + \frac{1}{2} \vec{G}_0^2$ – статический гравитационный потенциал в точке размещения базовых часов; $\Phi_m = \varphi_{em} + \Delta\varphi_{Mm} + \Delta\varphi_{Sm} + \frac{1}{2} \vec{G}_m^2$ – текущий статический потенциал вдоль трассы движения мобильных часов; \vec{V} – скорость мобильных часов относительно поверхности Земли; $\vec{G}_0 = [\vec{\Omega} \vec{R}_0] / c$; $\vec{G}_m = [\vec{\Omega} \vec{R}_m] / c$ – векторные потенциалы в точках с радиус-векторами в системе ITRS соответственно базовых и мобильных часов \vec{R}_0, \vec{R}_m .

Для получения обзримых результатов исключим далее из рассмотрения эффекты смещения частоты и времени, вызванные влиянием неравномерности вращения Земли и лунно-солнечных приливов. Дело в том, что эти эффекты мало зависят от параметров движения наземных часов и поэтому оценки по их влиянию, сделанные для стационарных часов, остаются справедливыми и для мобильных.

Поэтому, оставляя для анализа в формулах (3.97) лишь неоднородность потенциала ГПЗ в виде (2.54) – (2.56), релятивистскую разность частот задающих генераторов стационарных и мобильных часов, в соответствии с (3.13), получаем в виде:

$$\frac{\Delta f_P}{f_0} = \frac{\varphi_0^n - \varphi_m^n}{c^2} + \frac{\Delta\varphi_0^{an} - \Delta\varphi_m^{an}}{c^2} + \frac{\Omega^2}{2c^2} [(x_0^2 + y_0^2) - (x_m^2 + y_m^2)] - \frac{V^2}{2c^2} - \frac{\Omega}{c^2} (x_m V_y - y_m V_x) \quad (3.98)$$

←----->

где нормальный и аномальный потенциалы ГПЗ $\varphi_m^n, \Delta\varphi_m^{an}$, текущие координаты мобильных часов x_m, y_m и вектор скорости подвижных часов $\vec{V} = \{V_x V_y V_z\}$ являются функциями времени τ_0 (условимся, что для упрощения записи индексы $n; an$, обозначающие нормальный и аномальный потенциалы ГПЗ, могут располагаться вверху или внизу). По этой причине релятивистский сдвиг частоты задающего генератора мобильных часов является переменным вдоль маршрута их движения.

В сферических координатах ρ, ψ, λ последнее соотношение принимает форму:

$$\frac{\Delta f_P}{f_0} = \frac{\varphi_0^n - \varphi_m^n}{c^2} + \frac{\varphi_0^{an} - \varphi_m^{an}}{c^2} + \frac{\Omega^2}{2c^2} (\rho_0^2 \cos^2 \psi_0 - \rho_m^2 \cos^2 \psi_m) - \frac{V^2}{2c^2} - \frac{\Omega \rho_m}{c^2} \Delta V \cos \psi_m \quad (3.99)$$

где $\Delta V = V_y \cos \lambda_m - V_x \sin \lambda_m$, или $\Delta V = V \cos \alpha_m$ – проекция вектора скорости \vec{V} на вектор $[\vec{\Omega} \vec{R}_m]$, α_m – угол между этими векторами.

В формулах (3.98) и (3.99) первые три слагаемые определяют частотные гравитационные сдвиги, вызванные разностью гравитационных потенциалов нормального, аномального и центробежного поля Земли между базовыми и мобильными часами, а предпоследний член описывает эффект Допплера II порядка. Физический смысл последнего установим на основе формулы для θ_m (3.97):

$$\frac{\delta f_\Omega}{f_0} = \frac{1}{c} \vec{G}_m \vec{V} \approx \frac{1}{c^2} [\vec{\Omega} \vec{R}_m] \vec{V} = \frac{\vec{\Omega}}{c^2} [\vec{R}_m \vec{V}] = \frac{\vec{\Omega}}{c^2} \left[\vec{R}_m \frac{d\vec{R}_m}{d\tau_0} \right] = \frac{2\vec{\Omega}}{c^2} \cdot \frac{d\vec{S}_m}{d\tau_0}, \quad (3.100)$$

где $d\vec{S}_m$ – элемент площади, заключенной между начальным и конечным положением вектора положения \vec{R}_m и вектором маршрута $d\vec{R}_m$ мобильного стандарта. Эффект смещения частоты (3.100) вызван эффектом Саньяка и положителен, когда скалярное произведение $[\vec{\Omega} \vec{R}_m] \vec{V}$ положительно (мобильный стандарт частоты движется на восток).

Релятивистский эффект смещения шкалы времени мобильных часов относительно базовых определяется из соотношения (3.10) с учетом формулы (3.97):

$$\Delta\tau_p = \Delta\tau_m - \Delta\tau_0 = \Delta\tau_p^0 - \frac{1}{c^2} \int_{\tau_{01}}^{\tau_{02}} \left[(\varphi_m^n + \varphi_m^{an}) + \frac{\Omega^2}{2} (x_m^2 + y_m^2) + \frac{1}{2} V^2 \right] d\tau_0 - \frac{2\Omega S_V}{c^2}, \quad (3.101)$$

где $\Delta\tau_p^0 = \frac{\tau_0}{c^2} \left[(\varphi_0^n + \varphi_0^{an}) + \frac{1}{2} \Omega^2 (x_0^2 + y_0^2) \right]$ – линейно нарастающая составляющая смещения, определяемая положением базовых часов; последний член определяет эффект Саньяка, который изменяется во времени; $S_V = \frac{1}{2} \int_{xy_m} (x_m dy_m - y_m dx_m)$ – площадь проекции треугольника с вершинами в точках $0, \vec{R}_m, \vec{R}_0$ на плоскость экватора. Подынтегральное выражение в формуле (3.101) является функцией базового времени τ_0 , поскольку $\rho_m = \rho_m(\tau_0)$; $x_m = x_m(\tau_0)$; $y_m = y_m(\tau_0)$ и $\vec{V} = \vec{V}_m(\tau_0)$.

Вычисление текущего значения релятивистского сдвига частоты в виде (3.98)–(3.100) выполняется на основе текущих данных о координатах и скорости мобильных часов, получаемых от бортовой навигационной аппаратуры потребителей (НАП) GLONASS/GPS. По этим же данным вычисляется текущее смещение бортовой шкалы времени движущихся часов путем численного интегрирования соотношения (3.101). При этом шаг интегрирования целесообразно выбирать равным или превышающим интервал съема информации с навигационного приемника [25].

3.4.2. Релятивистская синхронизация мобильных часов и обеспечение ее точности

Для обеспечения непрерывной синхронизации мобильных часов, находящихся на трассе, с базовыми часами, оставшимися в начальной точке маршрута, релятивистские смещения частоты и времени (3.98) и (3.101) необходимо вычислить по текущим показаниям НАП, а затем скомпенсировать [25, 153, 157]. В этом случае достигается полное и непрерывное вдоль трассы движения совпадение (с точностью до инструментальных расстройек) шкал времени мобильных и базовых часов. Процесс синхронизации шкал частоты и времени путем компенсации их релятивистских сдвигов будем называть *релятивистской синхронизацией*.

←----->

Методы компенсации релятивистских смещений шкал частоты и времени рассмотрены в разделе 3.1.3. Корректирующую поправку $\Delta\tau_p^* = -\Delta\tau_p$ в текущую шкалу времени мобильных часов можно вносить как непрерывно на маршруте, так и однократно в конце маршрута. В первом случае процесс вычисления поправок по данным НАП и их цифровой ввод в шкалу мобильных часов ведутся непрерывно, и поэтому на маршруте движения постоянно поддерживается синхронность шкал мобильного и базового хранителей времени. Во втором случае задача компенсации решается в конце маршрута по накопленным за время движения навигационным данным.

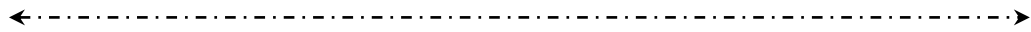
Метод компенсации на основе коррекции частоты путем внесения корректирующей поправки $\Delta f_p^* = -\Delta f_p$ целесообразен для синхронизации стандартов, находящихся на стоянке. Действительно, при $V = 0$, согласно (3.98), релятивистский сдвиг частоты постоянен, поскольку определяется только неизменными гравитационными потенциалами в точках размещения стандартов. Соответственно постоянна и корректирующая поправка частоты, которая вводится однократно.

Вторая возможность использования этого метода открывается при одновременном постоянстве разности потенциалов и квадратов скоростей вдоль трассы движения мобильных часов. Переходя в формуле (3.97) от скорости часов во вращающейся геоцентрической системе отсчета ITRS к скорости в геоцентрической невращающейся небесной системе с помощью соотношения $[\vec{\Omega}R_i] + \vec{V}_i = \vec{V}_{abs_i}$ ($i = 0; m$; V_{abs_i} – скорость рассматриваемых часов в невращающейся системе), формулу (3.98) получаем в виде (потенциал ГПЗ не изменяется при переходе в другую систему отсчета):

$$\frac{\Delta f_p}{f_0} = \frac{f_m - f_0}{f_0} = \frac{\varphi_0 - \varphi_m}{c^2} + \frac{(V_{abs}^2)_0 - (V_{abs}^2)_m}{2c^2}. \quad (3.102)$$

Условие постоянства правой части этого соотношения выполняется при размещении обоих часов на поверхности океана, где потенциалы равны потенциалу геоида ($\varphi_0 = \varphi_m = \varphi_G$), и при перемещении надводных мобильных часов с постоянной скоростью вдоль географической параллели. В другом варианте поставленное условие выполняется при перемещении часов на борту самолета над поверхностью океана вдоль одной и той же параллели с постоянной скоростью на неизменной высоте.

Однако более интересным практическим вариантом является размещение мобильных часов на борту космического аппарата, движущегося по круговой орбите. Такой вариант соответствует космическим системам



связи, дистанционного зондирования Земли, космической навигации и др. При этом для строго круговой орбиты условие постоянства смещения (3.102) выполняется независимо от пространственной ориентации и высоты орбиты. Дело в том, что для круговой орбиты спутника и потенциала Земли в виде шара справедливо соотношение

$$(V_{abs}^2)_m = \frac{\mu_e}{\rho_m}, \quad (3.103)$$

а поэтому, используя формулы (3.102) и (3.103), корректирующую поправку по частоте получаем в виде:

$$\frac{\Delta f_P^*}{f_0} = -\frac{\Delta f_P}{f_0} = -\frac{1}{c^2} \left[\varphi_0 + \frac{1}{2} (V_{abs}^2)_0 - \frac{3}{2} \frac{\mu_e}{\rho_m} \right] = const. \quad (3.104)$$

Компенсация релятивистского расхождения бортового и наземного времени с помощью постоянного сдвига частоты задающего генератора реализована, в частности, в спутниковых бортовых часах навигационных систем GLONASS и GPS [29–31] (см. раздел 1.3.2.4).

Точность компенсации релятивистских эффектов определяется точностью их вычисления по формулам (3.98)–(3.101), которая в свою очередь определяется точностью навигационных определений. Космические навигационные системы GLONASS/GPS позволяют с высокой точностью определять координаты и скорость ПКЧ на траектории их перемещения в режиме реального времени, на основании которых можно также в режиме реального времени вычислить релятивистскую поправку на шкалу времени движущихся часов. Погрешности современных широко используемых навигационных приемников (например, типа Trimble GeoExplorer 6000 GeoXH) достаточно малы: случайная ошибка определения скорости $\sigma_v = 5$ см/с, ошибка определения координат в дифференциальном режиме $\sigma_x = 1$ м. Частота съема информации – 1 Гц. Найдем при этих условиях относительную погрешность вычисления наиболее значимых составляющих рассматриваемых эффектов, модули которых определяются потенциалом и квадратом скорости: $\Delta f_P^\varphi = \frac{f_0}{c^2} \cdot \frac{\mu}{\rho}$ и $\Delta f_P^v = \frac{f_0}{2c^2} V^2$. Соответствующие относительные случайные погрешности определяются соотношениями:

$$\frac{\sigma f_P^\varphi}{f_0} = \frac{\Delta f_P^\varphi}{f_0} \cdot \frac{\sigma \rho}{\rho}; \quad \frac{\sigma f_P^v}{f_0} = \frac{\Delta f_P^v}{f_0} \cdot \frac{2\sigma V}{V}. \quad (3.105)$$

←----->

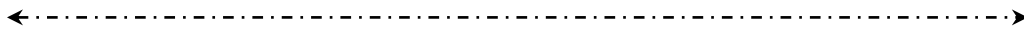
Отсюда для точки на экваторе при $\rho = X_e = 6,378 \cdot 10^6$ м, $\sigma_x = 1$ м получаем $\frac{\sigma f_P^\varphi}{f_0} \approx 10^{-16}$, при $V = 400$ м/с, $\sigma V = 5$ см/с имеем $\frac{\sigma f_P^v}{f_0} \approx 10^{-16}$.

Ошибки вычисления смещения шкалы времени на суточном интервале не превысят в обоих случаях 10 пс. Погрешности вычисления других составляющих формул (3.98) – (3.101), содержащих ΩR и V , существенно ниже, поскольку их величина значительно меньше.

Точность учета других эффектов смещения времени и частоты, вызванных влиянием гравитационного поля Земли, определяется погрешностью учета второй зональной гармоники нормального поля и длиной ряда разложения аномального потенциала в виде сферических функций (2.54)–(2.56). Вторая зональная гармоника потенциала φ_{n2} , определяемая формулой (2.55), максимальна вблизи полюса ($\psi = 90^\circ$) и относительное значение вызываемого ей смещения у поверхности Земли достигает $\varphi_{n2} / c^2 \approx 7,5 \cdot 10^{-13}$. При установленной выше точности навигационного обеспечения ошибка вычисления этого эффекта не превысит 10^{-18} .

Порядок и степень современных моделей разложения аномального потенциала достигает сотен и даже тысяч. Одна из совершенных моделей гравитационного поля Земли EGM2008 содержит $n \times m = 2159 \times 2159$ членов разложения [144]. Вместе с тем, при решении конкретных практических задач этот ряд может быть существенно сокращен за счет отбрасывания пренебрежимо малых членов разложения. Так, коэффициенты при третьей и четвертой зональных гармониках составляют соответственно, $J_{30} = -2,5 \cdot 10^{-6}$ и $J_{40} = -1,6 \cdot 10^{-6}$. Соответствующие относительные гравитационные эффекты составляют $-2 \cdot 10^{-15}$ и $-1,1 \cdot 10^{-15}$, что вызывает расхождение шкал времени на суточном интервале около -17 пс и -10 пс соответственно. С ростом номера зональной гармоники её коэффициент уменьшается. Начиная с 13-й зональной гармоники, эти эффекты примерно на порядок меньше, и их можно отбросить без потери точности вычислений. Коэффициенты при зональных и тессеральных гармониках также достаточно малы, и они уменьшаются с ростом их номера и порядка (например, $C_{22} = 1,57 \cdot 10^{-6}$; $S_{22} = -0,9 \cdot 10^{-6}$ и т.д.).

На основе изложенного можно сделать заключение о достаточно высоких потенциальных возможностях метода релятивистской синхронизации. В разделе 11 приводятся результаты эксперимента, подтверждающие этот вывод.



3.4.3. Свойства релятивистских эффектов в наземных мобильных квантовых часах

При планировании метрологических экспериментов и маршрута перемещения квантовых часов целесообразно учитывать свойства релятивистских эффектов в особых режимах движения.

3.4.3.1. Движение обоих часов по морской (океанской) поверхности

Поскольку поверхность моря (океана) является эквипотенциальной поверхностью геоида, то полный гравитационный потенциал в любой его точке одинаков и равен потенциалу геоида ($\Phi_0 = \Phi_m = \Phi_G$). Поэтому, согласно (3.98 и (3.101), получаем:

$$\frac{\Delta f_p}{f_0} = -\frac{V^2}{2c^2} - \frac{\Omega}{c^2}(x_m V_y - y_m V_x), \quad (3.106)$$

$$\Delta \tau_p = -\frac{1}{2c^2} \int_{\tau_{01}}^{\tau_{02}} V^2 d\tau_0 - \frac{2\Omega S_{\nabla}}{c^2}. \quad (3.107)$$

Отсюда следует, что для неподвижных часов (режим дрейфа при $V = 0$) $\Delta f_p = 0$; $\Delta \tau_p \neq 0$. Этот режим может быть удобен для высокоточного сличения частот удаленных неподвижных генераторов на акваториях с неизвестным маршрутом перемещения.

3.4.3.2. Стационарное размещение часов на суше ($V = 0$)

Разместим пару часов на суше неподвижно в точках с разными гравитационными потенциалами. В этом случае из (3.98) и (3.101) получаем:

$$\frac{\Delta f_p}{f_0} = \frac{\varphi_0 - \varphi_m}{c^2} + \frac{\Omega^2}{2c^2} \left[(x_0^2 + y_0^2) - (x_m^2 + y_m^2) \right], \quad (3.108)$$

$$\Delta \tau_p = \Delta \tau_p^0 - \frac{\varphi_m}{c^2} \Delta \tau_0 - \frac{1}{c^2} \left[\frac{\Omega^2}{2} (x_m^2 + y_m^2) + \Omega (x_0 y_m - x_m y_0) \right] \Delta \tau_0. \quad (3.109)$$

←----->

Отсюда при известных координатах обоих часов и интервале интегрирования $\Delta\tau_0$ на основе измерений релятивистских (в данном случае чисто гравитационных) смещений Δf_p и $\Delta\tau_p$ находится неизвестный потенциал φ_m в точке стационарного размещения мобильных часов или разность потенциалов в двух точках. Этот вариант измерений может быть использован для уточнения значения аномального гравитационного поля в точках стояния мобильных часов, а также для измерения разности их высот. Непосредственные измерители разности гравитационных потенциалов в настоящее время неизвестны.

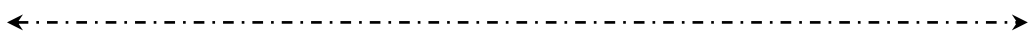
3.4.3.3. Движение мобильных часов по замкнутому контуру с возвращением мобильных часов в исходную точку

В этом случае интегрирование соотношения (3.101) по замкнутому контуру дает следующий результат:

$$\Delta\tau_p = \frac{1}{c^2} \oint_{\tau_0} \left(\Phi_0 - \Phi_m + \frac{V^2}{2} \right) d\tau_0 + \frac{2\vec{\Omega}\vec{S}_\odot}{c^2}, \quad (3.110)$$

где последнее слагаемое определяет гироскопический временной сдвиг часов, движущихся по замкнутому контуру; скалярное произведение $\vec{\Omega}\vec{S}_\odot$ определяется площадью проекции замкнутого контура маршрута движения на плоскость экватора. Важно отметить, что гироскопический сдвиг определяется только экваториальной проекцией площади кольцевого маршрута и не зависит от его формы и скорости перемещения вдоль него. Иначе говоря, он не зависит от вида используемого транспорта, а также количества и продолжительности остановок на маршруте.

При возвращении в исходную точку по тому же маршруту ($S_\odot = 0$) релятивистское смещение времени определяется интегралом от текущей разности гравитационных потенциалов и текущей скорости перемещения. В случае инверсного движения по морской поверхности ($S_\odot = 0$, $\Phi_0 = \Phi_m$) остаточное релятивистское смещение зависит только от квадрата текущей скорости движения на маршруте и легко рассчитывается по навигационным данным.



3.4.3.4. Свойство физической универсальности гироскопического эффекта

Еще одно замечательное свойство гироскопического эффекта заключается в его физической универсальности. Дело в том, что известное множество его самых разных физических реализаций описывается с помощью одной и той же формулы временного запаздывания во вращающейся системе:

$\tau_{\Omega} = \frac{2\overline{\Omega S}}{c^2}$. Вот эти физические реализации: 1) рассмотренное выше (см. раздел 3.4.1) гироскопическое запаздывание шкал времени движущихся часов на замкнутом маршруте; 2) рассмотренный в разделе 1 классический эффект Саньяка в виде взаимного фазового запаздывания встречных волн (звуковых, световых, радиоволн, волн де Бройля и др.) в волновых гироскопах (лазерных резонаторных, волоконно-оптических, атомных, ультразвуковых); 3) гироскопический эффект разделения зарядов во вращающихся проводниках с током [88].

Это подчеркивает фундаментальность гироскопического эффекта, независимость его метрологических свойств от физического носителя времени, а также открывает новые возможности его измерения.

В завершение рассмотрения метрологических свойств шкал времени мобильных часов можно сделать следующие выводы:

– выведенные практические формулы позволяют с высокой точностью рассчитать релятивистские эффекты смещения частоты и времени в часах, перемещающихся на глобальные расстояния в аномальном гравитационном поле. Относительное значение неучтенных членов не превышает 10^{-18} ;

– компенсация эффектов необходима для релятивистской синхронизации стационарных и мобильных часов. Она возможна как на маршруте движения часов по результатам текущих навигационных определений по системам GLONASS/GPS, так и в конце маршрута по накопленным навигационным данным. В первом случае шкалы базовых и удаленных движущихся часов постоянно синхронизированы;

– компенсация выполняется либо путем цифровой коррекции шкалы времени, либо путем введения частотной подставки. Точность компенсации и, как следствие, точность релятивистской синхронизации оценивается относительной случайной погрешностью не более 10^{-16} . Это возможно на основе использования современных навигационных приемников GLONASS/GPS в дифференциальном режиме навигации, а также с использованием современных глобальных моделей аномального гравитационного поля Земли.

3.5. Выводы к разделу 3

1. Связь между интервалами собственного (измеряемого) времени, отсчитываемыми по подвижным часам в двух точках околоземного пространства-времени, целесообразно устанавливать взаимным соотношением релятивистских интегральных коэффициентов преобразования шкал собственного времени относительно геоцентрического координатного времени $t = t_{TCG}$. Эти коэффициенты определяются временными компонентами и компонентами векторного потенциала четырехмерного метрического тензора в соответствующих точках гравитационного поля, а также скоростями обоих часов относительно начала системы отсчета. Компоненты метрического тензора и скорость часов в общем случае изменяются вдоль маршрута движения.

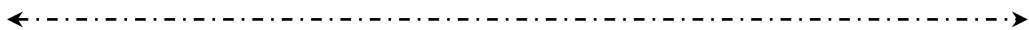
2. Отношение интервалов собственного времени двух часов, находящихся в гравитационном поле, пропорционально релятивистскому отношению собственных частот их задающих генераторов. При этом суммарное взаимное смещение частот задающих генераторов часов в гравитационном поле равно сумме начальных технических сдвигов их частот, а также релятивистских частотных смещений.

3. Синхронизация пространственно разнесенных часов на основе компенсации релятивистских сдвигов времени и частоты называется *релятивистской синхронизацией*. Она реализуется тремя методами.

3.1. *Релятивистская синхронизация на основе цифровой коррекции шкалы времени*. При этом текущую релятивистскую поправку можно вычислять на маршруте движения часов и вносить в шкалу времени мобильных часов как непрерывно на маршруте, так и однократно в конце маршрута. В первом случае на маршруте движения постоянно поддерживается синхронность шкал мобильного и базового хранителей времени.

3.2. *Релятивистская синхронизация на основе коррекции частоты задающих генераторов*. Этот метод наиболее удобен при работе с неподвижными часами, а также с бортовыми часами спутников, находящихся на круговой орбите. При этом в номинальное значение частоты задающего генератора вносится поправка, равная по величине релятивистскому смещению частоты, но с обратным знаком.

3.3. *Комбинированная релятивистская синхронизация*. При практической реализации этого метода незначительные переменные релятивистские сдвиги корректируют смещением бортовой шкалы времени, а большие линейные сдвиги – путем введения искусственной поправки в частоту задающего генератора бортовых часов. Рассмотренный комбинированный способ релятивистской синхронизации реализован в спутниковых навигационных системах типа ГЛОНАСС, GPS и др.



4. Из шкал координатного времени, наиболее удобных к использованию в околоземном пространстве-времени, являются следующие.

4.1. Шкала геоцентрического координатного времени t_{TCG} , или просто t (*Geocentric Coordinate Time - TCG*). Это шкала координатного времени в невращающейся небесной системе координат, центр которой находится в центре Земли. В околоземном пространстве эта шкала является основной;

4.2. Шкала земного времени t_{TT} (*Terrestrial Time – TT*). Она вводится во вращающейся земной системе отсчета и ее использование иногда удобно при расчете собственного времени наземных часов.

5. Трехмерные расстояния в околоземном пространстве-времени определяются его трехмерными метрическими свойствами и зависят от выбранной системы отсчета в гравитационном поле. Во вращающейся системе отсчета типа ITRS или орбитальной вращающейся системе пространственная длина зависит от направления измерения.

Результат измерения длины в истинном гравитационном поле Земли в невращающейся системе отсчета от направления не зависит, поскольку это поле в первом приближении изотропно. Длина экватора и длина меридиана Земли, а также длина любой круговой орбиты ИСЗ за счет воздействия гравитационного поля увеличивается на 28 мм, причем это удлинение не зависит от высоты орбиты.

6. Релятивистское взаимное расхождение частоты и времени двух наземных стационарных атомных часов в невращающейся небесной системе отсчета включает следующие составляющие:

6.1. Релятивистские эффекты гравитационного смещения времени и частоты вследствие различия гравитационных потенциалов в точках размещения часов. У поверхности Земли относительное значение этих эффектов составляет $\approx 10^{-13}$ на 1000 м разности высот пары часов.

6.2. Релятивистский эффект Допплера II порядка, вызванный различием линейных скоростей движения часов на разных широтах вследствие вращения Земли в выбранной небесной невращающейся системе отсчета. Максимальное относительное значение этого эффекта на поверхности Земли составляет $1,1 \cdot 10^{-12}$.

6.3. Релятивистские эффекты влияния неравномерности вращения Земли, вызванные следующими причинами:

– годовыми вариациями модуля угловой скорости Земли. Сдвиг частоты по этой причине находится в пределах $(1-6) \cdot 10^{-16}$;

– нутацией и прецессией оси вращения Земли, а также коническим «качанием» линии ее полюсов, что вызывает относительные отклонения частоты СЧВ равные, соответственно, $1,2 \cdot 10^{-16}$; $1 \cdot 10^{-19}$; $0,6 \cdot 10^{-17}$.

6.4. Релятивистские «приливные» эффекты, вызванные влиянием гравитационных полей Луны и Солнца на величину приливного потенциала и, соответственно, на релятивистские смещения частоты и времени наземных СЧВ. При этом классическое значение приливного потенциала должно умножаться на вновь вводимое «потенциальное» число Лява: $\gamma = 1 + k - h = 0,7$. Здесь $h = 0,5$ – первое число Лява; $k = 0,2$ – второе число Лява.

Значения относительных длиннопериодических смещений частоты наземных СЧВ, вызванных приливным влиянием гравитационных полей Луны и Солнца (с периодом полмесяца и полгода), составляют $3 \cdot 10^{-17}$ и $1,4 \cdot 10^{-17}$ соответственно. Величина суточных колебаний частоты достигает, соответственно $4 \cdot 10^{-17}$ для Луны и $1,8 \cdot 10^{-17}$ для Солнца. Амплитуда полусуточных колебания частоты примерно равна амплитуде его суточных колебаний.

6.5. Релятивистский эффект, вызванный ненулевым векторным потенциалом Земли (моментом импульса Земли): относительный сдвиг шкал времени двух часов при времени интегрирования 1 год составляет около $3 \cdot 10^{-2}$ пс.

7. Точность релятивистской синхронизации мобильных часов на наземной трассе движения определяется точностью навигационных определений с помощью НАП ГНСС и длиной ряда гармоник разложения потенциала гравитационного поля Земли. В разделе 11 будет экспериментально показано, что точность такого метода синхронизации характеризуется погрешностью около 1 пс.

8. При планировании метрологических экспериментов и маршрута перемещения квантовых часов целесообразно учитывать свойства релятивистских эффектов в особых режимах движения.

В одном из режимов при известных координатах обоих часов и интервале интегрирования на основе измерений релятивистских (в данном случае чисто гравитационных) смещений частоты и времени возможно измерение неизвестного потенциала в точке стационарного размещения мобильных часов или разности потенциалов в двух точках. Непосредственные измерители разности гравитационных потенциалов в настоящее время неизвестны. В разделе 11 приводится описание эксперимента по измерению разности потенциалов на основе эффекта гравитационного замедления времени.

4. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ НАЗЕМНЫХ И СПУТНИКОВЫХ ЧАСОВ

4.1. Исходные соотношения для системы часов «спутник – Земля»

С повышением стабильности спутниковых стандартов частоты и времени до значений 10^{-15} – 10^{-16} возрастает актуальность задачи их метрологического обеспечения на основе строгого описания релятивистских изменений частоты и времени.

Проблема релятивистской синхронизации наземных и спутниковых часов путем учета влияния гравитационного поля Земли и орбитального движения на шкалу времени наземных и спутниковых стандартов частоты и времени рассматривалась в целом ряде работ и обзоров, посвященных космическим навигационным системам, а также системам спутниковой геодезии. При этом учтено влияние высоты и эллиптичности орбиты на ход спутниковых часов и предложены методы компенсации этого эффекта [28–31]. В ближайшие годы планируется ряд космических экспериментов по высокоточному измерению релятивистских смещений частоты и времени в космосе как для решения практических задач релятивистской геодезии, так и в интересах дальнейшей проверки выводов теории относительности [38, 39]. Однако компенсация влияния эллиптичности рассмотрена лишь с точностью до единиц наносекунд, а методы устранения влияния неоднородности гравитационного поля Земли, а также гравитационных полей Луны и Солнца рассмотрены лишь в постановочном плане. Пока не учитывались такие факторы, как неравномерность вращения Земли, приливные явления на поверхности Земли, действие активных ускорений на орбиту спутниковых часов и т.д. Вместе с тем, рост стабильности бортовых стандартов частоты, ужесточение требований к точности навигационных и геодезических систем, а также развитие методов релятивистской геодезии требуют дальнейшего повышения точности учета релятивистских эффектов в бортовых спутниковых часах, а также разработки более совершенных методов их компенсации.

Введем в рассмотрение систему наземных и спутниковых высокостабильных атомных часов и определим взаимные релятивистские расхождения их частоты и времени. Наземные часы (опорные, или базовые), которые будем далее отмечать индексом «0», являются хранителями собственной частоты f_0 и собственного (измеряемого) времени τ_0 .

←----->

Спутниковые атомные часы с индексом «С» являются хранителями собственной частоты и собственного бортового времени, соответственно f_c, τ_c . В качестве координатного времени используем рассмотренное выше геоцентрическое координатное время $t_{TCG} = t$.

Строгое описание релятивистских явлений и методов их учета в бортовой шкале спутниковых часов удобно вести в геоцентрической невращающейся небесной системе отсчета ICRS $OXYZ$, в которой они движутся по кеплеровским орбитам. Наземные часы в этой системе движутся с линейной скоростью, которая определяется угловой скоростью вращения Земли и геоцентрической широтой точки их размещения. Начало системы находится в центре вращающейся Земли, плоскость XOY совмещена с плоскостью экватора, а ось OX направлена в точку весеннего равноденствия. Текущее положение обоих часов в выбранной системе координат характеризуется радиус-векторами, соответственно \vec{R}_0 и \vec{R}_c , а скорости перемещения – векторами \vec{V}_0 и \vec{V}_c .

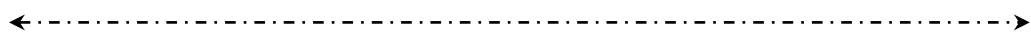
Релятивистские расхождения временных шкал и частот задающих генераторов неподвижных базовых и подвижных спутниковых часов определим из соотношений (3.10) и (3.13), которые с использованием новых обозначений спутниковых часов имеют вид:

$$\Delta \tau_p = \Delta \tau_c - \Delta \tau_0 = \int_{\tau_{01}}^{\tau_{02}} \left(\frac{\theta_c}{\theta_0} - 1 \right) d\tau_0 = \int_{\tau_{01}}^{\tau_{02}} \frac{\Delta f_p}{f_0} d\tau_0, \quad (4.1)$$

$$\frac{\Delta f_p}{f_0} = \frac{f_c - f_0}{f_0} = \frac{\theta_c}{\theta_0} - 1, \quad (4.2)$$

где τ_{01}, τ_{02} – моменты начала и окончания интервала интегрирования по шкале τ_0 ; $\Delta \tau_0 = \tau_{02} - \tau_{01}$; $\theta_0 = \theta_0(\tau_0, \vec{R}_0)$ – коэффициент преобразования шкалы времени подвижных часов «0», определяемый вдоль их пути перемещения по формуле (3.9); $\theta_c = \theta_c(\tau_0, \vec{R}_c)$ – коэффициент преобразования шкалы подвижных часов «С», определяемый по формуле (3.8), который в новых обозначениях имеет вид:

$$\theta_c = \left\{ \left(\sqrt{-g_{00}^c} - \frac{\vec{G}_c \vec{V}_c \theta_0}{c \sqrt{-g_{00}^c}} \right)^2 - \left(\frac{\vec{V}_c \theta_0}{c} \right)^2 \right\}^{0.5}, \quad (4.3)$$



где $(\vec{G}_c)_\alpha = g_{0\alpha}^c$ – компоненты векторного потенциала гравитационного поля \vec{G}_c , определяемые вдоль орбиты спутника; $\vec{V}_c = (\vec{i}V_x + \vec{j}V_y + \vec{k}V_z)_c$ – скорость спутника с составляющими по осям $(V_x, V_y, V_z)_c$, которые в общем случае изменяются вдоль орбиты; g_{00}^c – временной компонент четырехмерного метрического тензора, также изменяющийся вдоль орбиты. Для подвижных базовых часов эти же величины имеют индекс «0».

Для вычисления коэффициентов преобразования шкал необходимо воспользоваться метрическим тензором для невращающейся небесной системы отсчета в виде (2.76) и (2.77). На основе компонентов этого тензора, пренебрегая членами вида $O(c^{-4})$, из (3.8) находим:

$$\theta_0 = 1 - \frac{\varphi_0}{c^2} - \frac{V_0^2}{2c^2}, \quad (4.4)$$

где

$$\varphi_0 = \varphi_e^0 + \sum_{i=M,S} \delta\varphi_i^0 \quad (4.5)$$

– статический гравитационный потенциал в точке размещения наземных часов; φ_e^0 – потенциал ГПЗ в точке наземных часов, определяемый разложениями (2.54)–(2.56); $\delta\varphi_M^0, \delta\varphi_S^0$ – приливные потенциалы Луны и Солнца в точке размещения наземных часов, определяемые соотношениями (3.78a) и (3.81).

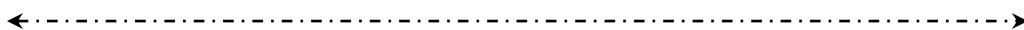
Скорость и квадрат скорости наземных часов определяются формулами:

$$\vec{V}_0 = [\vec{\Omega}_e \vec{R}_0] = \vec{i}V_x + \vec{j}V_y + \vec{k}V_z \quad V_0^2 = V_{x0}^2 + V_{y0}^2 + V_{z0}^2, \quad (4.6)$$

$$V_{x0} = \Omega_y z_0 - \Omega_z y_0, \quad V_{y0} = \Omega_z x_0 - \Omega_x z_0, \quad V_{z0} = \Omega_x y_0 - \Omega_y x_0, \quad (4.7)$$

где Ω_e – угловая скорость движения Земли, определяемая формулами (2.86), (2.87) и (2.91); x_0, y_0, z_0 – текущие координаты наземных часов. Выражения для составляющих линейной скорости через составляющие угловой скорости позволяют вычислить частотные смещения, вызванные неравномерностью вращения Земли.

На основе тех же компонентов метрического тензора, пренебрегая членами вида $O(c^{-4})$, из (3.8) находим коэффициент преобразования шкалы времени спутниковых часов:



$$\theta_c = 1 - \frac{\varphi_c}{c^2} - \frac{V_c^2}{2c^2}, \quad (4.8)$$

где

$$\varphi_c = \frac{\mu_e}{\rho_c} + \delta\varphi_e^n + \sum_{i=M,S} \delta\varphi_c^i, \quad (4.9)$$

ρ_c – текущая геоцентрическая высота спутника; $\Delta\varphi_c^n$ – составляющие потенциала ГПЗ, вызванные его неоднородностью. В силу малости высших членов разложения потенциала ГПЗ для спутников ограничимся далее рассмотрением только второй и третьей зональных гармоник:

$$\delta\varphi_e^n = -\sum_{n=2}^3 \frac{\mu_e}{\rho_c} \left(\frac{R_e}{\rho_c} \right)^n J_n P_n(\sin \psi_c), \quad (4.10)$$

где $J_2 = 1082,6 \cdot 10^{-6}$; $J_3 = -2,532 \cdot 10^{-6}$, а соответствующие полиномы Лежандра определяются формулами (ψ_c – текущая геоцентрическая широта спутника):

$$P_2(\sin \psi) = 1,5 \sin^2 \psi_c - 0,5; \quad P_3(\sin \psi) = 2,5 \sin^3 \psi_c - 1,5 \sin \psi_c; \quad (4.11)$$

$$\delta\varphi_c^i = \frac{\mu_i}{2r_i} \left(\frac{\rho_c}{r_i} \right)^2 (3 \cos^2 z_c^i - 1) \quad (4.12)$$

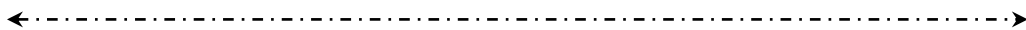
– приливные потенциалы Луны и Солнца ($i = M; S$) в точке нахождения спутника с геоцентрической высотой ρ_c , которые определяются соотношением (2.67); z_c^i – зенитное расстояние рассматриваемого спутника относительно направления на i -е небесное тело; μ_i – гравитационная постоянная i -го небесного тела.

Используя формулы (4.4)–(4.12), выражения (4.1) и (4.2) для релятивистских смещений времени и частоты спутниковых часов относительно наземных получаем в виде:

$$\Delta\tau_p = \Delta\tau_c - \Delta\tau_0 = \int_{\tau_{01}}^{\tau_{02}} \frac{\Delta f_p}{f_0} d\tau_0 = \Delta\tau_p^{очн} + \Delta\tau_c^n + \Delta\tau_{MS}^c - \Delta\tau_{MS}^0 - \Delta\tau_0^\Omega, \quad (4.13)$$

$$\frac{\Delta f_p}{f_0} = \frac{f_c - f_0}{f_0} = \frac{1}{f_0} \left(\Delta f_p^{очн} + \Delta f_c^n + \Delta f_{MS}^c - \Delta f_{MS}^0 - \Delta f_0^\Omega \right), \quad (4.14)$$

где



$$\Delta\tau_P^{очн} = \int_{\tau_0} \frac{\Delta f_P^{очн}}{f_0} d\tau_0 = \frac{1}{c^2} \int_{\tau_0} \left(\Phi_0 - \frac{\mu_e}{\rho_c} - \frac{V_c^2}{2} \right) d\tau_0, \quad (4.15)$$

$$\frac{\Delta f_P^{очн}}{f_0} = \frac{1}{c^2} \left(\Phi_0 - \frac{\mu_e}{\rho_c} - \frac{V_c^2}{2} \right) \quad (4.15a)$$

– основные составляющие взаимного релятивистского смещения собственного времени $\Delta\tau_P^{очн}$ и относительного релятивистского смещения частоты $\Delta f_P^{очн}/f_0$ спутниковых и наземных часов, определяемые переменными орбитальными параметрами спутника $\rho_c(\tau_0); V_c(\tau_0)$, а также гравитационным потенциалом в точке размещения наземных стационарных часов Φ_0 , определяемым в соответствии с (4.4) и (4.5) выражением:

$$\Phi_0 = \varphi_e^0 + \frac{V_0^2}{2} = \varphi_e^0 + \frac{1}{2} \Omega_e^2 \rho_0^2 \cos^2 \psi_0 = const, \quad (4.16)$$

где $\psi_0; \rho_0$ – соответственно геоцентрическая широта и высота наземных базовых часов; потенциал в наземной точке φ_e^0 определяются соотношениями (2.54) – (2.56) при условии $\rho = \rho_0$;

$$\Delta\tau_c^n = \int_{\tau_0} \frac{\Delta f_C^n}{f_0} d\tau_0 = - \int_{\tau_0} \frac{\varphi_c^n}{c^2} d\tau_0 \quad (4.17)$$

– смещение шкалы собственного времени часов спутника вследствие воздействия неоднородности ГПЗ с возмущающим потенциалом (4.10);

$$\Delta\tau_{MS}^0 = (\theta_0 - 1) dt = \int_{\tau_0} \frac{\Delta f_{MS}^0}{f_0} dt = - \frac{1}{c^2} \int_{\tau_0} (\delta\varphi_M^0 + \delta\varphi_S^0) dt \quad (4.18)$$

– смещение шкалы собственного времени наземных часов, вызванное приливными потенциалами Луны и Солнца в соответствии с формулами (3.78a) и (3.81); θ_0 – коэффициент преобразования шкалы времени (4.4), в котором в данном случае используем только приливный потенциал. Поскольку это смещение рассчитывается относительно центра Земли, то оно вычисляется в единицах геоцентрического координатного времени $t_{TCG} = t$;

$$\Delta\tau_{MS}^c = (\theta_C - 1) dt = \int_{\tau_0} \frac{\Delta f_{MS}^c}{f_0} dt = - \frac{1}{c^2} \int_{\tau_0} (\delta\varphi_M^c + \delta\varphi_S^c) dt \quad (4.19)$$

←----->

– приливное смещение шкалы собственного времени спутниковых часов в соответствии с потенциалом, определяемым формулами (2.67) и (4.12). Это смещение также интегрируется во времени $t_{TCG} = t$; θ_c определяется формулой (4.8) только с приливым потенциалом;

$$\Delta\tau_0^\Omega = \int_{\tau_0} \frac{\Delta f_0^\Omega}{f_0} d\tau_0 = \int_{\tau_0} \frac{1}{f_0} \sum_{j=1}^3 \delta f_{0j}^\Omega d\tau_0 \quad (4.20)$$

– смещение времени и частоты задающего генератора Δf_0^Ω наземных часов, вызванные неравномерностью вращения Земли в соответствии с определением скорости наземных часов в виде (4.6), (4.7), причем:

$$\begin{aligned} \frac{\delta f_{01}^\Omega}{f_0} &= -\frac{\Omega_0 \Omega_y}{c^2} y_0 z_0; & \frac{\delta f_{02}^\Omega}{f_0} &= -\frac{\Omega_0 \Omega_x}{c^2} x_0 z_0; \\ \frac{\delta f_{03}^\Omega}{f_0} &= \frac{\Omega_0}{c^2} (\Delta\Omega_z + \Omega_z^{IP}) (x_0^2 + y_0^2), \end{aligned} \quad (4.21)$$

а составляющие угловой скорости Земли по осям $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ определяются формулами (2.91).

4.2. Основная составляющая релятивистского смещения времени спутниковых и наземных часов

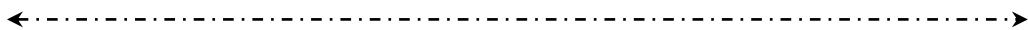
Рассмотрим различные формы представления основного релятивистского смещения, которые могут быть удобны при различных условиях его вычисления и компенсации.

4.2.1. Представление через истинную и среднюю аномалию

Выразим основную составляющую релятивистского смещения времени спутниковых и наземных часов (4.15) через истинную аномалию КА на орбите \mathcal{G} . Для этого используем известные выражения из теории кеплеровского движения [156]:

$$\frac{\mu_e}{\rho_c} = \frac{\mu_e}{P} (1 + e \cos \mathcal{G}), \quad V_c^2 = \frac{\mu_e}{P} (1 + e^2 + 2e \cos \mathcal{G}), \quad (4.22)$$

где $P; e$ – фокальный параметр и эксцентриситет орбиты соответственно. В результате для бесконечно малого приращения релятивистского смещения получаем:



$$d\tau_p^{ocn} = \frac{\Phi_0}{c^2} d\tau - \frac{\mu_e}{2Pc^2} (3 + e^2) d\tau - \frac{2e\mu_e}{Pc^2} \cos \mathcal{G} d\tau, \quad (4.23)$$

где индекс «о» при базовом времени τ здесь и далее для упрощения записи опускаем. Далее воспользуемся известным разложением, связывающим истинную \mathcal{G} и среднюю аномалию M [156]:

$$\cos \mathcal{G} = -e + \frac{2(1-e^2)}{e} \sum_{k=1}^{\infty} J_k(ke) \cos kM, \quad (4.24)$$

где $J_k(ke) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+k)!} \left(\frac{ke}{2}\right)^{k+2n}$ – функция Бесселя первого рода;

$M = \Omega_C(\tau - \tau_{II})$ – средняя аномалия; a – большая полуось орбиты; τ_{II} – время прохождения перигея; $\Omega_C = \sqrt{\mu_3/a^3}$ – угловая скорость движения спутника по орбите (среднее движение).

Ограничиваясь рассмотрением орбит с эксцентриситетом от нуля (круговые орбиты навигации, связи и др.) до $e \approx 0,73$ (высокоэллиптические орбиты спутников связи типа «Молния»), оставим в разложении (4.24) первые шесть функций Бесселя, содержащие эксцентриситет в степени по десятью включительно:

$$\begin{aligned} J_1(e) &= \frac{e}{2} \left(1 - \frac{e^2}{8} + \frac{e^4}{192} - \frac{e^6}{9216} + \dots \right), \quad J_2(2e) = \frac{e^2}{2} \left(1 - \frac{e^2}{3} + \frac{e^4}{24} - \frac{e^6}{360} + \dots \right), \\ J_3(3e) &= \frac{9}{16} e^3 \left(1 - \frac{9e^2}{16} + \frac{81e^4}{640} - \dots \right), \quad J_4(4e) = \frac{2e^4}{3} \left(1 - \frac{4e^2}{5} + \frac{4e^4}{15} - \dots \right), \\ J_5(5e) &= \frac{625e^5}{768} \left(1 - \frac{25e^2}{24} + \frac{625e^4}{1344} - \dots \right), \quad J_6(6e) = \frac{81e^6}{80} \left(1 - \frac{9e^2}{7} + \frac{81e^4}{112} - \dots \right). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Учитывая далее, что $P = a(1 - e^2)$, где a – полуось орбиты спутника, в результате интегрирования выражения (4.23) на интервале времени от момента синхронизации τ_H до текущего момента τ с использованием соотношений (4.24) и (4.25) получаем:

$$\Delta\tau_p^{ocn1} = \frac{1}{c^2} \left(\Phi_0 - \frac{3\mu_e}{2a} \right) (\tau - \tau_H) + \Delta\tau_p^{zn1}, \quad (4.26)$$

где

$$\Delta\tau_P^{\text{эл}} = -\frac{4\sqrt{\mu_e a}}{c^2} \sum_{k=1}^6 \frac{J_k(ke)}{k} \left[\sin k\Omega_C(\tau - \tau_{II}) - \sin k\Omega_C(\tau_H - \tau_{II}) \right] \quad (4.27)$$

– «эллиптическая» составляющая релятивистского смещения времени в первой ее форме представления.

В полученном выражении (4.26) первый член определяет линейно нарастающее в базовом времени релятивистское расхождение шкал времени бортовых и наземных часов $\Delta\tau_P^-$, вызванное постоянной относительной релятивистской разностью частот Δf_P^- их задающих генераторов:

$$\Delta\tau_P^- = \tau_c - \tau = \frac{\Delta f_P^-}{f_0} (\tau - \tau_H), \quad (4.28)$$

где

$$\frac{\Delta f_P^-}{f_0} = \frac{1}{c^2} \left(\Phi_0 - \frac{3\mu_e}{2a} \right). \quad (4.29)$$

Соотношение (4.27) описывает периодически изменяющуюся, в общем случае несинусоидальную составляющую релятивистского расхождения времени, определяемую эксцентриситетом орбиты спутника. Назовем ее условно «эллиптической». Она зависит от эксцентриситета и имеет гармонические составляющие с частотами $k\Omega_C$. Второй член определяет постоянную «подставку». Наличие гармоник в спектре периодической составляющей вызвано неравномерностью эллиптического орбитального движения спутника вдоль орбиты. Нетрудно показать, что лишь при очень малом эксцентриситете орбиты спутника периодические изменения времени имеют синусоидальный характер.

Анализ формул (4.28)–(4.29) показывает, что в зависимости от размера большой полуоси орбиты спутника линейно нарастающий эффект расхождения бортовой и наземной шкал времени может быть положительным ($\Delta\tau_P^- \geq 0$, $\Delta f_P^- \geq 0$, т.е. бортовые часы идут быстрее наземных) и отрицательным ($\Delta\tau_P^- < 0$, $\Delta f_P^- < 0$, бортовые часы отстают). Критический размер большой полуоси орбиты, когда эти эффекты компенсируют друг друга, находится, согласно формуле (4.29), из условия

$$\Phi_0 = \frac{3\mu_e}{2a}, \text{ или } \frac{1}{R_e} \approx \frac{3}{2a},$$

откуда

$$a_{кр} \approx 9,6 \cdot 10^6 \text{ м}. \quad (4.30)$$



В результате, при $a < a_{кр}$ взаимный релятивистский эффект смещения бортового времени спутника, находящегося на околокруговой орбите, относительно наземного времени отрицателен: бортовые часы отстают от наземных (низкоорбитальные спутники связи, спутники дистанционного зондирования Земли, геодезические спутники и др.).

Для околокруговых орбит, отвечающих условию $a > a_{кр}$, этот эффект положителен, т.е. бортовые спутниковые часы идут быстрее неподвижных наземных. Этому условию подчиняются бортовые часы средневысотных глобальных спутниковых навигационных систем (ГНСС) ГЛОНАСС, GPS, GALILEO, а также часы, размещенные на борту геостационарных КА связи и навигации ($a \approx 4,3 \cdot 10^7$ м).

Для сетевых многоспутниковых космических систем связи и навигации характерно достаточно малое отличие размеров полуосей орбит спутников, входящих в орбитальную сеть. Поэтому представим большую полуось орбиты каждого спутника в виде

$$a = a_0 + \Delta a, \quad (4.31)$$

где a_0 – среднее значение большой полуоси для всех спутников системы; причем, $\Delta a \ll a_0$. На основе этого условия формула для основного релятивистского смещения времени (4.26), как составляющей общей формулы (4.13), принимает окончательный вид:

$$\begin{aligned} \Delta \tau_P^{очн1} = & \frac{1}{c^2} \left(\Phi_0 - \frac{3\mu_e}{2a_0} \right) (\tau - \tau_H) + \frac{3\mu_e \Delta a}{2c^2 a_0^2} (\tau - \tau_H) - \\ & - \frac{4\sqrt{\mu_e a_0}}{c^2} \sum_{k=1}^6 \frac{J_k(ke)}{k} \left[\sin k\Omega_{C0} (\tau - \tau_{II}) - \sin k\Omega_{C0} (\tau_H - \tau_{II}) \right], \end{aligned} \quad (4.32)$$

где $\Omega_{C0} = \sqrt{\mu_e / a_0^3}$ – среднее движение всех спутников орбитальной системы.

Конкретные значения релятивистских эффектов, определяемых этой формулой, определены в последующих разделах применительно к конкретным системам навигации, геодезии, связи и др.

4.2.2. Представление через эксцентрическую аномалию

Если использовать выражение, связывающее эксцентрическую и среднюю аномалии спутника E и M в виде [147]:

$$\sin E = \frac{2}{e} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_k(ke)}{k} \sin kM,$$

где $J_k(ke); M$ определены в соотношении (4.24), то формулу (4.32) получаем в следующей форме:

$$\Delta\tau_P^{ocn1} = \frac{1}{c^2} \left(\Phi_0 - \frac{3\mu_e}{2a_0} \right) (\tau - \tau_H) + \frac{3\mu_e \Delta a}{2c^2 a_0^2} (\tau - \tau_H) + \Delta\tau_P^{эл2}, \quad (4.33)$$

где

$$\Delta\tau_P^{эл2} = -\frac{2\sqrt{\mu_e a}}{c^2} e (\sin E - \sin E_H) = -\frac{2\sqrt{\mu_e a}}{c^2} e \sin E - const, \quad (4.34)$$

причем E_H соответствует начальному моменту интегрирования; $const = 2\sqrt{\mu_e a} e c^{-2} \sin E_H$ – постоянная составляющая, соответствующая известному значению E_H .

Соотношение (4.34) определяет переменную «эллиптическую» составляющую релятивистского смещения бортового времени во второй ее форме, выраженную через текущую эксцентрическую аномалию.

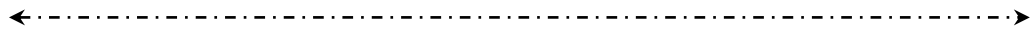
Переменную часть «эллиптической» составляющей (4.34) удобно представить еще в одной форме – через скалярное произведение текущего радиус-вектора \vec{R}_c и текущего вектора скорости спутника \vec{V}_c [28, 190]:

$$\Delta\tau_P^{эл3} = -\frac{2\sqrt{\mu_e a}}{c^2} e \sin E = -\frac{2\vec{R}_c \vec{V}_c}{c^2} = -\frac{2}{c^2} (XV_x + YV_y + ZV_z)_c, \quad (4.35)$$

где (XYZ) и $(V_x V_y V_z)$ – текущие прямоугольные координаты и составляющие скорости спутника по осям выбранной невращающейся системы отсчета.

Чтобы показать идентичность этих форм представления «эллиптического» эффекта, представим последнее соотношение в виде:

$$\sqrt{\mu_e a} \cdot e \sin E = \vec{R}\vec{V} = RV_r, \quad (4.36)$$



где V_r – радиальная составляющая скорости спутника (индекс «с» здесь для простоты опускаем). Правую часть этого равенства преобразуем, используя известные формулы из теории кеплеровского движения [147, 156]:

$$R = \frac{P}{1+e \cos \vartheta}; \quad V_r = \sqrt{\frac{\mu_e}{P}} e \sin \vartheta; \quad \cos \vartheta = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\vartheta}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\vartheta}{2}};$$

$$\sin \vartheta = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\vartheta}{2}}; \quad \operatorname{tg}^2 \frac{E}{2} = \frac{1-e}{1+e} \operatorname{tg}^2 \frac{\vartheta}{2}. \quad (4.37)$$

После несложных преобразований приходим к равенству (4.36) и, соответственно, (4.35).

4.2.3. Представление через текущий радиус-вектор и скорость спутника

Еще одна форма представления основного релятивистского смещения времени в системе «спутник – Земля» следует из соотношения (4.15), если в правую ее часть прибавить и отнять постоянную частотную релятивистскую расстройку бортового и спутникового генератора в виде $\frac{3\mu_e}{2c^2 a}$, где полуось орбиты a определяется соотношением (4.31). В результате на интервале интегрирования $(\tau - \tau_H)$ основную составляющую релятивистского расхождения бортовых и наземных часов можно представить в следующем виде:

$$\Delta \tau_P^{очн2} = \int_{\tau_0} \frac{\Delta f_P^{очн}}{f_0} d\tau = \frac{1}{c^2} \left(\Phi_0 - \frac{3\mu_e}{2a_0} \right) (\tau - \tau_H) +$$

$$+ \frac{3\mu_e \Delta a}{2c^2 a_0^2} (\tau - \tau_H) + \frac{1}{c^2} \int_{\tau} \left(\frac{3\mu_e}{2a} - \frac{\mu_e}{\rho_c} - \frac{V_c^2}{2} \right) d\tau, \quad (4.38)$$

где $\rho_c = (X_C^2 + Y_C^2 + Z_C^2)^{0,5}$; $V_C^2 = V_{CX}^2 + V_{CY}^2 + V_{CZ}^2$.

Сравнивая полученную формулу с выведенной ранее формулой (4.34), следует отметить их практически полную идентичность: первые два слагаемых изменяются во времени по линейному закону, а третье слагаемое должно определять переменную составляющую релятивистского расхождения бортового и наземного времени.

Покажем, что в частном случае движения по кеплеровским орбитам последний член формулы (4.38) определяет переменное «эллиптическое» расхождение бортового и наземного времени.

Из интеграла энергии, характеризующего кеплеровское эллиптическое движение спутника [156], следует:

$$\frac{V_C^2}{2} = \frac{\mu_e}{\rho_C} - \frac{\mu_e}{2a}, \quad (4.39)$$

где использованы те же обозначения, что и в предыдущей формуле.

Подставляя это выражение в формулу (4.38), получаем ее новую форму:

$$\begin{aligned} \Delta \tau_P^{очн3} = & \frac{1}{c^2} \left(\Phi_0 - \frac{3\mu_e}{2a_0} \right) (\tau - \tau_H) + \\ & + \frac{3\mu_e \Delta a}{2c^2 a_0^2} (\tau - \tau_H) - \frac{2\mu_e}{c^2} \int_{\tau_H}^{\tau} \left(\frac{1}{\rho_C} - \frac{1}{a} \right) d\tau. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Выделим из этого соотношения член, который, по нашему предположению, определяет «эллиптическое» смещение времени:

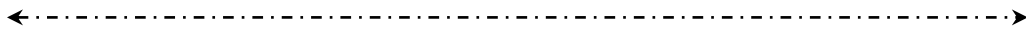
$$d\tau_P^{эл} = -\frac{2\mu_e}{c^2} \left(\frac{1}{\rho_C} - \frac{1}{a} \right) d\tau. \quad (4.41)$$

Далее воспользуемся известной связью эксцентрической аномалии спутника E и его средней аномалии M , которая определена нами в соотношении (4.24):

$$E - e \sin E = \sqrt{\frac{\mu_e}{a^3}} (\tau - \tau_H), \quad (4.42)$$

а также формулой, связывающей текущий радиус-вектор спутника ρ_C и его эксцентрическую аномалию:

$$\rho_C = a(1 - e \cos E). \quad (4.43)$$



Дифференцируя выражение (4.42) по τ , находим:

$$d\tau = \sqrt{\frac{a^3}{\mu_e}} (1 - e \cos E) dE. \quad (4.44)$$

Подставляя выражения (4.44) и (4.43) в формулу (4.41), после несложных преобразований получаем:

$$d\tau_p^{эл} = -\frac{2\mu_e}{c^2} \left(\frac{1}{\rho_c} - \frac{1}{a} \right) d\tau = -\frac{2\sqrt{\mu_e a}}{c^2} e \cos E dE = d\tau_p^{эл2}. \quad (4.45)$$

Подставляя это выражение в формулу в (4.40) и выполняя интегрирование от E_H до текущего E , приходим к формуле (4.33).

Таким образом, основную составляющую релятивистского смещения бортового времени спутника относительно наземного времени (4.15) можно представить в нескольких формах: $\Delta\tau_p^{осн3}$ – формулы (4.32) и (4.33), $\Delta\tau_p^{осн3}$ – формула (4.40) и $\Delta\tau_p^{осн3}$ – формула (4.38). Каждая из этих форм может найти свое практическое применение.

Принципиальное различие формул (4.32)–(4.40) от формулы (4.38) состоит в том, что первые из перечисленных получены, в соответствии с формулами (4.22) и (4.39), для случая невозмущенного кеплеровского движения в центральном поле тяготения Земли и не учитывает возмущения, вызванные неоднородностью поля тяготения, влияние полей Луны и Солнца, сопротивление атмосферы, световое давление и др. В формуле же (4.38) все эти возмущения учитываются в текущих характеристиках орбиты ρ_c , V_c , a . Важно отметить, что в космических навигационных системах текущие истинные значения координат и составляющих скорости навигационного спутника доступны любому потребителю, поскольку передаются в виде эфемеридной информации. Отмеченное обстоятельство очень важно с точки зрения полноты учета и компенсации влияния релятивистских эффектов в бортовых спутниковых часах на точность геодезических измерений, на точность навигации и синхронизации и т.д.

Различные формы представления «эллиптического» смещения бортового времени: $\Delta\tau_p^{эл1}$ – формула (4.27), $\Delta\tau_p^{эл2}$ – формула (4.34), $\Delta\tau_p^{эл3}$ – формула (4.35) – также найдут применение в задачах учета и компенсации периодических релятивистских эффектов. В частности, формула (4.27) используется при корректировке бортовых часов системы ГЛОНАСС [189], а формула (4.35) – при компенсации этого эффекта в аппаратуре приемников системы GPS [28].

4.3. Релятивистские эффекты смещения частоты и времени спутниковых часов, вызванные неоднородностью ГПЗ

Влияние неоднородности ГПЗ на величину релятивистского смещения бортового времени и частоты рассмотрим через влияние наибольших по величине второй и третьей зональных гармоник разложения геопотенциала (2.54)-(2.56), которые на основе (4.10) и (4.11) представим в виде:

$$\delta\varphi_e^{(2)} = -\frac{\mu_e R_e^2 J_2}{2\rho_c^3} (3\sin^2 \psi_c - 1), \quad (4.45)$$

$$\delta\varphi_e^{(3)} = -\frac{\mu_e R_e^3 J_3}{2\rho_c^4} (5\sin^3 \psi_c - 3\sin \psi_c). \quad (4.46)$$

Действие неоднородности ГПЗ на орбитальные часы проявляется двояко:

– во-первых, в виде возмущающего гравитационного потенциала, воздействующего непосредственно на шкалу орбитальных часов в соответствии с формулами (4.1), (4.8)–(4.10);

– во-вторых, в виде воздействия на основную составляющую смещения частоты и времени спутника (4.15) через изменение кеплеровских параметров орбиты спутника ρ_c, V_c .

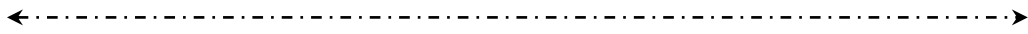
Рассмотрим оба этих воздействия.

4.3.1. Смещения частоты и времени, вызванные непосредственным влиянием потенциалов зональных и других гармоник потенциала

Смещение шкалы времени, вызванное непосредственным влиянием зональных гармоник, определяется соотношением (4.17), причем относительные частотные смещения, согласно (4.45) и (4.46), выражаются формулами:

$$\frac{\Delta f_{P\varphi}^{n2}}{f_0} = \frac{\mu_e R_e^2 J_2}{2c^2 \rho_c^3} (3\sin^2 \psi_c - 1), \quad (4.47)$$

$$\frac{\Delta f_{P\varphi}^{n3}}{f_0} = \frac{\mu_e R_e^3 J_3}{2c^2 \rho_c^4} (5\sin^3 \psi_c - 3\sin \psi_c). \quad (4.48)$$



4.3.1.1. Эффект от воздействия потенциала второй зональной гармоники

Для решения этой произведём замену [156]:

$$\sin \psi = \sin u \sin i, \quad (4.49)$$

где i – наклонение орбиты (индекс «с» для упрощения записи опускаем);

$$u = \omega + \mathcal{G} \quad (4.50)$$

– аргумент широты спутника; ω – угловое расстояние перигея; \mathcal{G} – истинная аномалия. Поэтому

$$\sin^2 \psi = \frac{1}{2} \sin^2 i + \frac{1}{2} \sin^2 i \cos 2(\omega + \mathcal{G}). \quad (4.51)$$

Далее, учитывая соотношение (4.22) и связь $P = a(1 - e^2)$, выражение (4.47) приводим к виду:

$$\frac{\Delta f_{P\varphi}^{n_2}}{f_0} = -\frac{3\mu_e R_e^2 J_2}{4c^2 \rho_c^3} \sin^2 i \cos 2(\omega + \mathcal{G}) - \frac{\mu_e R_e^2 J_2}{2c^2 \rho_c^3} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i\right), \quad (4.52)$$

где текущий радиус-вектор спутника определяется соотношением:

$$\rho_c = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \mathcal{G}}. \quad (4.53)$$

Полученная формула является достаточно общей и позволяет рассчитать эффект воздействия второй зональной гармоники на время и частоту спутниковых часов, находящихся на произвольной эллиптической орбите. Однако при эллиптическом движении спутника существенно изменяется и рассмотренный выше основной эффект смещения спутникового времени, а поэтому выделить эффект зональной гармоники затруднительно.

В этой связи для оценки величины искомого эффекта рассмотрим движение спутника по околокруговой орбите при $e \leq 0,01$. В этом случае можно пренебречь квадратом малого эксцентриситета, поэтому $\rho_c^3 \approx a^3 / (1 + 3e \cos \mathcal{G})$. Формула (4.52) при этих условиях принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f_{P\varphi}^{n_2}}{f_0} = & -\frac{N}{2c^2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i\right) - \frac{3}{4c^2} N_2 \sin^2 i \cos 2(\omega + \mathcal{G}) + \\ & + \frac{18}{4c^2} N_2 e \cos^3(\omega + \mathcal{G}) + \frac{3}{4c^2} N_2 e (3 \sin^2 i - 5) \cos(\omega + \mathcal{G}), \end{aligned} \quad (4.54)$$

←----->

где принято обозначение

$$N_2 = \frac{\mu_e R_e^2 J_2}{a^3}. \quad (4.55)$$

В полученном выражении два последних члена существенно (в данном случае на два порядка) меньше первых двух. Поэтому оценку влияния зональных гармоник целесообразно провести, ограничиваясь рассмотрением только круговых орбит. В результате при $e = 0$, $\omega = 0$, $\mathcal{G} = M = \Omega_c (\tau - \tau_{II}) = \sqrt{\mu_e / a^3} (\tau - \tau_{II})$ формула (4.54) принимает вид:

$$\frac{\Delta f_{P\varphi}^{n2}}{f_0} = -\frac{N_2}{2c^2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i\right) - \frac{3}{4c^2} N_2 \sin^2 i \cos 2\Omega_c (\tau - \tau_{II}). \quad (4.56)$$

Соответствующий сдвиг бортовой шкалы времени относительно наземной, вызванный только влиянием потенциала второй зональной гармоники, определится выражением:

$$\begin{aligned} \delta\tau_{P\varphi}^{n2} &= \int_{\tau_{II}}^{\tau} \frac{\Delta f_P^{n2}}{f_0} d\tau = -\frac{N_2}{2c^2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i\right) (\tau - \tau_{II}) - \\ &-\frac{3J_2}{8c^2} \sqrt{\mu_e a} \left(\frac{R_e}{a}\right)^2 \sin^2 i [\sin 2\Omega_c (\tau - \tau_{II}) - \sin 2\Omega_c (\tau_{II} - \tau_{II})]. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Таким образом, влияние потенциала второй зональной гармоники в разложении потенциала ГПЗ проявляется в виде линейно нарастающей и периодической составляющей смещения шкалы бортового времени. При этом частота периодической составляющей в два раза выше частоты обращения спутника по орбите (среднего движения). Величина обеих составляющих уменьшается с высотой и существенно зависит от наклона орбиты через множитель $\sin^2 i$. В частности, при $i = 55^\circ$ коэффициент при линейной составляющей обращается в нуль: $(1,5 \sin^2 55^\circ - 1) = 0$. При наклонениях орбиты, превышающих 55° этот коэффициент положителен, при меньших – отрицателен.

Для примера рассмотрим бортовые часы геодезического спутника Jason-3 с большой полуосью орбиты $7,715 \cdot 10^6$ м, наклонением орбиты 66° , периодом обращения по орбите 112,4 мин (запущен в космос 17.01.2016 г., производитель – Thales Alenia Spase, заказчики: NOAA, NASA, CNES, Eumetsat). Постоянный частотный релятивистский сдвиг бортового задающего генератора этого спутника, согласно выражению (4.56), составляет

←.....→
 $2,4 \cdot 10^{-14}$. Соответствующая линейная составляющая релятивистского смещения бортовой шкалы на суточном интервале составляет около 2 нс. Амплитуда периодического колебания релятивистского сдвига частоты для того же спутника составляет $2,4 \cdot 10^{-13}$. Соответствующая амплитуда релятивистского набега времени составляет около 0,13 нс. Колебание релятивистского набега бортового времени происходит с периодом, который вдвое меньше периода обращения спутника по орбите, т.е. около 56 мин.

Для КА ГЛОНАСС постоянный релятивистский частотный сдвиг, определяемый первым членом (4.56), достигает $1,2 \cdot 10^{-15}$, что на суточном интервале вызывает смещение времени 0,1 нс. Амплитуда переменной составляющей релятивистского смещения (4.57) составляет 21,5 пс.

4.3.1.2. Эффект воздействия потенциала третьей зональной и других гармоник потенциала

На основе формулы (4.48), определяющей относительное релятивистское смещение частоты бортового генератора за счет влияния потенциала третьей зональной гармоники потенциала ГПЗ, для круговой орбиты ($\rho_c = a$) находим соответствующий уход бортовой шкалы времени:

$$\delta\tau_p^{n3} = \frac{N_3}{2c^2} \int_{\tau_H}^{\tau} (5 \sin^3 \psi_c - 3 \sin \psi_c) d\tau, \quad (4.58)$$

где принято обозначение:

$$N_3 = \frac{\mu_e R_e^3 J_3}{a^4}. \quad (4.59)$$

Далее, используя замену (4.49), а также необходимые формулы тригонометрии:

$$\int \sin^3 x dx = -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x; \quad \cos^3 x = \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x,$$

в результате интегрирования (4.58) получаем:

$$\begin{aligned} \delta\tau_p^{n3} = & \frac{3N_3}{2c^2 \Omega_c} \left(\frac{15}{12} \sin^3 i - \sin i \right) \left[\cos \Omega_c (\tau - \tau_{II}) - \cos \Omega_c (\tau_H - \tau_{II}) \right] - \\ & - \frac{5}{24} \frac{N_3 \sin^3 i}{c^2 \Omega_c} \left[\cos 3\Omega_c (\tau - \tau_{II}) - \cos 3\Omega_c (\tau_H - \tau_{II}) \right]. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Таким образом, релятивистский сдвиг бортового времени спутниковых часов, вызванный влиянием потенциала третьей зональной гармоникой потенциала ГПЗ, имеет две периодических составляющих, одна из которых изменяется с частотой обращения спутника по орбите Ω_c , а вторая имеет частоту изменения $3\Omega_c$.

Оценка амплитуды относительного частотного смещения бортового стандарта частоты спутника Jason-3 на основе формулы (4.48) составляет: $N_3/2c^2 \approx 4 \cdot 10^{-16}$. Соответствующая амплитуда периодического смещения шкалы времени с частотой Ω_c составляет около 1,2 пс. Амплитуда периодической составляющей выражения (4.61) с утроенной частотой не превышает 0,3 пс.

Амплитуда относительного смещения частоты за счет третьей гармоники для средневысотной ГНСС типа ГЛОНАСС, согласно (4.48), достигает $3,4 \cdot 10^{-18}$, а соответствующая амплитуда колебания шкалы времени – 0,06 пс.

Четвертая зональная гармоника имеет следующие характеристики [143]:

$$J_4 = -1,63 \cdot 10^{-6}, \quad P_4(\sin \psi_c) = \frac{35}{8} \left(\sin^4 \psi_c - \frac{15}{4} \sin^2 \psi_c + \frac{3}{8} \right).$$

Далее, по аналогии с формулой (4.48), находим соответствующее частотное смещение:

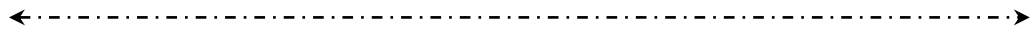
$$\frac{\Delta f_P^{n4}}{f_0} = -\frac{35\mu_e R_e^4 J_3}{8c^2 \rho_c^5} \left(\sin^4 \psi_c - \frac{15}{4} \sin^2 \psi_c - \frac{3}{8} \right).$$

Соответствующее релятивистское смещение временной шкалы составит:

$$\delta \tau_P^{n4} = -\frac{35\mu_e R_e^4 J_3}{8c^2 \rho_c^5} \int_{\tau} \left(\sin^4 \psi_c - \frac{15}{4} \sin^2 \psi_c - \frac{3}{8} \right) d\tau. \quad (4.61)$$

Значение коэффициента при полученной выше формуле для частоты в случае орбиты типа Jason-3 составляет около $2 \cdot 10^{-15}$. Вместе с тем, соответствующее смещение шкалы времени будет меньше, чем для третьей гармоники, так как при частоте гармоники $4\Omega_c$ период накопления эффекта уменьшается.

Поскольку другие коэффициенты разложения при зональных, секториальных и тессеральных гармониках J_n, C_{nm}, S_{nm} имеют порядок величин 10^{-6} и менее, то вклад этих гармоник в относительное частотное смещение оценивается величиной 10^{-16} и менее. Точное количество учитываемых членов разложения потенциала определяется из условий решения конкретной задачи.



4.3.2. Смещения частоты и времени, вызванные влиянием потенциала второй зональной гармоники на высоту орбиты спутника

Для определения степени влияния второй зональной гармоники потенциала ГПЗ на основное релятивистское смещение через изменение параметров орбиты спутника воспользуемся выражением (4.40) в ее дифференциальной форме:

$$d\tau_P^{очн3} = \frac{1}{c^2} \left(\Phi_0 - \frac{3\mu_e}{2a_0} \right) d\tau + \frac{3\mu_e \Delta a}{2c^2 a_0^2} d\tau - \frac{2\mu_e}{c^2} \left(\frac{1}{\rho_c} - \frac{1}{a} \right) d\tau. \quad (4.62)$$

Для упрощения расчетов рассматриваем околокруговые орбиты с малым эксцентриситетом.

Следуя [28, 190], релятивистский сдвиг (4.62) представляем в виде двух составляющих:

$$d\tau_P^{очн} = (d\tau_P^{очн})_0 + \delta(d\tau_P^{очн}), \quad (4.63)$$

где первая составляющая определяется параметрами невозмущенной орбиты, а вторая – возмущениями параметров орбиты от второй зональной гармоники. Она выражается в виде:

$$\delta(d\tau_P^{очн}) = \frac{\partial(d\tau_P^{очн})}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial(d\tau_P^{очн})}{\partial \rho} \Delta \rho \approx -\frac{\mu_e}{2c^2 a_0^2} \Delta a d\tau + \frac{2\mu_e}{c^2 a_0^2} \Delta \rho d\tau, \quad (4.64)$$

где $\Delta a, \Delta \rho$ – малые искажения параметров орбиты. В силу малости эффектов здесь принято, что $\rho^2 \approx a^2 \approx a_0^2$.

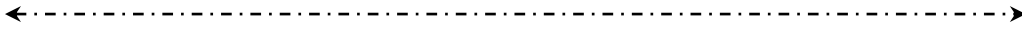
Учитывая, что для невозмущенного кеплеровского движения спутника справедливо соотношение:

$$\rho = a(1 - e \cos E), \quad (4.65)$$

путем его дифференцирования находим:

$$\Delta \rho = \Delta a - a \cos E \Delta e + a e \sin E \Delta E, \quad (4.66)$$

где возмущения, вызванные влиянием второй зональной гармоникой на параметры околокруговой орбиты выражаются соотношениями [28, 190, 147]:



$$\Delta a(J_2) = \frac{3R_e^2}{2a} J_2 \sin^2 i \cos 2u, \quad (4.67)$$

$$\begin{aligned} \Delta e(J_2) = & \frac{3R_e^2}{2a^2} J_2 \left\{ \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \cos \vartheta + \right. \\ & \left. + \sin^2 i \left[\frac{5}{6} \cos(2u + \vartheta) + \frac{1}{2} \sin 2u \sin \vartheta \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.68)$$

$$\begin{aligned} \Delta E(J_2) = & \frac{R_e^2}{2a^2 e} J_2 \left\{ 3 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \sin \vartheta + \right. \\ & \left. \sin^2 i \left[\frac{3}{2} \cos 2u \sin \vartheta + \sin(2u + \vartheta) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.69)$$

где учтено, что для околокруговых орбит $E \approx M$; $\Delta E \approx \Delta M$.

Подставляя эти возмущения в (4.66) и выполняя несложные преобразования, находим искомое выражение для возмущения радиус-вектора:

$$\Delta \rho = \frac{R_e^2 J_2}{2a_0} \left[3 \left(\frac{3}{2} \sin^2 i - 1 \right) + \frac{1}{2} \sin^2 i \cos 2u \right]. \quad (4.70)$$

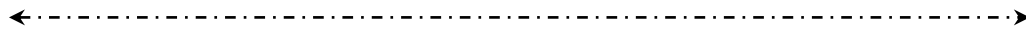
Подставляя выражения (4.67) и (4.70) в (4.64), находим вторую составляющую изменения релятивистского смещения времени, вызванную воздействием второй зональной гармоники на орбиту спутника:

$$\delta(d\tau_p^{ocn}) = -\frac{3N_2}{c^2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) d\tau - \frac{N_2}{4c^2} \sin^2 i \cos 2\Omega_c (\tau - \tau_{II}) d\tau, \quad (4.71)$$

где для круговых орбит справедливо равенство $u = \vartheta = \Omega_c (\tau - \tau_{II})$, а соответствующий релятивистский сдвиг частоты составляет:

$$\frac{\Delta f_p^{ocn}}{f_0} = -\frac{3N_2}{c^2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) - \frac{N_2}{4c^2} \sin^2 i \cos 2\Omega_c (\tau - \tau_{II}). \quad (4.72)$$

Интегрируя полученное соотношение (4.71) по времени и складывая полученный результат с выражением (4.57), находим полное релятивистское смещение бортового времени (4.17), вызванное воздействием потенциала второй зональной гармоники непосредственно на часы и на орбиту спутника:



$$\begin{aligned} \delta\tau_p^{n2} = \delta\tau_{p\varphi}^{n2} + \delta\tau_p^{ocn} = \int_{\tau_H}^{\tau} \frac{\Delta f_p^{n2}}{f_0} d\tau = -\frac{7N_2}{2c^2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i\right) (\tau - \tau_H) - \\ - \frac{J_2 \sqrt{\mu_e a}}{2c^2} \left(\frac{R_e}{a}\right)^2 \sin^2 i [\sin 2\Omega_c (\tau - \tau_H) - \sin 2\Omega_c (\tau_H - \tau_H)], \end{aligned} \quad (4.73)$$

где N_2 определяется соотношением (4.55), а соответствующая относительная релятивистская разность частот задающих генераторов бортовых и наземных (базовых) часов составляет:

$$\frac{\Delta f_p^{n2}}{f_0} = -\frac{N_2}{c^2} \left[\sin^2 i \cos 2\Omega_c (\tau - \tau_H) + \frac{7}{2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i\right) \right]. \quad (4.74)$$

Сравнивая выражения для релятивистских частотных смещений (4.56) (непосредственное влияние потенциала) и (4.72) (влияние искажений высоты орбиты) интересно отметить, что при одинаковых знаках смещений постоянная составляющая во втором случае в 6 раз больше, однако при этом переменная составляющая в 3 раза меньше. Это свидетельствует о том, что влияние искажений высоты орбиты на величину линейной составляющей релятивистского эффекта в 6 раз больше, нежели непосредственное влияние потенциала.

Результирующая формула релятивистского смещения времени, учитывающая рассмотренные выше три составляющие: основную, «эллиптическую» и вызванную потенциалом второй зональной гармоники, следует из формул (4.32), (4.33) и (4.40):

$$\Delta\tau_p^c = \tau_c - \tau = \frac{1}{c^2} \left(\Phi_0 - \frac{3\mu_e}{2a_0} \right) (\tau - \tau_H) + \frac{3\mu_e \Delta a}{2c^2 a_0^2} (\tau - \tau_H) + \Delta\tau_p^{3l} + \delta\tau_p^{n2}, \quad (4.75)$$

где τ – время, отсчитываемое по базовым часам; «эллиптическая» составляющая $\Delta\tau_p^{3l}$ определяется в формах (4.27), (4.34), (4.35); смещение, вызванное второй зональной гармоникой, $\delta\tau_p^{n2}$ – в виде (4.73).

Полученная формула может быть использована в качестве первого приближения для релятивистской синхронизации наземных и космических орбитальных часов.

4.4. Приливные лунно-солнечные релятивистские смещения частоты и времени спутниковых и наземных часов

Взаимные приливные лунно-солнечные релятивистские смещения частоты и времени наземных и спутниковых часов будем рассматривать как разность этих смещений, каждое из которых вычисляется относительно центра Земли в единицах координатного времени $t = t_{TCG}$. Используя формулы (4.18) и (4.19), искомую разность представим в виде:

$$\Delta\tau_{MS}^{0C} = \Delta\tau_{MS}^C - \Delta\tau_{MS}^0 = \int_{\tau_H}^{\tau} \left(\frac{\Delta f_{MS}^0}{f_0} - \frac{\Delta f_{MS}^C}{f_0} \right) dt = \int_{\tau_H}^{\tau} \sum_{i=M,S} (\delta\varphi_i^0 - \delta\varphi_i^C) dt. \quad (4.76)$$

После вычисления этой весьма незначительной разности времени переход к собственному времени $\tau = \tau_0$ наземного базового хранителя выполняется простой заменой обозначений, поскольку, согласно формуле (3.48), вносимые при этом погрешности проявляются лишь в десятом знаке после запятой.

4.4.1. Приливные релятивистские смещения наземных базовых часов

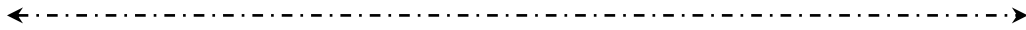
Для вычисления приливного релятивистского смещения воспользуемся материалом раздела 3.3.4, в частности соотношением (3.72):

$$\Delta\tau_i^0 = \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{\Delta f_i^0}{f_0} d\tau_0 = \frac{1}{c^2} \int_{\tau_0}^{\tau} \delta\varphi_i^0 dt, \quad (4.77)$$

где $i = M; S$; Δf_i^0 – смещение частоты наземного генератора относительно частоты генератора в точке вблизи центра Земли, где приливный потенциал Луны и Солнца пренебрежимо мал и где действует геоцентрическое координатное время t .

Учитывая, что приливный потенциал на поверхности вращающейся Земли определяется соотношением (3.81), для i -го тяготеющего небесного тела на основе соотношений (3.82)–(3.85) находим смещение частоты наземного генератора в виде:

$$\frac{\Delta f_i^0}{f_0} = \frac{\Delta f_{iA}}{f_0} + \frac{\Delta f_{iB}}{f_0} + \frac{\Delta f_{iC}}{f_0}; \quad (4.78)$$



$$\frac{\Delta f_{iA}}{f_0} = \frac{3\gamma D_i}{2c^2} \left(\sin^2 \psi_0 - \frac{1}{3} \right) \left(\cos 2\delta_0 + \frac{1}{3} \right); \quad (4.79a)$$

$$\frac{\Delta f_{iB}}{f_0} = \frac{\gamma D_i}{c^2} \sin 2\psi_0 \sin 2\delta_0 \cos t_{\odot}^0; \quad (4.79б)$$

$$\frac{\Delta f_{iC}}{f_0} = \frac{\gamma D_i}{c^2} \cos^2 \psi_0 \cos^2 \delta_0 \cos 2t_{\odot}^0, \quad (4.79в)$$

где D_i – постоянная Дудсона для i -го небесного тела (для Луны $D_M = 2,6206 \text{ м}^2\text{с}^{-2}$; для Солнца $D_S = 1,2035 \text{ м}^2\text{с}^{-2}$ [146]); ψ_0 – геоцентрическая широта наземных часов; δ_0, t_{\odot}^0 – склонение и часовой угол небесного тела.

Период изменения составляющей приливного смещения частоты (4.79а) составляет полгода для Солнца и полмесяца – для Луны. Максимальное значение смещения, определяемое величиной коэффициента, для Луны составляет $3 \cdot 10^{-17}$, для Солнца – $1,4 \cdot 10^{-17}$. Набег релятивистского приливного смещения времени, вычисленного в соответствии с формулой (4.79а), для Солнца на интервале около 40 суток (примерно четверть периода) превышает 40 пс, для Луны на интервале в трие суток достигает 10 пс.

Частотное смещение, определяемое формулой (4.79б), имеет суточный период колебания. Амплитуда колебания разности частот $2\gamma D/c^2$ составляет для Луны $4 \cdot 10^{-17}$, для Солнца – $1,8 \cdot 10^{-17}$.

Смещение (4.79в) имеет полусуточный период колебания. Амплитуда колебания частоты равна амплитуде его суточного колебания.

На основе вычисления частотных сдвигов (4.78) – (4.79) находим приливный сдвиг шкалы времени наземных часов:

$$\Delta \tau_i^0 = \int_{\tau_0} \frac{\Delta f_i}{f_0} d\tau_0 = \frac{1}{f_0} \int_{\tau_0} (\Delta f_{iA} + \Delta f_{iB} + \Delta f_{iC}) d\tau, \quad i = M; S, \quad (4.80)$$

откуда следует выражение для искомого приливного смещения наземных часов, определяемого влиянием Луны и Солнца:

$$\Delta \tau_{MS}^0 = \sum_{i=MS} \Delta \tau_i^0. \quad (4.81)$$

4.4.2. Приливные релятивистские смещения спутниковых часов

В соответствии с формулами (4.19) и (4.76) приливное смещение времени спутниковых часов определяется соотношением:

$$\Delta\tau_{MS}^C = \sum_{i=MS} \int_{t_H}^t \frac{\Delta f_i^C}{f_0} dt = -\frac{1}{c^2} \sum_{i=MS} \int_{t_H}^t \delta\varphi_i^C dt, \quad (4.82)$$

где приливный потенциал i -го светила определяется формулой (4.12), которую представим в более удобном виде:

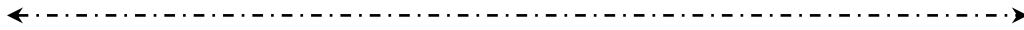
$$\delta\varphi_c^i = \frac{\mu_i \rho_c^2}{2r_i^3} (3\cos^2 z_c^i - 1). \quad (4.83)$$

Для решения задачи выберем связанную с Землёй невращающуюся небесную систему координат так, чтобы плоскость XOY совпадала с плоскостью орбиты Земли (плоскостью эклиптики), а ось OZ была перпендикулярна плоскости орбиты. Поскольку рассматриваемые эффекты весьма малы, то для упрощения решения плоскость экватора Земли совместим с плоскостью эклиптики. При этом ошибка при вычислении искомых эффектов не превысит 10 %. В этом случае орбитальные параметры спутника на околокруговой орбите обозначим так: $\mathcal{G} = \Omega_C (t - t_E)$ – угол истинной аномалии; t_E – момент пересечения плоскости эклиптики; Ω_C – угловая скорость движения спутника по околоземной орбите; β_i – текущий переменный угол между линией узлов орбиты и осью OX ; ν_i – наклонение орбиты спутника к плоскости эклиптики. Поскольку плоскость орбиты Луны и эклиптики практически совпадают, то $\nu_M \approx \nu_S$ ($i = M; S$). Ввиду годового движения Земли можно записать: $\beta_S = \frac{2\pi}{365} n + \beta_{S0}$, $\beta_M = \frac{2\pi}{28} n + \beta_{M0}$.

Функцию косинуса зенитного расстояния спутника относительно направления на тяготеющее небесное тело в формуле (4.83) в данной системе выразим известным соотношением [156]:

$$\cos z_c^i = \cos \mathcal{G} \cos \beta_i - \sin \mathcal{G} \sin \beta_i \cos \nu_i. \quad (4.84)$$

Возводя это выражение в квадрат и подставляя его в (4.83), из (4.82) получаем выражение для релятивистского приливного смещения частоты задающего генератора бортовых часов:



$$\begin{aligned} \frac{\Delta f_i^C}{f_0} = & A_i \left(\frac{2}{3} - \cos^2 \beta_i - \sin^2 \beta_i \cos^2 \nu_i \right) + \\ & + A_i \sin 2\beta_i \cos \nu_i \sin 2\Omega_C (t - t_E) - \\ & - A_i \left(\cos^2 \beta_i - \sin^2 \beta_i \cos^2 \nu_i \right) \cos 2\Omega_C (t - t_E), \end{aligned} \quad (4.85)$$

где введено обозначение:

$$A_i = \frac{3\mu_i \rho_c^2}{4c^2 r_i^3}. \quad (4.86)$$

Интегрируя (4.85) по времени от t_H до t и переходя без потери точности к базовому времени τ , получаем следующий результат:

$$\begin{aligned} \Delta \tau_{MS}^C = & \sum_{i=MS} A_i \left(\frac{2}{3} - \cos^2 \beta_i - \sin^2 \beta_i \cos^2 \nu_i \right) (\tau - \tau_H) - \\ & - \frac{1}{2\Omega_C} \sum_{i=MS} A_i \sin 2\beta_i \cos \nu_i \left[\cos 2\Omega_C (\tau - \tau_E) - \right. \\ & \left. \cos 2\Omega_C (\tau_H - \tau_E) \right] - \frac{1}{2\Omega_C} \sum_{i=MS} A_i \left(\cos^2 \beta_i - \right. \\ & \left. - \sin^2 \beta_i \cos^2 \nu_i \left[\sin 2\Omega_C (\tau - \tau_E) - \sin 2\Omega_C (\tau_H - \tau_E) \right] \right) \end{aligned} \quad (4.87)$$

Таким образом, приливный частотный сдвиг бортового генератора спутниковых часов имеет постоянную составляющую и периодическую с удвоенной частотой относительно частоты обращения по орбите. Соответственно, приливный релятивистский сдвиг бортовой шкалы времени имеет линейную составляющую и периодическую с периодом вдвое меньшим периода обращения спутника по орбите.

Оценка величины коэффициентов A_M и A_S , которые определяют максимальную величину линейного смещения частоты для часов, движущихся по геостационарной орбите, дает следующие результаты: $A_M^{ICO} \approx 1,4 \cdot 10^{-15}$; $A_S^{ICO} \approx 0,5 \cdot 10^{-15}$. Соответствующий линейный суточный сдвиг шкалы времени, вызванный влиянием приливных потенциалов Луны и Солнца, достигает, согласно (4.87), 40 пс и 15 пс соответственно. В полнолуние и новолуние эффекты складываются. Амплитуда переменной составляющей на порядок меньше.

Для спутников ГЛОНАСС при тех же условиях имеем: $A_M^{ГЛОН} = 5 \cdot 10^{-16}$; $A_S^{ГЛОН} = 1,7 \cdot 10^{-16}$. Суточный линейный релятивистский набег времени, согласно (4.87), при $\beta = 0$ составляет, соответственно, 12 пс и 5 пс.

4.5. Смещения частоты и времени наземных часов, вызванные неравномерностью вращения Земли

Смещения времени и частоты задающего генератора наземных часов, вызванные неравномерностью вращения Земли, определим в соответствии с формулами (4.20) и (4.21). Используя определения составляющих угловой скорости Земли в виде формул (2.91), а также связь между координатами наземных часов во вращающейся и невращающейся системах координат в виде (3.58), из (4.21) получаем:

$$\frac{\Delta f_{01}^{\Omega}}{f_0} = -\frac{\Omega_0 R_e^2}{c^2} (\Omega_y^{PP} + \Omega_y^H + \Omega_y^{\Pi}) \sin 2\psi_0 \sin(\Omega_0 \tau + \lambda_0), \quad (4.88)$$

где ψ_0, λ_0 – географические координаты наземных часов. Амплитуды колебаний частоты в зависимости от разных причин следующие: по нутации – $1,2 \cdot 10^{-16}$; по отклонению полюсов – $0,6 \cdot 10^{-17}$; по прецессии – $1 \cdot 10^{-19}$. Эти эффекты имеют суточный период колебания и их амплитуда максимальна при размещении часов на широте 45° .

Соответствующее смещение шкалы времени наземных часов, согласно (4.20), определяется соотношением:

$$\Delta \tau_{01}^{\Omega} = -\frac{R_e^2}{c^2} (\Omega_y^H + \Omega_y^{\Pi} + \Omega_y^{PP}) \sin 2\psi_0 \cos(\Omega_0 \tau + \lambda_0). \quad (4.89)$$

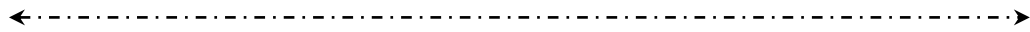
Оценка амплитуды периодических суточных эффектов, определяемых этой формулой, составляет: по нутации – 16,4 пс; по отклонению полюсов – 8 пс; по прецессии – $1,4 \cdot 10^{-3}$ пс.

Поступая аналогично выводу формулы (4.88), находим:

$$\frac{\delta f_{02}^{\Omega}}{f_0} = -\frac{\Omega_0 R_e^2}{c^2} (\Omega_x^H + \Omega_x^{\Pi}) \sin 2\psi_0 \sin(\Omega_0 \tau + \lambda_0), \quad (4.90)$$

$$\Delta \tau_{02}^{\Omega} = -\frac{R_e^2}{c^2} (\Omega_x^H + \Omega_x^{\Pi}) \sin 2\psi_0 \cos(\Omega_0 \tau + \lambda_0). \quad (4.91)$$

Таким образом, без учета очень малого эффекта прецессии получаем $\Delta \tau_{01}^{\Omega} = \Delta \tau_{02}^{\Omega}$. Оценки величин частотных и временных смещений аналогичны предыдущему случаю.



Наконец, влияние неравномерности вращения Земли вокруг оси OZ вызывает следующие релятивистские смещения:

$$\frac{\delta f_{03}^{\Omega}}{f_0} = \frac{\Omega_0 R_e^2}{c^2} (\Delta\Omega_z + \Omega_z^{PP}) \cos^2 \psi_0. \quad (4.92)$$

При девиации значения угловой скорости в последние годы в пределах $-187 \cdot 10^{-10} \div -3 \cdot 10^{-9} \text{ с}^{-1}$ [154] ее вклад в релятивистский сдвиг частоты задающего генератора наземных часов находится в пределах $1 \cdot 10^{-16} \div 6 \cdot 10^{-16}$. Вклад прецессии составляет около 10^{-19} .

Пренебрегая влиянием прецессии, соответствующий релятивистский сдвиг шкалы времени наземных часов определяем в общем виде:

$$\delta\tau_{03}^{\Omega} = \frac{\Omega_0 R_e^2}{c^2} \int_{\tau_H}^{\tau} \Delta\Omega_z(\tau) d\tau, \quad (4.93)$$

где $\Delta\tau = \tau - \tau_H$ – интервал накопления эффекта. На практике этот изменяющийся во времени эффект необходимо вычислять путем численного интегрирования по текущим данным, поступающим от Службы вращения Земли.

Принимая на интервале интегрирования $\Delta\Omega_z = const$, получаем:

$$\delta\tau_{03}^{\Omega} = \frac{\Omega_0 R_e^2}{c^2} \Delta\Omega_z \Delta\tau.$$

При среднем значении изменения модуля угловой $\Delta\Omega_z = -100 \cdot 10^{-10} \text{ с}^{-1}$ и интервале интегрирования 3 месяца (четверть периода изменения $\Delta\Omega_z$) эффект смещения шкалы времени составляет около 2500 пс. Важно отметить, что этот эффект не зависит от периода суточного вращения.

На основе проведенных вычислений находим искомый сдвиг времени наземных часов, вызванный неравномерностью вращения Земли:

$$\Delta\tau_0^{\Omega} = \sum_{k=1}^3 \Delta\tau_{0k}^{\Omega}, \quad (4.94)$$

где $\Delta\tau_{0k}^{\Omega}$ ($k = 1, 2, 3$) определяется формулами (4.89), (4.91) и (4.93).

4.6. Влияние других факторов на основной релятивистский эффект через влияние на параметры орбиты спутника

Выше нами установлено влияние второй зональной гармоники на параметры орбиты спутниковых часов, что позволило определить дополнительное изменение основной составляющей релятивистского смещения. Однако существует еще целый ряд факторов, существенно изменяющих орбиту спутников и, как следствие, величину релятивистских смещений частоты и времени бортовых часов.

Допустимая погрешность в знании большой полуоси круговой орбиты Δa при заданной предельной ошибке вычисления релятивистского смещения определяется вторым членом формулы (4.75):

$$\delta\tau_p^c = \frac{3\mu_e \Delta a}{2c^2 a_0^2} (\tau - \tau_H), \quad (4.95)$$

где $\delta\tau_p^c$ – допустимая ошибка в значении релятивистского смещения бортовой шкалы времени; $\tau - \tau_H = \Delta\tau$ – интервал базового времени, за который накапливается релятивистское смещение $\delta\tau_p^c$.

Из этой формулы для интервала $\Delta\tau = 3$ суток, $\delta\tau_p^c = 3$ пс (1 пс в сутки) находим, что для средневысотной орбиты спутника ГНСС типа ГЛОНАСС, GPS, GALILEO допустимая погрешность составляет $\Delta a \approx 1$ м. Для низкой орбиты типа орбиты МКС при тех же исходных данных имеем $\Delta a \approx 8$ см.

Для оценки влияния различных факторов на размер полуоси круговой орбиты средневысотных и низковысотных спутников воспользуемся результатами работы [191], которые представим в виде табл. 4.1. Исследования искажений орбит средневысотных спутников глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС) и низковысотной орбиты МКС в зависимости от возмущающих ускорений в этой работе проводились на трехсуточном интервале времени.

Вычисление возмущений от значимых факторов в интересах их компенсации – чрезвычайно трудоемкая и иногда трудноразрешимая задача. Поэтому для релятивистской компенсации воздействия всех перечисленных выше факторов на орбиту КА при решении практических задач необходим иной путь. Наиболее целесообразным является путь численного их интегрирования по текущим измерениям ρ_C, V_C в соответствии с формулой для основного релятивистского смещения (4.38).



Таблица 4.1

Влияние различных факторов на размер полуоси
круговой орбиты спутников Земли

Возмущающие факторы	Возмущающие ускорения, m/c^2 ; Возмущения высоты орбиты, Δa , м	
	Средневысотные орбиты ГНСС	Низковысотные орбиты 350–400 км (МКС)
1. Вторая зональная гармоника потенциала ГПЗ	10^{-4} ; ~ 2000	$2,5 \cdot 10^{-2}$; $\geq 10^4$
2. Гармоники потенциала ГПЗ высших порядков	$10^{-7} - 10^{-10}$; < 200	10^{-5} ; ~ 1000
3. Влияние остаточной атмосферы	~ 0; ~ 0	10^{-6} ; ~ 500
4. Сила светового давления от Солнца	10^{-7} ; ~ 100 м / сут	$6 \cdot 10^{-8}$; ~ 50
5. Гравитационное поле Луны	$4 \cdot 10^{-6}$; < 400	10^{-6} ; ~ 15
6. Гравитационное поле Солнца	$2 \cdot 10^{-6}$; ~ 200	$2,5 \cdot 10^{-7}$; ~ 7
7. Смещение полюса Земли	10^{-6} ; ~ 50	$3 \cdot 10^{-7}$; ~ 2
8. Прецессия и нутация оси вращения Земли	$2,5 \cdot 10^{-8}$; ≤ 1	$6 \cdot 10^{-8}$; –
9. Неравномерность вращения Земли	$3 \cdot 10^{-9}$; ≤ 1	$7 \cdot 10^{-9}$; –
10. Изменение формы Земли из-за приливных воздействий Луны и Солнца	$2 \cdot 10^{-9}$; –	$1,5 \cdot 10^{-7}$; –
11. Сила светового давления от Земли	$1,5 \cdot 10^9$ (GPS); –	$4 \cdot 10^{-9}$ (МКС); –
12. Изменение формы Земли из-за смещения полюса	10^{-11} ; –	$2 \cdot 10^{-9}$; –
13. Сила светового и теплового излучения спутника	$1,4 \cdot 10^{-9}$; –	10^{-9} ; –
14. Гравитационное поле Венеры	$1,1 \cdot 10^{-10}$; –	$3 \cdot 10^{-11}$; –

Примечание: наиболее значимыми являются факторы под номерами 1–7, которые вызывают возмущения орбит больше 1 метра. Возмущения от остальных факторов несут существенны и помечены прочерками.

4.7. Методы релятивистской синхронизации часов
в системе «космос – Земля»

4.7.1. Вариант синхронизации № 1

При наличии на борту спутника стандарта частоты и времени с нестабильностью не лучше 10^{-14} нет необходимости учитывать меньшие по величине релятивистские составляющие смещений наземных и бортовых часов. В этом случае, как следует из проведенного выше исследования, из значимых релятивистских эффектов достаточно учесть лишь эффект «эллиптичности» и эффект влияния второй зональной гармоники гравитационного потенциала, определяемой сплюснутостью Земли в направлении полюсов. Поэтому основой для решения задачи синхронизации является формула (4.75), которую представим в следующей форме:

$$\Delta\tau_p^c = \tau_c - \tau = \frac{1}{c^2} \left(\Phi_0 - \frac{3\mu_e}{2a_0} + \frac{3\mu_e \Delta a}{2c^2 a_0^2} \right) (\tau - \tau_H) + \Delta\tau_p^{3l} + \delta\tau_p^{n2}, \quad (4.96)$$

где $\Delta a = a - a_0$; Φ_0 – потенциал в точке размещения наземных часов, который определяется формулой (4.16); «эллиптическая» составляющая релятивистского смещения времени $\Delta\tau_p^{3l}$ определяется в формах (4.27), (4.34), (4.35); смещение $\delta\tau_p^{n2}$, вызванное влиянием второй зональной гармоникой через потенциал и через искажение орбиты, – в виде (4.73).

В полученной формуле выражение в скобках – величина постоянная, два последних члена – величины переменные. Вводя в эту формулу постоянную корректирующую поправку по частоте для задающего генератора бортовых часов $\Delta f_p^{k=}$ и корректирующую поправку в бортовую шкалу времени $\Delta\tau_p^{k\approx}$, получаем:

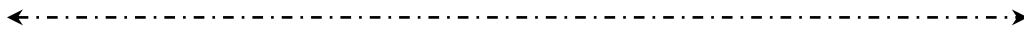
$$\Delta\tau_p^c = \tau_c - \tau = \frac{1}{c^2} \left(\Phi_0 - \frac{3\mu_e}{2a_0} + \frac{3\mu_e \Delta a}{2a_0^2} + \frac{\Delta f_p^{k=}}{f_0} \right) (\tau - \tau_H) + \Delta\tau_p^{3l} + \delta\tau_p^{n2} + \Delta\tau_p^{k\approx}. \quad (4.97)$$

При выполнении условий:

$$\frac{\Delta f_p^{k=}}{f_0} = - \left(\Phi_0 - \frac{3\mu_e}{2a_0} + \frac{3\mu_e \Delta a}{2a_0^2} \right), \quad (4.98)$$

$$\Delta\tau_p^{k\approx} = -(\Delta\tau_p^{3l} + \delta\tau_p^{n2}) \quad (4.99)$$

из формулы (4.97) получаем результат полной компенсации релятивистских смещений времени: $\Delta\tau_p^c = 0$, откуда следует синхронизация спутниковой и наземной шкал времени: $\tau_c = \tau$.



4.7.2. Вариант синхронизации № 2

Другой вариант реализации релятивистской синхронизации при учете только эффектов «эллиптичности» и потенциала второй зональной гармоники основан на использовании формулы (4.38), определяющей основной релятивистский сдвиг $\Delta\tau_P^{осн2}$ в форме 2. Добавляя к основному сдвигу $\Delta\tau_P^{осн2}$ релятивистский сдвиг, вызванный непосредственным влиянием потенциала второй зональной гармоники $\Delta\tau_{P\phi}^{n2}$, получаем другую версию определения релятивистского сдвига часов в системе «космос – Земля»:

$$\begin{aligned} \Delta\tau_P^c = \Delta\tau_P^{осн2} + \Delta\tau_{P\phi}^{n2} = \frac{1}{c^2} \left(\Phi_0 - \frac{3\mu_e}{2a_0} + \frac{3\mu_e \Delta a}{2a_0^2} \right) (\tau - \tau_H) + \\ + \frac{1}{c^2} \int_{\tau} \left(\frac{3\mu_e}{2a} - \frac{\mu_e}{\rho_c} - \frac{V_c^2}{2} \right) d\tau + \Delta\tau_{P\phi}^{n2}, \end{aligned} \quad (4.100)$$

где $\Delta\tau_{P\phi}^{n2}$ – релятивистское смещение, определяемое формулой (4.57). Второй член этой формулы на заданном уровне точности определяет эффект смещения времени, вызванный эллиптичностью орбиты.

Для достижения релятивистской синхронизации в эту формулу необходимо ввести поправку в значение частоты бортового задающего генератора в виде (4.98), а также поправку в показания бортовой шкалы времени в виде:

$$\Delta\tau_P^{k\approx} = -\frac{1}{c^2} \int_{\tau} \left(\frac{3\mu_e}{2a} - \frac{\mu_e}{\rho_c} - \frac{V_c^2}{2} \right) d\tau - \Delta\tau_{P\phi}^{n2}. \quad (4.101)$$

При этих условиях, как и в предыдущем случае, достигается совпадение, т.е. синхронизация спутниковой и базовой шкал времени: $\tau_c = \tau$.

При установке на борту КА стандарта частоты и времени с нестабильностью 10^{-15} - 10^{-16} необходим учет и компенсация всех рассмотренных выше «тонких» релятивистских эффектов, вызванных непосредственным влиянием различных возмущающих гравитационных потенциалов, а также влиянием возмущающих факторов на орбиту КА и через нее – на основной релятивистский сдвиг.

←----->

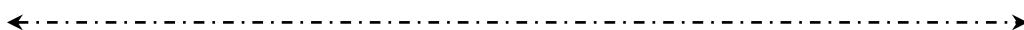
Как уже отмечалось, вычисление искажения орбиты от каждого возмущающего фактора – операция чрезвычайно трудная. Поэтому наилучшим образом для решения этой задачи подходит формула (4.38), в которой релятивистские эффекты, вызываемые искажениями орбиты от всех перечисленных выше факторов, определяются всего одной операцией: путем численного интегрирования по текущим параметрам ρ_c, V_c . Однако при этом к основному релятивистскому смещению, в соответствии с исходной формулой (4.13), необходимо добавить смещения, вызванные возмущающими гравитационными потенциалами:

$$\Delta\tau_p^c = \frac{1}{c^2} \left(\Phi_0 - \frac{3\mu_e}{2a_0} + \frac{3\mu_e \Delta a}{2a_0^2} \right) (\tau - \tau_H) + \frac{1}{c^2} \int_{\tau} \left(\frac{3\mu_e}{2a} - \frac{\mu_e}{\rho_c} - \frac{V_c^2}{2} \right) d\tau + \Delta\tau_p^w, \quad (4.102)$$

где релятивистское смещение $\Delta\tau_p^w$, вызванное возмущающими гравитационными потенциалами, выражается суммой:

$$\Delta\tau_p^w = \sum_{i=2}^{\infty} \Delta\tau_p^{ni} + \Delta\tau_{MS}^c - \Delta\tau_{MS}^0 - \Delta\tau_0^{\Omega}. \quad (4.103)$$

Здесь суммой $\sum_{i=2}^{\infty} \Delta\tau_p^{ni}$ обозначена совокупность релятивистских смещений, определяемых неоднородностью гравитационного поля Земли в виде суммы вкладов каждой гармоники разложения потенциала. Конкретные вклады второй, третьей и четвертой зональных гармоник ($i = 2, 3, 4$) определены выше формулами (4.57), (4.60) и (4.61). Необходимое количество гармоник определяется необходимой точностью учета влияния неоднородности ГПЗ на шкалу бортовых часов; $\Delta\tau_{MS}^c$ – релятивистские смещения бортовых спутниковых часов, вызванные суммарным воздействием лунных и солнечных приливных потенциалов. Определяются формулой (4.87); $\Delta\tau_{MS}^0$ – релятивистские смещения, вызванные суммарным воздействием Лунных и Солнечных приливных потенциалов на наземные часы. Определяются формулой (4.81); $\Delta\tau_0^{\Omega}$ – релятивистские смещения шкалы времени наземных базовых часов, вызванные неравномерностью вращения Земли. Определяются формулой (4.94).



4.8. Выводы к разделу 4

1. Релятивистские смещения времени и частоты спутниковых часов относительно наземных включают следующие составляющие:

- основные, или главные, составляющие взаимного релятивистского смещения собственного времени и частоты спутниковых и наземных часов, определяемые переменными орбитальными параметрами спутника, а также гравитационным потенциалом в точке размещения наземных стационарных часов;

- смещение шкалы собственного времени часов спутника вследствие воздействия неоднородности ГПЗ;

- смещение шкалы собственного времени наземных часов, вызванное приливными потенциалами Луны и Солнца;

- смещение шкалы собственного времени бортовых спутниковых часов, вызванное приливными потенциалами Луны и Солнца;

- смещение времени и частоты задающего генератора наземных часов, вызванное неравномерностью вращения Земли.

2. Основное релятивистское смещение (и постоянная и переменная части) может быть представлено в нескольких формах, которые могут быть удобны при решении различных задач учета и компенсации релятивистских эффектов.

2.1. Представление через истинную и среднюю аномалии. В этом случае смещение включает линейно нарастающую и периодически изменяющуюся, в общем случае несинусоидальную составляющую релятивистского расхождения времени, определяемую степенями эксцентриситета орбиты спутника. В зависимости от размера большой полуоси орбиты спутника линейно нарастающий эффект расхождения бортовой и наземной шкал времени может быть положительным (т.е. бортовые часы идут быстрее наземных, размер полуоси больше $9,6 \cdot 10^6$ м) и отрицательным (бортовые часы отстают, размер полуоси меньше $9,6 \cdot 10^6$ м).

2.2. Представление через эксцентрическую аномалию. В этом варианте представления переменная «эллиптическая» составляющая релятивистского смещения бортового времени выражается через текущую эксцентрическую аномалию или через скалярное произведение радиус-вектора и вектора скорости спутника. Обе формы применимы только для кеплеровского движения и не учитывают возмущения орбиты.

2.3. Представление через текущий радиус-вектор и скорость спутника. Предлагаемая форма учитывает возмущения орбиты спутника, вызванные высшими членами разложения гравитационного поля Земли,

←----->

влияние полей Луны и Солнца, сопротивление атмосферы, световое давление и др. Ее можно считать универсальной, однако для ее вычисления необходимы данные о текущих значениях радиус-вектора и вектора скорости спутника.

3. Смещение шкалы собственного времени часов спутника вследствие воздействия неоднородности ГПЗ.

3.1. Действие неоднородности ГПЗ на орбитальные часы проявляется двояко:

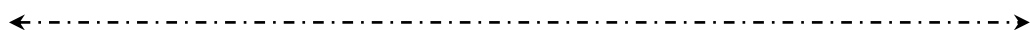
- во-первых, в виде возмущающего гравитационного потенциала, воздействующего непосредственно на шкалу орбитальных часов;
- во-вторых, в виде воздействия на основную составляющую смещения частоты и времени спутника через изменение орбитальных параметров спутника.

3.2. Влияние потенциала второй зональной гармоники в разложении потенциала ГПЗ проявляется в виде линейно нарастающей и периодической составляющей смещения шкалы бортового времени. При этом частота периодической составляющей в два раза выше частоты обращения спутника по орбите (среднего движения). Релятивистский эффект смещения бортового времени за счет изменения высоты орбиты в 6 раз больше, чем эффект непосредственного воздействия потенциала второй зональной гармоники на бортовые часы. Постоянная составляющая релятивистского частотного смещения бортового задающего генератора за счет второй зональной гармоники для орбиты ГЛОНАСС достигает $7,2 \cdot 10^{-15}$, амплитуда переменной составляющей – 7 пс. Величина обеих составляющих уменьшается с высотой и существенно зависит от наклона орбиты. Эффекты воздействия третьей и последующих зональных гармоник на порядок меньше.

4. Приливные лунно-солнечные релятивистские смещения частоты и времени спутниковых и наземных часов.

4.1. *Приливные смещения времени наземных СЧВ.* Набег длинно-периодного релятивистского приливного смещения времени для поля Солнца на интервале около 40 суток (примерно четверть периода) превышает 40 пс, для Луны на интервале в трие суток достигает 10 пс.

4.2. *Приливные релятивистские смещения спутниковых часов.* Приливный релятивистский сдвиг бортовой шкалы времени имеет линейную составляющую и периодическую с периодом, вдвое меньшим периода обращения спутника по орбите. Для спутников на геостационарной орбите линейный суточный сдвиг бортовой шкалы времени, вызванный влиянием приливных потенциалов Луны и Солнца, достигает 40 пс и 15 пс соответственно.



5. Смещения частоты и времени наземных часов, вызванные неравномерностью вращения Земли.

Наибольший вклад в это смещение вносит девиация модуля угловой скорости Земли. При среднем значении изменения модуля угловой $\Delta\Omega_z = -100 \cdot 10^{-10} \text{ с}^{-1}$ и интервале интегрирования 3 месяца (примерно четверть периода изменения угловой скорости) эффект смещения шкалы времени наземных часов составляет около 2500 пс.

6. Влияние других факторов на основной релятивистский эффект через влияние на параметры орбиты спутника.

Если релятивистское влияние второй и последующих гармоник можно достаточно легко формализовать и использовать для релятивистской синхронизации, то для целого ряда факторов это сделать затруднительно. К наиболее значимым факторам такого рода относятся (по степени убывания влияния): гравитационное поле Луны (возмущения радиус-вектора орбиты ГЛОНАСС 300–400 м); поле Солнца (возмущения до 200 м); высшие гармоники потенциала ГПЗ (до 200 м); сила светового давления Солнца (до 100 м в сутки); смещение полюсов Земли (до 50 м). Другие факторы менее значимы.

Поэтому для учета влияния этих факторов наиболее целесообразным является путь численного интегрирования релятивистских эффектов по текущим измерениям радиус-вектора и составляющим скорости спутника.

7. Релятивистская синхронизация часов в системе «космос – Земля» может быть реализованы в двух вариантах.

7.1. При наличии на борту спутника стандарта частоты и времени с нестабильностью не лучше 10^{-14} из значимых релятивистских эффектов (кроме основного) достаточно учесть лишь эффект «эллиптичности» и эффект влияния второй зональной гармоники гравитационного потенциала.

7.2. При установке на борту КА стандарта частоты и времени с нестабильностью 10^{-15} – 10^{-16} необходим учет и компенсация влияния всех рассмотренных выше «тонких» возмущающих факторов, с помощью метода численного интегрирования. Достижимая точность компенсации с помощью такого метода – единицы пикосекунд.

←----->

ЧАСТЬ III. ОПТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОКОЛОЗЕМНОГО ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

5. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА СРЕД, ДВИЖУЩИХСЯ В НЕИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ОТСЧЕТА

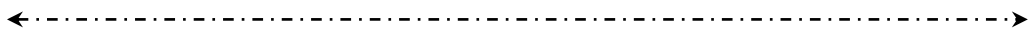
5.1. Постановка задачи исследования

В современных системах космической геодезии, космической навигации и синхронизации широко используются неинерциальные системы отсчета. К ним относятся системы, связанные с вращающейся Землей (геоцентрическая система ITRS, топоцентрические, связанные с наземными точками), а также орбитальные, одна из осей которых связана с космическим аппаратом. В системах отсчета такого рода, в соответствии с общей теорией относительности, кроме истинного гравитационного поля Земли, возникают наведенные вращением дополнительные поля сил инерции. В соответствии с принципом эквивалентности в ОТО эти поля воздействуют на все материальные тела как дополнительное, трудно отличимое во свойствам, гравитационное поле. Воздействие гравитационного поля на распространяющиеся в космосе электромагнитные волны проявляется в виде дополнительной оптически плотной среды, которая изменяет условия распространения радиоволн и лазерных лучей. Кроме того, распространение электромагнитных волн в наземно-космических системах происходит через реальную атмосферу, которая в некоторых системах, например, в невращающейся геоцентрической небесной системе ICRS, а также в орбитальной системе, движется со значительной скоростью.

В этой связи, обобщенная оптическая модель околоземного пространства должна строго учитывать все возможные составляющие оптически-плотной околоземной среды:

- движущуюся атмосферу (тропосферу, анизотропную ионосферу);
- истинное гравитационное поле Земли, создаваемое пространственным распределением ее массы;
- гравитационные поля ближайших небесных тел – Луны и Солнца;
- наведенные вращением выбранных систем отсчета гравитационные поля сил инерции.

С точки зрения практики важно рассмотреть проявление свойств оптически плотной околоземной среды в следующих электромагнитных системах:



- в радиосистемах «Земля – космос», «космос – космос» (геодезические системы, спутниковые навигационные системы, системы синхронизации, связи, радиолокации и др.);
- в наземных системах синхронизации и связи, основанных на глобальных радио- и волоконно-оптических сетях;
- в измерительных малогабаритных приборах, использующих эффекты влияния вращения и гравитационного поля на распространение волн различной природы (лазерные и волоконно-оптические гироскопы, атомные гравиметры и др.).

Для установления основных свойств обобщенной околоземной оптической среды необходимо развитие современной электродинамической теории движущихся сред в направлении совместного учета влияния гравитационных полей различной природы.

Необходимость в развитии более общей электродинамической теории, учитывающей одновременно свойства движущейся среды и гравитационного поля, впервые возникла с созданием гироскопов на кольцевых лазерах. Эффект, лежащий в основе принципа действия этих приборов, был измерен Саньяком на установке, в которой влияние преломляющихся свойств воздуха не учитывалось [192]. Первый эксперимент, в котором исследовалось распространение света в прозрачной среде, находящейся во вращающейся системе отсчета, выполнил Харрес [193]. Результаты опыта были опубликованы Харцером [194] и в их обсуждении принял участие Эйнштейн [195].

Важнейший полученный в эксперименте результат состоял в том, что разность времени обхода вращающегося контура совершенно не зависит от преломляющих свойств заполняющей среды.

В опытах Погани [196], которые проводились с целью повторения опыта Саньяка на установке с преломляющей средой, этот результат подтвердился. Берштейн [197] выполнил опыт Саньяка на радиоволнах, при этом встречные лучи распространялись в коаксиальной кабеле длиной 224 м, а измеряемым эффектом была разность фаз этих лучей. Независимость эффекта Саньяка от преломляющих свойств сплошной среды кабеля также подтвердилась. С созданием лазеров эксперименты по проверке влияния среды были проведены как на кольцевом лазере, так и на кольцевом волоконном интерферометре. В результате этих опытов к настоящему времени окончательно установлено, что покоящаяся прозрачная среда при равномерном вращении на эффект Саньяка не влияет.

←----->

Параллельно проводились эксперименты по оценке влияния скорости движения среды относительно вращающегося контура [198]. Эти опыты эквивалентны эксперименту Физо, выполненному в инерциальной системе отсчета. Как и ожидалось, взаимное запаздывание встречных волн в контуре определяется преломляющими свойствами движущейся среды.

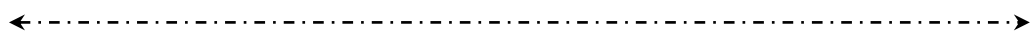
Первая теоретическая работа, посвященная оценке влияния неподвижной преломляющей среды на электромагнитное поле во вращающейся системе отсчета с позиций общей теории относительности, выполнена Хиром [199]. Хромых [200], исправив ошибку в окончательных выводах Хира, ввел в рассмотрение движение диспергирующей среды. Аналогичное исследование, но на основе специальной теории относительности, выполнили японские авторы [201].

Другой метод описания процессов в неинерциально движущихся средах состоит в использовании тензора χ^{iklm} , описывающего электромагнитные свойства среды и одновременно геометрию используемой системы отсчета [202]. Такой подход позволяет учесть также и движение среды относительно начала системы, однако он непригоден для описания истинного гравитационного поля.

Все вышеприведенные работы дают в общем сходные результаты применительно к вращающимся системам. Вместе с тем, в них не исследовалось влияние гравитационного поля и, в частности, переменного поля, возникающего при угловом ускорении. Попытка учесть постоянное гравитационное поле при наличии среды предпринималась в работах [203, 204]. Однако в них получен коэффициент преломления, не удовлетворяющий известным результатам. Кроме того, результаты работы [203], основанные на использовании соотношений, предложенных Таммом [202], не согласуются с известными экспериментами даже в членах первого порядка по $1/c$.

Влияние углового ускорения рассматривалось в известных работах [204-206] лишь приближенно и только применительно к лазерному кольцевому резонатору. Полученные результаты противоречивы, а методы исследования не обладают той общностью, которая позволила бы распространить их на любое переменное гравитационное поле.

Особый интерес представляет исследование поведения волны в анизотропных средах, движущихся в гравитационном поле. Основываясь на работах [207], авторы работы [208] рассмотрели эту задачу применительно к кольцевому резонатору с невзаимным элементом. Однако полученные результаты неверны, поскольку исследования базировались на результатах публикации [203], содержащей принципиальные ошибки. В исследовании [204] полученные результаты согласуются с экспериментом, однако здесь не учтено гравитационное поле.



Наконец, в современной литературе практически нет публикаций, посвященных вопросу воздействия гравитационных полей различной природы на постоянные электрические и магнитные поля, а также на проводники с током. К известным эффектам такого типа относятся лишь эффекты Барнетта и Толмена – Стюарта.

Таким образом, современная электродинамика сред, движущихся в неинерциальных системах отсчета, ограничена рассмотрением лишь равномерно вращающихся непроводящих сред. При этом известные исследования выполнены в сравнительно узкой области – применительно к кольцевому гиromетру с достаточно малыми размерами, а гравитационное поле считается однородным. Наконец, известные исследования по вращающимся средам ограничены определением лишь времени распространения и фазы волны. Частота считалась постоянной, а поляризация и амплитуда не определялись. В системе же отсчета с неоднородной метрикой определению подлежат все перечисленные параметры.

В связи с изложенным, необходимо более общее и строгое рассмотрение эффектов воздействия существенно неоднородных гравитационных полей на параметры электромагнитных полей и волн.

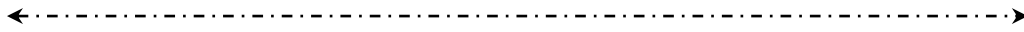
Отличие теоретической постановки задачи, решаемой в данной работе, от известных заключается в следующем:

- ❖ в учете неоднородности метрики во вращающейся системе отсчета ($\nabla \vec{G} \neq 0$);
- ❖ в расширении спектра исследуемых параметров электромагнитной волны (время РРВ, частота, фаза, поляризация, рефракция);
- ❖ в исследовании неинерциальных явлений в постоянных электромагнитных полях и проводниках с электрическим током.

5.2. Краткий обзор современного состояния оптических моделей гравитационного поля

Для современной электродинамики характерны два главных направления ее развития: электродинамика вакуума при наличии произвольных гравитационных полей и электродинамика движущихся сред вне гравитационных полей.

В электродинамике вакуума исследуется поведение электромагнитной волны как в истинном, так и в эффективном гравитационном поле, возникающем в силу принципа эквивалентности, в любых неинерциальных системах отсчета. Уравнения Максвелла в ковариантном виде, справедливые в любой системе отсчета, в отсутствие источников поля имеют вид [1, 2]:



$$F_{ik;l} + F_{ik;l} + F_{ik;l} = 0; \quad F_k^{ik} = 0; \quad i, k, l = 0, 1, 2, 3. \quad (5.1)$$

Здесь точка с запятой в индексах обозначает ковариантное дифференцирование; F_{ik} и F^{ik} – ко- и контравариантные тензоры электромагнитного поля, связанные в вакууме соотношением:

$$F_{ik} = g_{il} g_{km} F^{lm}, \quad (5.2)$$

где g_{ik} – фундаментальный метрический тензор.

Важный результат релятивистской электродинамики вакуума состоит в том, что постоянное гравитационное поле можно представлять в виде оптически плотной среды с коэффициентом преломления [2,3]

$$n^* = \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}} - \frac{G_\alpha e^\alpha}{g_{00}}, \quad (5.3)$$

где $G_\alpha = g_{0\alpha}$; e^α – орт волны.

Основы современной электродинамики движущихся сред заложены в работах Эйнштейна [7] и Минковского [8]. С помощью тензоров электромагнитного поля F_{ik} и H_{ik} уравнения Максвелла для поля в среде записываются в виде

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0; \quad \frac{\partial H_{ik}}{\partial x^k} = -j_i. \quad (5.4)$$

Здесь $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$, $x_4=ict$; j – 4-вектор плотности тока с компонентами

$$j_i = (i\rho, \vec{j}), \quad (5.5)$$

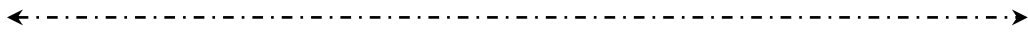
где ρ – плотность заряда; \vec{j} – 3-вектор плотности тока.

Материальные соотношения в тензорной форме записываются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} H_{ik} u_i &= c\varepsilon F_{ik} u_k, \\ F_{ik} u_l + F_{kl} u_i + F_{li} u_k &= c\mu (H_{ik} u_l + H_{kl} u_i + H_{li} u_k), \\ j_i &= \frac{\sigma}{c} F_{ik} u_k, \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

где u_k – 4-вектор скорости среды с компонентами $\Gamma \vec{V}$, $ic\Gamma$ причем

$\Gamma = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2}$; σ – проводимость среды; ε , μ – соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемости среды.



В инерциальной системе отсчета компоненты тензоров F_{ik} и H_{ik} связаны с составляющими векторов электромагнитного поля по схеме:

$$F_{ik} = (c\vec{B}, -i\vec{E}), \quad H_{ik} = (\vec{H}, -ic\vec{D}). \quad (5.7)$$

На основании этих связей уравнения Максвелла (5.4) и материальные соотношения (5.6) представляются в виде:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot}\vec{E} &= -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \quad \text{div}\vec{B} = 0, \\ \text{rot}\vec{H} &= \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + j, \quad \text{div}\vec{D} = \rho, \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

$$\vec{D} + \frac{1}{c^2} [\vec{V}\vec{H}] = \varepsilon (\vec{E} + [\vec{V}\vec{B}]), \quad (5.9)$$

$$\vec{B} + \frac{1}{c^2} [\vec{E}\vec{V}] = \mu (\vec{H} + [\vec{D}\vec{V}]), \quad (5.10)$$

$$\vec{j} = \sigma\Gamma (\vec{E} + [\vec{V}\vec{B}]), \quad \rho = \Gamma \frac{\sigma\vec{E}\vec{V}}{c^2}. \quad (5.11)$$

Соотношение (5.11) имеет простой физический смысл: это ток в движущейся проводящей среде. Второе равенство здесь говорит о том, что если покоящийся проводник с током электрически нейтрален, то при его движении на нем появляются электрические заряды.

Материальные уравнения (5.9) и (5.10) получены Минковским и носят его имя. Эти уравнения многократно проверены экспериментально в опытах с движущимися телами в электрическом и магнитном полях Роуланом, Рентгеном, Эйхенвальдом и Вильсоном (см., например, работы [209–212]). Именно эти эксперименты, наряду с классическим опытом Майкельсона [4], позволили сделать однозначный выбор между электродинамическими теориями Герца, Лоренца, Минковского. В настоящее время электродинамика движущихся сред – бурно развивающаяся область физики, и ей посвящено значительное число работ.

Дисперсионное соотношение, которое определяет закон распространения свободных волн в движущейся проводящей среде, имеет вид [213]:

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} - \Gamma^2 (n^2 - 1) \left(\frac{\omega}{c} - \vec{k} \frac{\vec{V}}{c} \right)^2 + i\sigma\mu\Gamma (\omega - \vec{k}\vec{V}) = 0, \quad (5.12)$$

←----->
 где \vec{k} – волновой вектор; ω – частота; V – скорость среды; $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ – коэффициент преломления; σ – проводимость среды.

Отсюда обобщенный коэффициент преломления движущейся среды

$$n^* = n - (n^2 - 1) \frac{\vec{V}\vec{e}}{c}. \quad (5.13)$$

Таким образом, классическая электродинамика описывает ЭМВ либо в гравитационном поле, либо в движущейся среде вне гравитационного поля.

Задача исследования состоит в объединении выражений для коэффициентов преломления (5.3) и (5.13) в единое соотношение, учитывающее преломляющие свойства движущейся среды (атмосферы), а также неоднородных гравитационных полей.

5.3. Электромагнитное поле в проводящей изотропной среде, движущейся в гравитационном поле

5.3.1. Ковариантные уравнения поля в движущейся изотропной среде

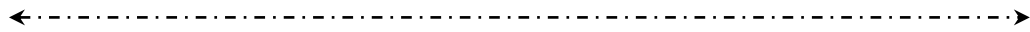
Уравнения Максвелла в ковариантной форме, справедливые в любой неинерциальной системе отсчета для сред с ненулевой проводимостью, выражаются через ко- и контравариантные тензоры электромагнитного поля F_{ik}, H^{ik} , компонентами которых являются составляющие векторов поля \vec{B}, \vec{E} и \vec{D}, \vec{H} соответственно [1, 2]:

$$F_{ik;l} + F_{li;k} + F_{kl;i} = 0; \quad H^{ik}_{;k} = -j^i. \quad (5.14)$$

Здесь точка с запятой обозначает ковариантное дифференцирование; латинские индексы принимают значения 0, 1, 2, 3; j^i – контравариантные компоненты 4-вектора плотности тока, определяемые выражениями:

$$j^i = \left\{ \frac{\rho}{\sqrt{-g_{00}}} \frac{\partial x^i}{\partial x^0} \right\}, \quad (5.15)$$

где ρ – пространственная плотность зарядов.



Уравнения Максвелла для поля в среде должны быть дополнены материальными соотношениями, выраженными через те же тензоры электромагнитного поля. Поскольку речь идёт об изотропной движущейся среде, то в качестве основы для обобщения следует использовать материальные соотношения в форме (5.6), справедливые в неинерциальной системе. При этом будем использовать тензоры F_{ik} и F^{ik} , H_{ik} и H^{ik} , а также 4-вектор скорости среды с компонентами [1]:

$$u^0 = \Gamma^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{-g_{00}}} - \frac{g_{0\alpha}}{c g_{00}} \right), \quad u^\alpha = \Gamma^{-1} \frac{V^\alpha}{c}; \quad \Gamma = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \quad (5.16)$$

В результате одна из более общих тензорных форм материальных соотношений (5.6) запишется в виде

$$\begin{aligned} H^{ik} u_k &= \varepsilon F^{ik} u^k, \\ F_{ik} u_i + F_{kl} u_i + F_{li} u_k &= \mu c^2 (H_{ik} u_i + H_{kl} u_i + H_{li} u_k). \end{aligned}$$

Переходя к тензорам F_{ik} и H^{ik} и к вектору скорости u^k с помощью метрического тензора g_{ik} , получаем:

$$\left. \begin{aligned} H^{ik} g_{kl} u^l &= \varepsilon g^{il} F_{lm} u^m, \\ e^{iklm} F_{kl} g_{ms} u^s &= \mu c^2 e^{iklm} g_{ks} g_{li} H^{st} g_{mr} u^r, \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

где e^{iklm} – единичный псевдотензор четвертого ранга.

Используя иные компоненты тензоров электромагнитного поля и вектора скорости среды, материальные соотношения (5.6) получаем в виде:

$$\begin{aligned} H_{ik} u^k &= \varepsilon F_{ik} u^k, \\ F^{ik} u^l + F^{kl} u^i + F^{li} u^k &= (H^{ik} u^l + H^{kl} u^i + H^{li} u^k). \end{aligned}$$

Используя метрический тензор, приходим к форме, эквивалентной (5.17):

$$\left. \begin{aligned} g_{ik} g_{km} H^{lm} &= \varepsilon F_{ik} u^k, \\ e_{iklm} g^{ks} g^{lt} F_{st} u^m &= c^2 \mu e_{iklm} H^{kl} u^m \end{aligned} \right\}. \quad (5.18)$$

Эта форма впервые была предложена Хромых [200].

←----->

Обе полученные тензорные формы материальных уравнений (5.18) можно одинаково успешно использовать для описания полей в движущихся изотропных средах в произвольных гравитационных полях. При этом от одной формы к другой можно легко перейти с помощью ко- или контравариантного метрического тензора. Особый интерес представляет обобщение на произвольные системы отсчета третьего материального соотношения (5.6). Используя тот же тензор поля и вектор скорости среды, выражение для контравариантного 4-вектора плотности тока записываем в виде

$$j^i = \frac{\sigma}{c} F^{ik} u_k.$$

Отсюда, вводя метрический тензор, получаем

$$j^i = \frac{\sigma}{c} g^{il} g^{km} F_{lm} g_{ks} u^s.$$

Выполнив преобразования, приходим к окончательной форме:

$$j^i = \frac{\sigma}{c} g^{il} F_{lm} u^m. \quad (5.19)$$

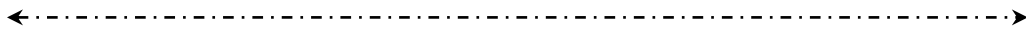
Уравнение (5.19) можно получить несколько иначе. Используя тензор F_{ik} , для ковариантных компонентов 4-вектора плотности тока приходим к выражению

$$j_i = \frac{\sigma}{c} F_{ik} u^k,$$

откуда, переходя с помощью метрического тензора к контравариантным компонентам, получаем уравнение (5.19).

Полученная система материальных соотношений совместно с уравнениями Максвелла (5.14) пригодна для описания электромагнитных полей и волн в изотропных проводящих средах. При этом будем в дальнейшем считать, что рассматриваемая изотропная среда обладает в общем случае частотной и пространственной дисперсией:

$$\varepsilon = \varepsilon(\omega, \vec{k}), \quad \mu = \mu(\omega, \vec{k}).$$



5.3.2. Поля и токи в проводящих изотропных средах, движущихся в произвольных системах отсчета

Чтобы получить уравнения (5.14)–(5.19) в векторном виде, необходимо задать связь между компонентами тензоров F_{ik} , H^{ik} и векторов поля $\vec{E}, \vec{H}, \vec{B}, \vec{D}$. Эта связь однозначна лишь в инерциальной системе отсчета [см. формулу (5.7)]. В произвольном гравитационном поле информация о метрике пространства-времени будет содержаться одновременно и в векторных уравнениях Максвелла, и в материальных соотношениях. Поэтому при выборе этой связи целесообразно исходить из дополнительных условий. К ним относятся:

- максимальная приближенность формы уравнения Максвелла к их традиционной форме в инерциальных системах. При этом большая часть информации о метрике гравитационного поля будет содержаться в материальных соотношениях;

- отражение в форме уравнений Максвелла определенных особенностей гравитационного поля, например, зависимости его метрики от пространственных координат (неоднородности) и т.д.

Однако различие в форме основных уравнений электродинамики носит непринципиальный характер, поскольку конечные результаты и, в частности, волновое уравнение должны быть одними и теми же при любой связи между тензорами и векторами поля.

5.3.2.1. Уравнения электродинамики при первой форме связи векторов и тензоров поля

Установим соотношение между векторами и тензорами поля в виде [79, 214]:

$$\left. \begin{aligned} D^\alpha &= -\sqrt{-g} H^{0\alpha}, cB^\alpha = -\frac{1}{2} e^{\alpha\beta\gamma} F_{\beta\gamma}, \\ E_\alpha &= F_{0\alpha}, H_\alpha = -\frac{c}{2} \sqrt{-g} e_{\alpha\beta\gamma} H^{\beta\gamma}. \end{aligned} \right\} \quad (5.20)$$

При этом тензоры поля имеют компоненты:

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -cB^3 & cB^2 \\ -E_2 & cB^3 & 0 & -cB^1 \\ -E_3 & cB^2 & cB^1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$H^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{D^1}{\sqrt{-g}} & -\frac{D^2}{\sqrt{-g}} & -\frac{D^3}{\sqrt{-g}} \\ \frac{D^1}{\sqrt{-g}} & 0 & -\frac{H_3}{c\sqrt{-g}} & \frac{H_2}{c\sqrt{-g}} \\ \frac{D^2}{\sqrt{-g}} & \frac{H_3}{c\sqrt{-g}} & 0 & \frac{H_1}{c\sqrt{-g}} \\ \frac{D^3}{\sqrt{-g}} & -\frac{H_2}{c\sqrt{-g}} & \frac{H_1}{c\sqrt{-g}} & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.21)$$

Учитывая, что в произвольной системе отсчета 4-вектор плотности тока (5.15) имеет компоненты:

$$j^i = \left\{ \frac{\rho}{\sqrt{-g_{00}}}; -\frac{1}{c\sqrt{-g_{00}}} \vec{j} \right\}, \quad (5.22)$$

уравнения Максвелла (5.14) получаем в виде:

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial B^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0, \\ \text{rot} \vec{H} &= \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}, \quad \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial D^\alpha}{\partial x^\alpha} = \rho. \end{aligned} \quad (5.23)$$

При этом учтено, что контравариантные компоненты вектора $\text{rot} \vec{a}$ определяются соотношением [1]

$$(\text{rot} \vec{a})^\alpha = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} e^{\alpha\beta\gamma} \left(\frac{\partial a_\gamma}{\partial x^\beta} - \frac{\partial a_\beta}{\partial x^\gamma} \right), \quad (5.24)$$

где γ – определитель трехмерного метрического тензора с компонентами:

$$\gamma_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}}. \quad (5.25)$$

Особенность уравнений (5.23) состоит в том, что они не содержат в явном виде производных ни по времени, ни по координатам от компонентов метрического тензора. В частном случае инерциальной системы отсчета ($\gamma = 1$) уравнения (5.23) сводятся к традиционной форме (5.8).

Недостаток этих уравнений заключается в том, что векторные уравнения каждой пары невозможно представить в трехмерном виде. Однако для волн в диэлектриках, когда компоненты тока (5.22) равны нулю, можно показать, что вторые уравнения каждой пары уравнений (5.23) следуют из первых. Для этого представим, например, первое уравнение первой пары в виде

$$\int (\sqrt{\gamma} \operatorname{rot} \vec{E}) dt = -\vec{B}.$$

Дифференцируя составляющие левой и правой части по dx^a , получаем

$$\int \sqrt{\gamma} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x^a} \left[\sqrt{\gamma} (\operatorname{rot} \vec{E})^a \right] \right\} dt = -\frac{\partial B^a}{\partial x^a}.$$

Отсюда, учитывая, что трехмерная дивергенция выражается соотношением [1, 2]

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x^a} \left[\sqrt{\gamma} A^a \right],$$

получаем $\frac{\partial B^a}{\partial x^a} = 0$. Аналогичный результат следует и из второй пары. В результате полная система уравнений Максвелла для волн в диэлектрической непроводящей среде, движущейся в произвольной системе отсчета, приобретает вид:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (5.26)$$

Используя соотношения (5.16) и (5.20), материальные соотношения (5.18) получаем в следующем виде [79, 214]:

$$\vec{D} + \frac{\gamma}{c^2 \sqrt{g}} [\vec{V} \vec{H}] = \frac{\gamma \varepsilon}{\sqrt{g}} (\vec{E} + [\vec{V} \vec{B}]) - \frac{\sqrt{\gamma}}{c g_{00}} [\vec{H} \vec{G}], \quad (5.27)$$

$$\vec{B} + \frac{\gamma}{c^2 \sqrt{g}} [\vec{E} \vec{V}] = \frac{\gamma \mu}{\sqrt{g}} (\vec{H} + [\vec{D} \vec{V}]) - \frac{\sqrt{\gamma}}{c g_{00}} [\vec{G} \vec{E}], \quad (5.28)$$

где $G_\alpha = g_{0\alpha}$. При выводе этих соотношений произведения вида VG/c опущены вследствие их малости.

←----->

Пренебрегая членами, содержащими V^2/c^2 , получаем более простые уравнения:

$$\vec{D} = \frac{\gamma}{\sqrt{g}} \varepsilon \vec{E} + \frac{\sqrt{\gamma}}{cg_{00}} [\vec{G}\vec{H}] + \frac{n^2-1}{c^2} [\vec{V}\vec{H}], \quad (5.29)$$

$$\vec{B} = \frac{\gamma}{\sqrt{g}} \mu \vec{H} + \frac{\sqrt{\gamma}}{cg_{00}} [\vec{E}\vec{G}] + \frac{n^2-1}{c^2} [\vec{E}\vec{V}], \quad (5.30)$$

где n – коэффициент преломления среды.

Наконец, можно представить эти уравнения в удобном для вычисления виде:

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \vec{D} = \varepsilon' \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{H}\vec{Y}], \quad \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \vec{B} = \mu' \vec{H} + \frac{1}{c} [\vec{Y}\vec{E}], \quad (5.31)$$

где $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\sqrt{-g_{00}}}$; $\mu' = \frac{\mu}{\sqrt{-g_{00}}}$; $\vec{Y} = \frac{\vec{G}}{-g_{00}} - \frac{n^2-1}{c} \vec{V}$.

На основании выражений (5.16) и (5.20) уравнение (5.19) получаем в виде (учитываем, что $j^0 = c\rho$):

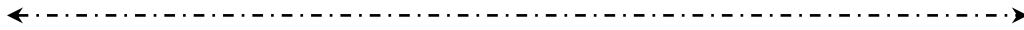
$$\vec{j} = \sigma \Gamma \left(\vec{E} - \sqrt{\frac{-g_{00}}{\gamma}} [\vec{B}\vec{V}] \right); \quad \rho_n = \frac{\sigma}{c} \Gamma \left(\frac{\vec{E}\vec{V}}{c\sqrt{-g_{00}}} + \sqrt{-g_{00}} \vec{E}\vec{G} \right). \quad (5.32)$$

При выводе этих формул учтено, что, согласно (2.33) и (2.37),

$$g^{00} = \frac{1}{g_{00}} (1 - G_\alpha G^\alpha), \quad c^\alpha = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} e^{\alpha\beta\gamma} a_\beta b_\gamma, \quad (5.33)$$

причем произведения VG/c^2 отброшены вследствие их малости.

Полученные материальные уравнения (5.27), (5.28) и (5.32) обобщают известные уравнения (5.9) и (5.10) на случай гравитационных полей. Примечательной особенностью уравнения (5.32) является то, что при вращении электрически нейтрального проводника с током $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ на нем (даже в отсутствие поступательного движения со скоростью \vec{V}) появляются заряды [79–82, 214]. Знак заряда зависит от взаимной ориентации векторов \vec{E} и \vec{G} . Представляет интерес то, что этот эффект не зависит от выбора начала системы отсчета. В инерциальной невращающейся системе ($\vec{G} = 0, g_{00} = -1$) имеем [217]:



$$\rho_n' = \sigma \Gamma \frac{\vec{E}\vec{V}}{c^2}.$$

Если проводник кольцевой и вращается в этой системе вокруг своего центра со скоростью $\vec{\Omega}$, $\vec{V} = [\vec{\Omega}\vec{R}]$, а поэтому

$$\rho_n' \approx \sigma \frac{E[\vec{\Omega}\vec{R}]}{c^2}. \quad (5.34)$$

Если связать с проводником систему отсчета, в которой он неподвижен ($V = 0$), из (5.32) получаем $\rho_n'' = \frac{\sigma}{c} \vec{E}\vec{G}$. Поскольку $\vec{G} = \frac{1}{c} [\vec{\Omega}\vec{R}]$, то приходим к формуле (5.34). Таким образом, наведенный заряд (5.32) является инвариантным по отношению не только к выбору инерциальной системы, но и к выбору неинерциальной системы. Иначе говоря, заряд (5.32) один и тот же с точки зрения любого неинерциального наблюдателя – покоящегося или движущегося относительно неинерциальной системы [88]. Аналогичным параметром волны, как известно, является ее фаза.

Проанализируем полученные результаты. Согласно уравнениям (5.29) и (5.30) движущаяся среда приобретает электрические и магнитные свойства, определяемые индукциями:

$$\vec{D} = \frac{n^2 - 1}{c^2} [\vec{V}\vec{H}], \quad \vec{B} = \frac{n^2 - 1}{c} [\vec{E}\vec{V}]. \quad (5.35)$$

Эффекты намагничения и электрической поляризации движущейся электрически поляризованной (намагниченной) среды впервые были исследованы в опытах Роуланда [215–216], Рентгена [215, 210], Эйхенвальда [209, 211] и Вильсона [209, 212].

Однако особый интерес в уравнениях (5.29) и (5.30) представляют члены, содержащие вектор \vec{G} . В случае покоящейся среды ($V = 0$) и при нулевом внешнем электрическом поле ($E = 0$) электрическая индукция не равна нулю:

$$\vec{D} = \frac{\sqrt{\gamma}}{g_{00}} \frac{[\vec{G}\vec{H}]}{c}. \quad (5.36)$$

Точно так же не равна нулю и магнитная индукция при нулевой напряженности внешнего магнитного поля:

$$\vec{B} = \frac{\sqrt{\gamma}}{g_{00}} \frac{[\vec{E}\vec{G}]}{c}. \quad (5.37)$$

В равномерно вращающейся системе $c\vec{G} = [\vec{\Omega}\vec{R}]$, $-g_{00} = \gamma = 1$ напряженность наведенного электрического и магнитного полей определяется соотношениями, соответственно:

$$\vec{D} = \frac{1}{c^2} [\vec{H} [\vec{\Omega}\vec{R}]], \quad \vec{B} = \frac{1}{c^2} [[\vec{\Omega}\vec{R}] \vec{E}]. \quad (5.38)$$

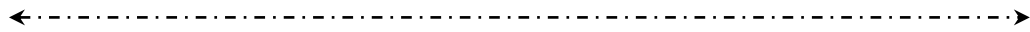
Формулы (5.38) отображают принципиально новый результат: наблюдатель (измеритель), покоящийся во вращающейся системе отсчета, в которой имеется источник магнитного поля, зафиксирует наведенное электрическое поле. Примером этого является, в частности, появление наведенного заряда (5.32) во вращающемся в магнитном поле проводнике с током. И наоборот, во вращающейся системе отсчета, где есть электрическое поле, наблюдатель зафиксирует появление магнитного поля [88, 89].

Перечисленные эффекты в корне отличаются от эффектов, определяемых формулами (5.35) тем, что в последнем случае предполагается относительное движение наблюдателя (измерителя) и поляризованной среды. Именно по такой схеме были выполнены классические опыты [210–212], где измеритель – магнитная стрелка – покоился на неподвижном основании. В данном же случае источник поля и измеритель неподвижны друг относительно друга, не находятся на одном вращающемся основании.

Волновым аналогом рассмотренных эффектов является эффект Саньяка в резонаторе кольцевого лазера. При взаимодействии встречно бегущих волн в кольцевом резонаторе образуются стоячие волны, важнейшим свойством которых является неподвижность относительно любой инерциальной системы. При угловом движении резонатора фотоприемник как бы сканирует по неподвижной картине стоящих волн, которая отображается на его апертуре в виде бегущей картины интерференции. При этом фотоприемник неподвижен относительно источника встречных волн.

Общность описанных выше явлений на постоянных и переменных полях заключается в том, что *электромагнитное поле любой частоты является носителем невращающейся инерциальной системы отсчета.*

Рассмотрим обобщение закона Ома. При этом надо получить выражение для трехмерного тока \vec{j} , который должен включать ток проводимости, вызванный движением зарядов относительно среды, а также ток, вызванный движением зарядов вместе со средой наведенный им конвекционный ток.



Четырехмерная плотность тока проводимости j'_n определяется материальными соотношениями (5.19), а плотность конвекционного тока – выражением:

$$j'_k = \rho u^i, \quad (5.39)$$

где u^i – 4-скорость заряда ρ . Поскольку сумма этих токов определяет полный 4-ток j^i , то из этого условия с учетом соотношения (5.19) находим:

$$\frac{\sigma}{c} g^{il} F_{lk} u^k = j^i - j'^k. \quad (5.40)$$

Выразим j'_k через полный ток j^i . Для этого воспользуемся общим преобразованием 4-плотности тока $j^i = \rho u^i$, умножив левую и правую части на u_i . В результате получим:

$$j^i u_i = \rho u^i u_i. \quad (5.41)$$

На основании (5.16), пренебрегая произведениями VG/c , можно считать $u_i u^i = -1$. Подставляя этот результат в формулу (5.39), находим:

$$j^i = -j^i u_i u^i = -j^i g_{lm} u^m u^i. \quad (5.42)$$

На основе выражения (5.42) соотношение (5.40) приводим к окончательному виду:

$$j^i_k = j^i + j^l g_{lm} u^m u^i = \frac{\sigma}{c} g^{il} F_{lk} u^k. \quad (5.43)$$

Это и есть 4-форма закона Ома в произвольной форме отсчета.

Представляя выражение (5.43) в трехмерном виде, для тока проводимости ($i = 1, 2, 3$) получаем:

$$\vec{j} + \Gamma^2 \vec{V} \left[\rho + \frac{\vec{j}}{c \sqrt{-g_{00}}} \left(\vec{G} + \frac{\vec{V}}{c} \right) \right] = \sigma \Gamma \left(\vec{E} - \sqrt{\frac{-g_{00}}{\gamma}} [\vec{B} \vec{V}] \right), \quad (5.44)$$

что обобщает известные результаты [217].

Для медленно движущихся сред, пренебрегая сомножителями V^2/c^2 и VG/c , получаем в первом приближении:

$$\vec{j} = -\rho \vec{V} + \sigma \left(\vec{E} - [\vec{B} \vec{V}] \right). \quad (5.45)$$

Таким образом, закон Ома для покоящихся сред

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (5.46)$$

существенно изменяется в движущихся средах.

Четвертое уравнение, получаемое из (5.43) при $i = 0$, повторяет второе из соотношений (5.32).

Система уравнений (5.23), (5.29), (5.30) и (5.44) пригодна для исследования полей и распространения волн в изотропных проводящих средах, движущихся в гравитационном поле с произвольной скоростью.

5.3.2.2. Уравнения электродинамики при второй форме связи векторов и тензоров поля

Установим связь между векторами и тензорами поля в виде [1, 2]:

$$\left. \begin{aligned} D^\alpha &= -\sqrt{-g_{00}} H^{0\alpha}, \quad cB^\alpha = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\gamma}} e^{\alpha\beta\delta} F_{\beta\delta}, \\ E_\alpha &= F_{0\alpha}, \quad H_\alpha = -\frac{c}{2} \sqrt{-g} e_{\alpha\beta\delta} H^{\beta\delta}. \end{aligned} \right\} \quad (5.47)$$

При этом тензоры поля имеют вид:

$$\begin{aligned} F_{ik} &= \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -c\sqrt{\gamma}B^3 & c\sqrt{\gamma}B^2 \\ -E_2 & c\sqrt{\gamma}B^3 & 0 & -c\sqrt{\gamma}B^1 \\ -E_3 & -c\sqrt{\gamma}B^2 & c\sqrt{\gamma}B^1 & 0 \end{pmatrix}, \\ H^{ik} &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{D^1}{\sqrt{-g_{00}}} & -\frac{D^2}{\sqrt{-g_{00}}} & -\frac{D^3}{\sqrt{-g_{00}}} \\ \frac{D^1}{\sqrt{-g_{00}}} & 0 & -\frac{H_3}{c\sqrt{-g}} & \frac{H_2}{c\sqrt{-g}} \\ \frac{D^2}{\sqrt{-g_{00}}} & \frac{H_3}{c\sqrt{-g}} & 0 & -\frac{H_1}{c\sqrt{-g}} \\ \frac{D^3}{\sqrt{-g_{00}}} & -\frac{H_2}{c\sqrt{-g}} & \frac{H_1}{c\sqrt{-g}} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.48)$$

На основании этих выражений векторная форма уравнений Максвелла для проводящих сред принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{\gamma} \vec{B}), \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{\gamma} \vec{D}) + \vec{j}, \quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho. \end{aligned} \right\} \quad (5.49)$$

При выводе систем уравнений (5.49) учтены соотношения (5.24) и (5.26).

Примечательной особенностью этой системы является то, что уравнения, определяющие дивергенцию векторов индукций, можно привести, в отличие от (5.23), к трехмерному виду в системе отсчета с произвольной метрикой. Поэтому рассмотренную систему уравнений можно рекомендовать для описания полей в средах со свободными зарядами.

В отсутствие свободных зарядов при нулевой проводимости вся система (5.49) сводится, как нетрудно показать, лишь к двум уравнениям:

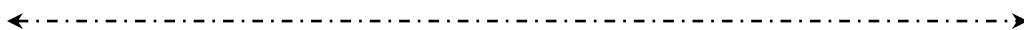
$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{\gamma} \vec{B}), \quad \operatorname{rot} \vec{H} = -\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{\gamma} \vec{D}). \quad (5.50)$$

Вместе с тем, из-за сложных производных по времени, включающих производные от определителя трехмерного метрического тензора, уравнения (5.50) менее удобны, чем более простые уравнения (5.26). Тем не менее, в этих уравнениях очень легко перейти к постоянным гравитационным полям, положив $\frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\gamma} = 0$. При этом уравнения приводятся к традиционной форме (5.8).

Материальные соотношения (5.18) при связях (5.47) приобретают вид [62]:

$$\left. \begin{aligned} \vec{D} + \frac{1}{c^2 \sqrt{-g_{00}}} [\vec{V} \vec{H}] &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{-g_{00}}} \vec{E} + \varepsilon [\vec{V} \vec{B}] - \frac{1}{c g_{00}} [\vec{H} \vec{G}], \\ \vec{B} + \frac{1}{c^2 \sqrt{-g_{00}}} [\vec{E} \vec{V}] &= \frac{\mu}{\sqrt{-g_{00}}} \vec{H} + \mu [\vec{D} \vec{V}] - \frac{1}{c g_{00}} [\vec{G} \vec{E}], \end{aligned} \right\} \quad (5.51)$$

или при исключении малых членов V^2/c^2 , VG/c – вид:



$$\vec{D} = \varepsilon' \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{H} \vec{Y}], \quad \vec{B} = \mu' \vec{H} + \frac{1}{c} [\vec{Y} \vec{E}], \quad (5.52)$$

где $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\sqrt{-g_{00}}}$; $\mu' = \frac{\mu}{\sqrt{-g_{00}}}$; $\vec{Y} = \frac{\vec{G}}{-g_{00}} - \frac{n^2 - 1}{c} \vec{V}$.

При тех же связях между тензорами и векторами поля третье материальное соотношение (5.43), представляющее обобщенный закон Ома, принимает форму:

$$j^i = j^i + j^l g_{lm} u^m u^i = \frac{\sigma}{c} g^{il} F_{lk} u^k, \quad (5.53)$$

или для медленно движущихся сред – форму:

$$\vec{j} = \rho \vec{V} + \sigma (\vec{E} - [\vec{B} \vec{V}]). \quad (5.54)$$

Второе уравнение системы (5.32), определяющее заряд, вызванный током проводимости в движущемся проводнике, остается практически без изменения:

$$\rho_n = \frac{\sigma}{c} \Gamma \left(\frac{1}{\sqrt{-g_{00}}} \frac{\vec{E} \vec{V}}{c} + \vec{E} \vec{G} \right).$$

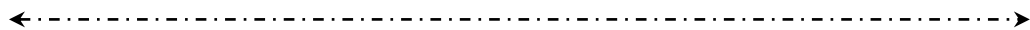
При малой скорости движения и вращения, а также слабом гравитационном поле эта формула полностью совпадает с формулой (5.32).

5.4. Электромагнитная волна в изотропной проводящей среде, движущейся в неинерциальной системе отсчета

5.4.1. Волновое уравнение для ЭМВ в изотропной проводящей среде

Рассмотрим распространение свободных электромагнитных волн в изотропной проводящей среде с дисперсией при условии, что сторонние заряды в ней отсутствуют ($\rho = 0$). Наведенным зарядом (5.32), возникающим при движении проводника с током, пренебрегаем, поскольку его величина пропорциональна $1/c^2$ и при малом токе незначительна. В результате вторая пара уравнений (5.23) приобретает вид:

$$\text{rot} \vec{H} = -\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}, \quad \frac{\partial D^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0. \quad (5.55)$$



Если ток \vec{j} постоянен в пространстве, т.е. $\partial j^\alpha / \partial x^\alpha = 0$, то второе уравнение, как нетрудно показать, при этом условии является следствием первого. Поскольку, как отмечалось, это же относится и к первой паре уравнений (5.23), то система Максвелла для рассматриваемого случая сводится к двум уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \text{rot} \vec{H} &= \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \end{aligned} \right\}. \quad (5.56)$$

Материальное соотношение для электрической индукции (5.31) представим в более удобном виде:

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \vec{D} = \varepsilon' \vec{E} + \frac{1}{\mu' \sqrt{\gamma} c} [\vec{B} \vec{Y}] - \frac{1}{c^2 \mu'} [[\vec{Y} \vec{E}] \vec{Y}]. \quad (5.57)$$

Наконец, обобщенное выражение закона Ома (5.45) при ($\rho = 0$) принимает вид:

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} - [\vec{B} \vec{V}]). \quad (5.58)$$

Используя приведенные соотношения, получим волновое уравнение для поля в изотропной среде, движущейся в гравитационном поле.

Полагая, что характеристики среды ε, μ, σ постоянны во времени, из уравнений (5.31) и (5.56)–(5.58) для однородной среды и однородного гравитационного поля имеем:

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\mu}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{-g_{00}}} \vec{H} \right) - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sqrt{\gamma} \left[\frac{\vec{Y}}{c} \vec{E} \right] \right), \quad (5.59)$$

$$\text{rot rot} \vec{E} = -\frac{\mu}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{-g_{00}}} \text{rot} \vec{H} \right) - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sqrt{\gamma} \text{rot} \left[\frac{\vec{Y}}{c} \vec{E} \right] \right). \quad (5.60)$$

Из второго уравнения (5.56), на основе (5.57) и (5.58), получаем:

(5.61)

$$\begin{aligned}
 \text{rot} \vec{H} = & -\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{-g_{00}}} \varepsilon \vec{E} + \frac{\sqrt{-g_{00}}}{\mu} \left[\vec{B} \frac{\vec{Y}}{c} \right] - \frac{\sqrt{g_{00} \sqrt{\gamma}}}{\mu c^2} \left[[\vec{Y} \vec{E}] \vec{Y} \right] \right\} + \\
 & + \sigma (\vec{E} - [\vec{B} \vec{V}]) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{-g_{00}}} \vec{E} \right) + \frac{1}{\mu \sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sqrt{-g_{00}} \left[\vec{B} \frac{\vec{Y}}{c} \right] \right) - \\
 & - \frac{1}{c^2 \mu \sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sqrt{-g_{00}} \sqrt{\gamma} \left[[\vec{Y} \vec{E}] \vec{Y} \right] \right) + \sigma (\vec{E} - [\vec{B} \vec{V}]). \quad (5.61)
 \end{aligned}$$

Подставляя выражение (5.61) в (5.60), находим:

$$\begin{aligned}
 \text{rot rot } \vec{E} = & -\frac{\mu \varepsilon}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{-g_{00}}} \vec{E} \right) \right\} - \\
 & - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sqrt{-g_{00}} \left[\vec{B} \frac{\vec{Y}}{c} \right] \right) \right\} + \\
 & + \frac{1}{c^2 \sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sqrt{\gamma} \sqrt{-g_{00}} \left[[\vec{Y} \vec{E}] \vec{Y} \right] \right) \right\} - \quad (5.62) \\
 & - \frac{\mu \sigma}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{-g_{00}}} \vec{E} \right) + \frac{\mu \sigma}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{-g_{00}}} [\vec{B} \vec{V}] \right) - \\
 & - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sqrt{\gamma} \text{rot} \left[\frac{\vec{Y}}{c} \vec{E} \right] \right).
 \end{aligned}$$

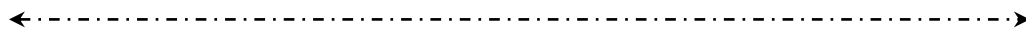
Рассмотрим все слагаемые правой части выражения (5.62).

В первом и третьем слагаемых можно пренебречь вторыми производными компонентов метрического тензора в силу их малости. Поэтому выражения существенно упрощаются.

Используя первое выражение (5.56), преобразуем сомножитель в фигурных скобках во втором слагаемом:

$$\frac{1}{\sqrt{-g_{00}}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sqrt{-g_{00}} \left[\vec{B} \frac{\vec{Y}}{c} \right] \right) = \frac{[\vec{B} \vec{Y}]}{c \sqrt{-g_{00}}} \frac{\partial \sqrt{-g_{00}}}{\partial t} + \frac{\sqrt{\gamma}}{c} [\vec{Y} \text{rot} \vec{E}] + \frac{1}{c} [\vec{B} \dot{\vec{Y}}].$$

Отсюда на основе первого уравнения (5.56), пренебрегая вторыми производными, получаем:



$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sqrt{-g_{00}} \left[\vec{B} \frac{\vec{Y}}{c} \right] \right) \right\} = -\frac{1}{c\sqrt{\gamma}} \frac{\partial \sqrt{\gamma}}{\partial t} [\vec{Y} \text{rot} \vec{E}] - \\
 & -\frac{2}{c} [\dot{\vec{Y}} \text{rot} \vec{E}] - \frac{1}{c} [\vec{Y} \text{rot} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)] - \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}} \frac{\partial \sqrt{-g_{00}}}{\partial t} \left[\frac{\vec{Y}}{c} \text{rot} \vec{E} \right]
 \end{aligned} \tag{5.63}$$

Четвертое слагаемое при слабой приводимости диэлектрика приводится к виду:

$$-\frac{\mu\sigma}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{-g_{00}}} \vec{E} \right) = -\frac{\mu\sigma}{\sqrt{-g_{00}}} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \tag{5.64}$$

Пятое слагаемое преобразуем при условии слабой проводимости и незначительного ускорения среды ($\dot{V} \approx 0$):

$$\frac{\mu\sigma}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{-g_{00}}} [\vec{B}\vec{V}] \right) \approx \frac{\mu\sigma}{\sqrt{-g_{00}}} \frac{\partial}{\partial t} [\vec{B}\vec{V}] \approx \frac{\sigma\mu}{\sqrt{-g_{00}}} [\vec{V} \text{rot} \vec{E}]. \tag{5.65}$$

Наконец, шестое слагаемое преобразуем к виду:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sqrt{\gamma} \text{rot} \left[\frac{\vec{Y}}{c} \vec{E} \right] \right) = -\frac{1}{c\sqrt{\gamma}} \text{rot} [\vec{Y}\vec{E}] \frac{\partial \sqrt{\gamma}}{\partial t} - \\
 & -\frac{1}{c} \text{rot} [\dot{\vec{Y}}\vec{E}] - \frac{1}{c} \text{rot} \left[\vec{Y} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right].
 \end{aligned} \tag{5.66}$$

В результате, учитывая, что $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\sqrt{-g_{00}}}$, $\mu' = \frac{\mu}{\sqrt{-g_{00}}}$, получаем:

$$\begin{aligned}
 \text{rot rot} \vec{E} &= -\varepsilon' \mu' \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{1}{c} [\vec{Y} \text{rot} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}] - \frac{1}{c} \text{rot} \left[\vec{Y} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] - \\
 & -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\vec{Y} [\vec{Y}\vec{E}]] - \frac{2}{c} \left[\frac{\partial \dot{\vec{Y}}}{\partial t} \text{rot} \vec{E} \right] - \frac{1}{c} \text{rot} \left[\frac{\partial \dot{\vec{Y}}}{\partial t} \vec{E} \right] - \frac{1}{c} [\vec{Y} \text{rot} \vec{E}] \times \\
 & \times \left(\frac{\partial \sqrt{\gamma}}{\partial t} + \frac{\partial \sqrt{-g_{00}}}{\partial t} \right) - \frac{1}{c} \text{rot} [\vec{Y}\vec{E}] \frac{\partial \sqrt{\gamma}}{\partial t} - \sigma\mu' \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma\mu' [\vec{V} \text{rot} \vec{E}].
 \end{aligned} \tag{5.67}$$

Отсюда видно, что члены с производными метрического тензора по времени очень малы и ими в дальнейшем можно пренебречь.

Если среда обладает проводимостью и дисперсией, то без изменения формы в ней распространяется лишь гармоническая волна.

В связи с этим, рассмотрим гармоническую волну вида $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$. Тогда для комплексной амплитуды \vec{E} получим волновое уравнение следующего вида:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{E}_0 - \text{grad div} \vec{E}_0 + \varepsilon' \mu' \omega^2 \vec{E}_0 + i \frac{\omega}{c} [\vec{Y} \text{rot} \vec{E}_0] + \\ + i \frac{\omega}{c} \text{rot} [\vec{Y} \vec{E}_0] - i \sigma \mu' \vec{E}_0 + \frac{\omega^2}{c^2} [\vec{Y} [\vec{Y} \vec{E}_0]] + \sigma \mu' [\vec{V} \text{rot} \vec{E}_0] = 0. \end{aligned} \quad (5.68)$$

Решение уравнения (5.61) будем искать в виде двух встречных бегущих плоских волн:

$$E_0 = E_1 e^{i\vec{k}\vec{R}} + E_2 e^{-i\vec{k}\vec{R}}. \quad (5.69)$$

5.4.2. Дисперсионное соотношение, волновой вектор, обобщенный коэффициент преломления среды

Из соотношений (5.69) и (5.68) можно получить дисперсионное соотношение и выражение для волнового вектора.

На основании соотношений векторного анализа [135]

$$\left. \begin{aligned} \text{rot} [\vec{a}\vec{b}] &= (\vec{b}\nabla)\vec{a} - (\vec{a}\nabla)\vec{b} + \vec{a}(\nabla\vec{b}) - \vec{b}(\nabla\vec{a}), \\ [\vec{a}\text{rot}\vec{b}] &= \nabla(\vec{a}\vec{b}) - (\vec{a}\nabla)\vec{b}, \\ [\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]] &= \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - (\vec{a}\vec{b})\vec{c}, \end{aligned} \right\} \quad (5.70)$$

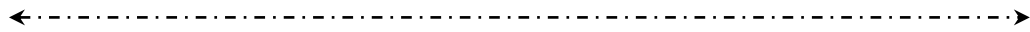
из (5.69) получаем общий вид дисперсионного соотношения:

$$\vec{k}^2 - \varepsilon' \mu' \omega^2 - 2 \frac{\omega}{c} (\vec{Y}\vec{k}) + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{Y}^2 - i \sigma \mu' (\omega - \vec{V}\vec{k}) = 0, \quad (5.71)$$

где \vec{k} – волновой вектор.

Используя выражение для \vec{Y} (5.52), соотношение (5.71) преобразуем к окончательному виду:

$$\begin{aligned} \vec{k}^2 - \frac{n^2}{-g_{00}} \frac{\omega^2}{c^2} - 2 \frac{\omega}{c} \left(\frac{\vec{G}\vec{k}}{-g_{00}} - \frac{n^2 - 1}{c} \vec{V}\vec{k} \right) + \\ + \frac{\omega^2}{c^2} \left(\frac{\vec{G}}{-g_{00}} - \frac{n^2 - 1}{c} \vec{V} \right) - i \sigma \mu' (\omega - \vec{V}\vec{k}) = 0. \end{aligned} \quad (5.72)$$



Полученное дисперсионное соотношение учитывает гравитационное поле, движение преломляющей среды, а также влияние ее проводимости. В частных случаях распространения волны в вакууме в постоянном гравитационном поле, а также в равномерно движущейся среде соотношение (5.72) сводится к известным результатам [1, 217].

Для получения решения для волнового вектора приведем уравнение (5.72) к виду

$$\vec{k}^2 + b\vec{k} + a = 0.$$

Решение его имеет два корня:

$$\vec{k}_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - a}, \quad (5.73)$$

где

$$b = \frac{2\omega}{c} \left(\frac{\vec{G}}{g_{00}} + \frac{n^2 - 1}{c} \vec{V} \right)^2 - i\sigma\mu\vec{V},$$

$$a = \frac{\omega^2}{c^2} \left(\frac{\vec{G}}{-g_{00}} - \frac{n^2 - 1}{c} \vec{V} \right)^2 + \frac{n^2}{g_{00}} \frac{\omega^2}{c^2} - i\sigma\mu\omega.$$

Для слабопроводящей среды, равномерно движущейся в постоянном гравитационном поле, имеем:

$$\vec{k} = \vec{k}' + i\vec{k}'', \quad (5.74)$$

где

$$\vec{k}' = \frac{\omega}{c} \left(\frac{n}{\sqrt{-g_{00}}} \vec{e} - \frac{\vec{G}}{g_{00}} - \frac{n^2 - 1}{c} \vec{V} \right); \quad (5.75)$$

$$\vec{k}'' = \sigma \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \vec{e} - \sigma\mu\vec{V}. \quad (5.76)$$

Здесь \vec{e} – единичный вектор в направлении движения волны. Комплексная амплитуда рассматриваемой плоской гармонической волны (5.69) (например, прямой волны) пропорциональна множителю:

$$e^{i(\vec{k}\vec{R} - \omega t)} = e^{-\vec{k}''\vec{R}} e^{i(\vec{k}'\vec{R} - \omega t)}. \quad (5.77)$$

Здесь первый множитель определяет экспоненциальное затухание амплитуды волны, второй – состояние ее фазы. Отсюда следует, что проводимость движущейся среды (она всегда положительная) ведет к уменьшению амплитуды волны.

Представляя (5.75) в виде $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{n}^*$, получаем обобщенный коэффициент преломления (рефракции) волны в изотропной преломляющей проводящей среде, движущейся в гравитационном поле:

$$\vec{n}^* = \frac{n}{\sqrt{-g_{00}}} \vec{e} + \frac{\vec{G}}{-g_{00}} - \frac{n^2 - 1}{c} \vec{V}. \quad (5.78)$$

Таким образом, этот коэффициент совершенно не зависит от проводящих свойств движущейся среды.

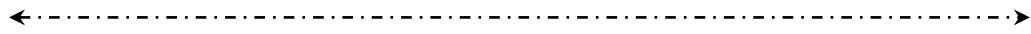
Надо отметить, что выражение (5.78) получено при постоянной вдоль трассы луча частоте – координатной частоте, измеренной в единицах координатного времени t . Чтобы перейти к собственной частоте, зависящей от характеристик гравитационного поля, необходимо использовать связь между собственным и координатным временем для выбранной системы отсчета.

Полученное выше дисперсионное соотношение следует из волнового уравнения (5.68), справедливого в любых однородных гравитационных полях. В частном случае постоянного гравитационного поля задача нахождения дисперсионного соотношения существенно упрощается, если непосредственно в уравнениях Максвелла выполнить прямой переход к плоским волнам вида $\exp i(\vec{k}\vec{R} - \omega t)$. В этом случае уравнения (5.49) при

$\frac{\partial \sqrt{\gamma}}{\partial t} = \rho = 0$ сводятся к простой алгебраической форме:

$$\begin{aligned} [\vec{k}\vec{E}_0] &= \omega \vec{B}_0, \quad (\vec{k}\vec{B}_0) = 0, \\ [\vec{H}_0 \vec{k}] &= \omega \vec{D}_0 + \vec{j}, \quad (\vec{k}\vec{D}_0) = 0. \end{aligned} \quad (5.79)$$

Решая совместную систему алгебраических уравнений (5.52) и (5.54) при $\rho = 0$ и (5.79), получаем волновой вектор и коэффициент затухания в виде (5.75) и (5.76).



Из уравнений (5.79) можно получить информацию о взаимном пространственном расположении векторов поля \vec{E} и \vec{H}_0 относительно вектора \vec{k} . Из вторых уравнений каждой пары следует, что векторы индукций \vec{B}_0 и \vec{D}_0 перпендикулярны к направлению распространения волны. Подставив в эти уравнения материальные соотношения (5.52), находим, что

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{-g_{00}}}(\vec{k}\vec{E}_0) = \vec{k}[\vec{H}_0\vec{Y}], \quad \frac{\mu}{\sqrt{-g_{00}}}[\vec{k}\vec{H}_0] = -\vec{k}[\vec{Y}\vec{E}_0]. \quad (5.80)$$

Таким образом, если в среде, покоящейся в инерциальной системе, векторы \vec{E} и \vec{H} перпендикулярны вектору \vec{k} , то в движущейся среде и гравитационном поле такой ортогональности, вообще говоря, нет. Из первого уравнения первой пары (5.79), используя соотношения (5.52), находим:

$$\frac{\mu}{\sqrt{-g_{00}}}\omega\vec{H}_0 = \left[\left(\vec{k} - \frac{\omega}{c}\vec{Y} \right) \vec{E}_0 \right], \quad (5.81)$$

т.е. имеем ортогональную тройку векторов:

$$\left(\vec{k} - \frac{\omega}{c}\vec{Y} \right), \vec{H}_0, \vec{E}_0. \quad (5.82)$$

Используя выражение для обобщенного волнового вектора (5.75), из соотношения (5.82) находим:

$$\mu\vec{H}_0 = \sqrt{\varepsilon\mu} \left[\left(\vec{e} + i \frac{\vec{k}''}{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}} \right) \vec{E}_0 \right], \quad (5.83)$$

откуда

$$z_k \vec{H}_0 = [\vec{e}\vec{E}], \quad (5.84)$$

где

$$z_k = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left(\frac{1}{c} - i \frac{\sqrt{-g_{00}}}{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}} \vec{k}'' \vec{e} \right) \quad (5.85)$$

– волновое сопротивление среды.

Таким образом, в системе отсчета с произвольными метрическими свойствами волновое сопротивление преломляющей среды является комплексной величиной и зависит как от свойств среды, так и от свойств гравитационного поля.

5.5. Уравнения полей и волн в анизотропных средах

5.5.1. Материальные соотношения на основе 4-тензора среды

При исследовании электромагнитных полей в анизотропных средах очень удобной оказывается формулировка материальных соотношений, предложенная И.Е. Таммом [209]. При этом свойства среды описываются смешанным четырехмерным тензором четвертого ранга S_{ik}^{lm} , с помощью которого в инерциальной системе между тензорами F_{ik} и H_{ik} устанавливается прямая связь:

$$H_{ik} = S_{ik}^{lm} F_{lm}. \quad (5.86)$$

Такая запись в случае движущихся сред, во-первых, позволяет достаточно просто перейти к потенциалам в среде [213], а во-вторых, дает возможность описать электромагнитные свойства любых анизотропных сред.

В изотропных средах тензор четвертого ранга S_{ik}^{lm} распадается на два тензора второго ранга, поэтому получаем:

$$F_{ik} = S_{il} H^{lm} H^{lm} = S^{il} S^{km} F_{lm}, \quad (5.87)$$

причем тензор среды имеет компоненты:

$$S_{00} = \frac{1}{\varepsilon \sqrt{\mu}}, \quad S_{\alpha\beta} = -\sqrt{\mu}, \quad S_{il} S^{lk} = \delta_i^k. \quad (5.88)$$

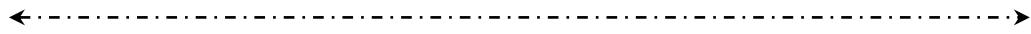
При описании поля в движущейся среде необходимо воспользоваться преобразованиями Лоренца по отношению к компонентам тензора поля.

Обобщение соотношений (2.65) на произвольную систему отсчета произведем операцией поднятия и опускания индексов и тензоров с помощью метрического тензора [214]:

$$\left. \begin{aligned} F_{0\alpha} &= S_0^l S_\alpha^m g_{li} g_{mk} H^{ik}, \\ F_{\alpha\beta} &= g_{\alpha l} g_{\beta m} S_i^l S_k^m H^{ik} \end{aligned} \right\} \quad (5.89)$$

или:

$$\left. \begin{aligned} H^{0\alpha} &= g^{ol} g^{\alpha m} \bar{S}_l^i \bar{S}_m^k F_{ik}, \\ H^{\alpha\beta} &= \bar{S}_i^\alpha \bar{S}_m^\beta g^{li} g^{mk} F_{ik}, \end{aligned} \right\} \quad (5.90)$$



где первые уравнения каждой пары описывают электрическое поле, вторые – магнитное; $\bar{S}_i^k = \bar{g}^{kl} S_{il}$; $\bar{S}_i^k = \bar{g}_{il} S^{kl}$; причем метрический тензор с чертой соответствует инерциальному пространству. Ненулевые компоненты смешанных тензоров находятся с помощью соотношения (5.88):

$$S_0^0 = -\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\mu}}, \quad S_\alpha^\beta = -\sqrt{\mu}, \quad \bar{S}_0^\beta = -\frac{1}{\sqrt{\mu}}, \quad S_0^\alpha = -\varepsilon\sqrt{\mu}. \quad (5.91)$$

Для статических гравитационных полей $g_{0\alpha} = 0$, поэтому уравнения (5.89) и (5.90) попарно объединяются:

$$F_{ik} = g_{is} g_{kt} S_l^s S_m^t H^{lm}, \text{ или } H^{ik} = g^{is} g^{kt} \bar{S}_s^l S_t^m F_{lm}. \quad (5.92)$$

Далее естественно следует обобщение полученных уравнений на анизотропные среды:

$$\left. \begin{aligned} F_{0\alpha} &= S_{0\alpha}^{lm} g_{li} g_{mk} H^{ik}, \\ F_{\alpha\beta} &= g_{\alpha l} g_{\beta m} S_{ik}^{lm} H^{ik} \end{aligned} \right\} \quad (5.93)$$

а для статических гравитационных полей справедлива форма:

$$F_{ik} = S_{ik}^{lm} g_{ls} g_{mt} H^{st}. \quad (5.94)$$

Компоненты тензора находятся из условия, что в инерциальной системе последние уравнения имеют вид:

$$D_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta} E_\beta, \quad B_\alpha = \mu_{\alpha\beta} H_\beta, \quad (5.95)$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta}$, $\mu_{\alpha\beta}$ – тензоры диэлектрической и магнитной проницаемостей анизотропной среды.

Полученные уравнения справедливы лишь для полей в покоящихся средах. Однако перейти в этих уравнениях к движущимся средам, используя преобразования Лоренца, уже, строго говоря, нельзя. Это объясняется тем, что среда движется в неинерциальной системе отсчета, и тензоры $S_{il} = g_{ik} S_l^k$ а также тензоры F_{ik} и H^{ik} , определяемые в виде (2.8) или (2.35), отличаются от соответствующих тензоров в инерциальной системе.

←-----→

**5.5.2. Дисперсионное соотношение
для движущейся анизотропной среды**

Чтобы получить дисперсионное уравнение поля в движущейся анизотропной среде, справедливое для любой системы отсчета, воспользуемся известным приемом [213]. Найдем это уравнение для покоящейся среды так же, как это сделано ранее. Затем из общего волнового уравнения для волны в вакууме найдем инвариантную часть первого дисперсионного уравнения, вид которой не зависит от принятой системы отсчета. Выполняя преобразования Лоренца и учитывая найденный инвариант, найдем дисперсионное соотношение для движущейся среды.

Общая форма волнового уравнения для потенциала волны A_j в любой системе отсчета имеет вид [218, 219]:

$$-A_l{}^{;m} + R_{lm}A^m = -j_l. \quad (5.96)$$

Выразим входящие в уравнение (5.96) члены через метрический тензор. Из тензорного анализа известно, что [135]

$$A_{l;i} = \frac{\partial A_l}{\partial x^i} - \Gamma_{li}^k A_k, \quad (5.97)$$

где Γ_{li}^k – символ Кристоффеля, определяемый выражением (2.48).

Поднимая в (5.97) индекс, найдем:

$$A_l{}^{;m} = g^{im} A_{l;i} = g^{im} \frac{\partial A_l}{\partial x^i} - g^{im} \Gamma_{li}^k A_k. \quad (5.98)$$

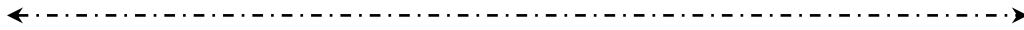
Выполнив далее ковариантное дифференцирование по индексу m , получим:

$$A_l{}^{;m} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (A_l{}^{;m} \sqrt{-g})}{\partial x^m} - \Gamma_{mi}^l A^{;m}.$$

Наконец, подставив (5.98) в последнее выражение, получим:

$$A_l{}^{;m} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^m} \left[\sqrt{-g} g^{im} \frac{\partial A_l}{\partial x^i} - \sqrt{-g} g^{im} \Gamma_{li}^k A_k \right] - \Gamma_{mi}^l \left(g^{im} \frac{\partial A_l}{\partial x^i} - g^{im} \Gamma_{li}^k A_k \right). \quad (5.99)$$

Тензор Риччи, входящий в (5.96), как известно, также определяется производными метрического тензора:



$$R_{ik} = \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{il}^k}{\partial x^k} + \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lm}^m - \Gamma_{il}^m \Gamma_{km}^l. \quad (5.100)$$

Вне истинных гравитационных полей, создаваемых распределенными массами, $R_{ik} = 0$.

Если подставить два последних выражения в (5.96), то получим развернутую форму волнового уравнения, справедливую в произвольных гравитационных полях.

В частном случае постоянных и однородных гравитационных полей ($\partial g_{ik} / \partial x^k = 0$), а также в отсутствие токов проводимости и свободных зарядов ($j^i = 0$) уравнение (5.96) принимает известную форму [1, 2]:

$$g^{im} \frac{\partial A_l}{\partial x^i \partial x^m} = 0. \quad (5.101)$$

В случае плоской волны, когда компоненты 4-потенциала изменяются по закону $A = A \exp[-ik_i x^i]$ последнее уравнение преобразуется к инварианту:

$$g^{ik} k_i k_k = k^k k_k = 0. \quad (5.102)$$

На основе формул $g^{\alpha\beta} = \gamma^{\alpha\beta}$; $g^{0\alpha} = g^\alpha = \gamma^{\alpha\beta} g_\beta$; $g_{ik} g^{li} = \delta_k^l$ и $\gamma_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta = k^2$, раскроем этот инвариант. В результате имеем ($i, k = 0, 1, 2, 3$; $\alpha, \beta = 1, 2, 3$)

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta + g^{00} k_0 k_0 + 2g^{0\alpha} k_0 k_\alpha &= \gamma^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta + g^{00} k_0^2 + 2\gamma^{\alpha\beta} g_\beta k_0 k_\alpha = \\ &= \gamma_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta + g^{00} k_0^2 + 2k_0 g_\beta k^\beta = 0. \end{aligned} \quad (5.103)$$

Входящий в (5.103) временной компонент волнового вектора определяется соотношением [2]:

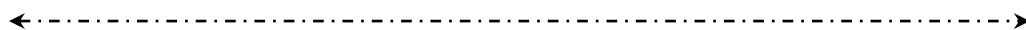
$$k_0 = -\frac{\omega}{c}. \quad (5.104)$$

Раскрывая далее связь $g_{ik} g^{li} = \delta_k^l$ при $k = l = 0$, находим

$$g_{\alpha 0} g^{0\alpha} + g_{00} g^{00} = 1,$$

откуда

$$g^{00} = -\frac{1}{-g_{00}} + \frac{g_{0\alpha} g^{0\alpha}}{-g_{00}}.$$



Поскольку, согласно (2.34), $g_\beta = \frac{g_{0\beta}}{-g_{00}}$, то получаем (см. также (2.37)):

$$g^{00} = -\frac{1}{-g_{00}} + g_\alpha g^\alpha. \quad (5.105)$$

Учитывая также, что $\gamma_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta = k_\alpha k^\alpha$, соотношение (5.103) приводим к следующей форме:

$$k_\alpha k^\alpha + \frac{k_0^2}{g_{00}} + k_0^2 g_\alpha g^\alpha + 2k_0 g_\alpha k^\alpha = 0, \quad (5.106)$$

или, на основании соотношения (5.104),

$$\vec{k}^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \frac{1}{g_{00}} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{g}^2 - \frac{2\omega}{c} \vec{g} \vec{k} = 0. \quad (5.107)$$

Переходя, в соответствии с (2.34), к вектору $\vec{G} = -\vec{g}_{00} \vec{g}$, получаем окончательно:

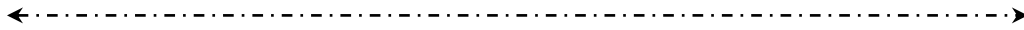
$$\vec{k}^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \frac{1}{g_{00}} + \frac{\omega^2}{c^2} \left(\frac{\vec{G}}{-g_{00}} \right)^2 + \frac{2\omega}{c} \frac{\vec{G} \vec{k}}{g_{00}} = 0. \quad (5.108)$$

В частности, решение этого уравнения для вакуума имеет вид, инвариантный при преобразованиях Лоренца:

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c} \left(\frac{\vec{e}}{\sqrt{-g_{00}}} + \frac{\vec{G}}{-g_{00}} \right), \quad (5.109)$$

где \vec{e} – орт луча. Отсюда следует полученное ранее выражение (5.3) для коэффициента «гравитационной» среды в вакууме $n^* = \frac{c}{\omega} \vec{k} \vec{e}$.

Используя соотношение (5.108), можно исследовать волну в анизотропной непроводящей среде, движущейся в постоянном и однородном гравитационном поле. В случаях, более общих по отношению к приведенному, инвариантный вид дисперсионного соотношения находится из формулы (5.96).



5.6. Уравнения полей и волн в движущихся средах на основе представления о поляризации среды

5.6.1. Уравнения полей на основе представления о поляризации для инерциальных систем

Для описания электромагнитного поля в веществе, кроме средних полей \vec{E} и \vec{B} , вводят два дополнительных вектора: вектор электрической поляризации \vec{P} и вектор намагничивания \vec{M} . Система четырех векторов поля \vec{E} , \vec{B} , \vec{P} , \vec{M} полностью описывает поле в веществе и является альтернативой по отношению к рассмотренной выше системе векторов \vec{E} , \vec{B} , \vec{D} , \vec{H} . Вместе с тем, целый ряд задач электродинамики движущихся сред решается гораздо проще и нагляднее именно на основе представления о поляризации среды.

Связь между векторами поляризации и векторами индукций в вакууме устанавливается в виде [220]

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}). \quad (5.110)$$

В материальной среде векторы поляризации и напряженностей полей связаны соотношениями:

$$\vec{P} = \theta \vec{E}, \quad \vec{M} = \chi \vec{H}, \quad (5.111)$$

где θ, χ – соответственно диэлектрическая и магнитная восприимчивость среды.

В случае слабых электрических и магнитных полей связь между напряженностью и векторами поляризации линейная и поэтому с достаточной точностью считается, что

$$\theta = \varepsilon - \varepsilon_0; \quad \chi = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0}. \quad (5.112)$$

Линейная связь между напряженностью и поляризацией отвечает линейной электродинамике. В последние годы широкое развитие получает нелинейная электродинамика и нелинейная оптика, в которых связи (2.77) существенно нелинейны, т.е.

$$\theta = \theta(\vec{E}); \quad \chi = \chi(\vec{H}). \quad (5.113)$$

←----->

Нелинейность возникает в средах с большой поляризуемостью (сегнетоэлектрики, ферромагнетики, плазма), а также в сильных полях, ставших доступными с созданием лазеров. В связи с этим весьма полезно получить ковариантные материальные уравнения для произвольно поляризованных сред, которые в частном случае линейной поляризации должны сводиться к уравнениям, полученным выше.

Запишем необходимые ковариантные соотношения для сред, движущихся в инерциальных системах. Как известно [220], составляющие векторов поляризации в инерциальной системе являются компонентами единого тензора M_{ik} (или M^{ik}), называемого тензором электрического и магнитного моментов вещества. Определение его следует из соотношений (5.110):

$$M_{ik} = \varepsilon_0 F_{ik} - H_{ik} \text{ или } M^{ik} = \varepsilon_0 F^{ik} - H^{ik}. \quad (5.114)$$

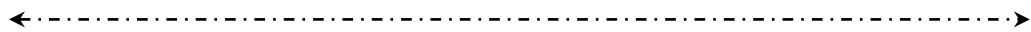
Компоненты тензоров, стоящих справа, в инерциальной системе связаны соотношениями:

$$H_{ik} = g_{il} g_{km} H^{ik}; F^{ik} = g^{il} g^{km} F_{lm}, \quad (5.115)$$

где $g_{00} = -1; g_{\alpha\beta} = 1; g_{0\alpha} = 0; g_{ik} g^{ik} = \delta_i^i$. Отсюда, воспользовавшись матрицами (5.21) и (5.48), при заданной метрике находим:

$$M_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -P_1 & -P_2 & -P_3 \\ P_1 & 0 & -\frac{M_3}{c} & \frac{M_2}{c} \\ P_2 & \frac{M_3}{c} & 0 & -\frac{M_1}{c} \\ P_3 & -\frac{M_2}{c} & \frac{M_1}{c} & 0 \end{pmatrix}; \quad (5.116)$$

$$M^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & P_1 & P_2 & P_3 \\ -P_1 & 0 & -\frac{M_3}{c} & \frac{M_2}{c} \\ -P_2 & \frac{M_3}{c} & 0 & -\frac{M_1}{c} \\ -P_3 & -\frac{M_3}{c} & \frac{M_1}{c} & 0 \end{pmatrix}.$$



Ковариантные уравнения Максвелла на основе приведенных тензоров записываются в виде [220]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} &= 0, \\ \frac{\partial (\varepsilon_0 F^{ik} - M^{ik})}{\partial x^k} &= -j^i, \end{aligned} \quad (5.117)$$

где $j^i = \left\{ \rho, \frac{1}{c} \vec{j} \right\}$ – 4-вектор плотности тока.

Используя компоненты тензоров F_{ik} и M_{ik} , уравнения (5.117) получаем в векторном виде:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0, \\ \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B} - \operatorname{rot} \vec{M} &= \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \vec{j}, \\ \varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} + \operatorname{div} \vec{P} &= \rho. \end{aligned} \right\} \quad (5.118)$$

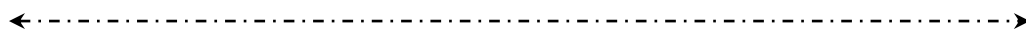
Полученные уравнения необходимо дополнить материальными соотношениями, записанными с помощью тех же векторов. Ковариантные материальные соотношения на основе тензоров F_{ik} , H_{ik} и M_{ik} записываются в форме [221]:

$$\left. \begin{aligned} M_{ik} u^k &= \theta F_{ik} u^k, \\ M^{ik} u^l + M^{kl} u^k + M^{li} u^k &= \chi (H^{ik} u^l + H^{kl} u^i + H^{li} u^k), \end{aligned} \right\} \quad (5.119)$$

где $u^i = \left\{ \Gamma^{-1}; \Gamma^{-1} \frac{\vec{V}}{c} \right\}$ – скорость среды в инерциальной системе.

Другую форму уравнений (5.119) легко записать на основе 4-вектора скорости с ковариантными компонентами

$$u_i = g_{il} u^l = \left\{ \Gamma^{-1}; \Gamma^{-1} \frac{\vec{V}}{c} \right\}. \quad (5.120)$$



В результате имеем:

$$\left. \begin{aligned} M^{ik} u_k &= -\theta F^{ik} u_k, \\ M_{ik} u_l + M_{kl} u_i + M_{li} u_k &= \chi (H_{ik} u_l + H_{kl} u_i + H_{li} u_k). \end{aligned} \right\} \quad (5.121)$$

Формы (5.119) и (5.121) равноправны. Используя выражения для компонентов тензоров (5.115) и (5.116), получаем материальные уравнения в векторном виде:

$$\vec{P} - \frac{1}{c^2} [\vec{V} \vec{M}] = \theta (E + [\vec{V} \vec{B}]), \quad (5.122)$$

$$\vec{M} + [\vec{V} \vec{P}] = \chi (H - [\vec{V} \vec{D}]). \quad (5.123)$$

Используя соотношения (5.110) и (5.111), уравнение (5.123) получаем в виде:

$$\vec{M} + [\vec{V} \vec{P}] = \chi \left(\vec{M} - \frac{\vec{B}}{\mu_0} - [\vec{V} \vec{P}] - \varepsilon_0 [\vec{V} \vec{E}] \right). \quad (5.124)$$

Уравнения (5.123) и (5.124) связывают векторы поляризации и векторы поля при любом законе (5.113), причем они являются точными в том смысле, что при их выводе не сделано никаких предположений о величине скорости среды \vec{V} .

Допуская, что при нерелятивистских скоростях движения членами, содержащими V^2/c^2 , можно пренебречь, получаем:

$$\left. \begin{aligned} \vec{P} &= \theta \vec{E} + \left(\theta + \frac{\chi}{\mu c^2} \right) [\vec{V} \vec{B}], \\ \vec{M} &= \mu \vec{H} - (\chi \varepsilon + \theta) [\vec{V} \vec{E}]. \end{aligned} \right\} \quad (5.125)$$

Подставляя выражения (5.125) в формулы (5.110), находим материальные уравнения, выраженные через электрическую и магнитную восприимчивость в движущихся средах, а также векторы \vec{E} , \vec{B} , \vec{D} , \vec{H}

$$\left. \begin{aligned} \vec{D} &= (\theta + \varepsilon_0) \vec{E} + \left(\theta \mu + \frac{\chi}{c^2} \right) [\vec{V} \vec{H}], \\ \vec{B} &= (1 - \chi) \mu_0 \vec{H} - \mu_0 (\chi \varepsilon + \theta) [\vec{V} \vec{E}]. \end{aligned} \right\} \quad (5.126)$$

В частном случае линейной поляризации, когда диэлектрическая и магнитная проницаемость определяется формулами (5.112), уравнения (5.126) принимают соответственно форму:

$$\left. \begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon \vec{E} + \frac{n^2 - 1}{c^2} [\vec{V} \vec{H}], \\ \vec{B} &= \mu \vec{H} - \frac{n^2 - 1}{c^2} [\vec{V} \vec{E}], \end{aligned} \right\} \quad (5.127)$$

которая эквивалентна форме уравнений Минковского (5.9) и (5.10) при нерелятивистских скоростях.

Тензорные материальные уравнения (5.119) и (5.121) совместно с уравнениями Максвелла (5.117) составляют основу теории электромагнитных полей и волн в проводящих средах, движущихся в инерциальных системах.

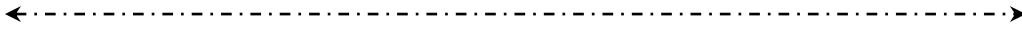
5.6.2. Ковариантная форма уравнений поля на основе тензоров поляризации

Чтобы перейти к уравнениям, строго описывающим электромагнитное поле и волны в системах отсчета с произвольной метрикой, введем в рассмотрение ко- и контравариантные тензоры поляризации P_{ik} и Q^{ik} с таким условием, чтобы в инерциальной системе отсчета они сводились бы к тензорам (5.116) [214]. При этом связь между их компонентами и составляющими векторов поляризации \vec{P} и \vec{M} должна согласовываться с видом связи компонентов тензоров F_{ik} и H^{ik} с составляющими входящих в них векторов.

При связях (5.20) и (5.21) соответствующие соотношения для тензоров P_{ik} и Q^{ik} имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} P_\alpha &= -P_{0\alpha}, M^\alpha = -\frac{c}{2} e^{\alpha\beta\gamma} P_{\beta\gamma}, \\ P^\alpha &= \sqrt{-g} Q^{0\alpha}, M_\alpha = -\frac{c}{2} \sqrt{-g} e_{\alpha\beta\gamma} Q^{\beta\gamma} \end{aligned} \right\} \quad (5.128)$$

Тензоры в данном случае определяются следующим образом:



$$P_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -P_1 & -P_2 & -P_3 \\ P_1 & 0 & -\frac{M^3}{c} & \frac{M^2}{c} \\ P_2 & \frac{M^3}{c} & 0 & -\frac{M^1}{c} \\ P_3 & -\frac{M^2}{c} & \frac{M^1}{c} & 0 \end{pmatrix};$$

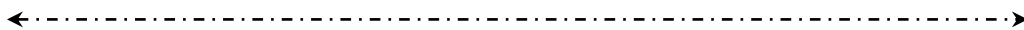
$$Q^{ik} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \begin{pmatrix} 0 & P^1 & P^2 & P^3 \\ -P^1 & 0 & -\frac{M_3}{c} & \frac{M_2}{c} \\ -P^2 & \frac{M_3}{c} & 0 & -\frac{M_1}{c} \\ -P^3 & -\frac{M_2}{c} & \frac{M_1}{c} & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.129)$$

Соотношения, аналогичные (5.47) и (5.48), имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} P_\alpha &= -P_{0\alpha}, M^\alpha = -\frac{c}{2\sqrt{\gamma}} e^{\alpha\beta\gamma} P_{\beta\gamma}, \\ P^\alpha &= \sqrt{-g_{00}} Q^{0\alpha}, M_\alpha = -\frac{c}{2} \sqrt{-g} e_{\alpha\beta\gamma} Q^{\beta\gamma} \end{aligned} \right\} \quad (5.130)$$

где компоненты тензоров поляризации определяются соотношениями:

$$P_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -P_1 & -P_2 & -P_3 \\ P_1 & 0 & -\sqrt{\gamma} \frac{M^3}{c} & \sqrt{\gamma} \frac{M^2}{c} \\ P_2 & \sqrt{\gamma} \frac{M^3}{c} & 0 & -\sqrt{\gamma} \frac{M^1}{c} \\ P_3 & -\sqrt{\gamma} \frac{M^3}{c} & \sqrt{\gamma} \frac{M^1}{c} & 0 \end{pmatrix}; \quad (5.130a)$$



$$Q^{ik} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\gamma}P^1 & \sqrt{\gamma}P^2 & \sqrt{\gamma}P^3 \\ -\sqrt{\gamma}P^1 & 0 & -\frac{M_3}{c} & \frac{M_2}{c} \\ -\sqrt{\gamma}P^2 & \frac{M_3}{c} & 0 & -\frac{M_1}{c} \\ -\sqrt{\gamma}P^3 & -\frac{M_2}{c} & \frac{M_1}{c} & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.130б)$$

Поскольку рассматриваемый электродинамический подход основан на системе векторов и тензоров, не включающих векторы поля \vec{D} и \vec{H} и соответствующий им тензор H^{ik} , то в качестве исходных уравнений Максвелла принимаем систему (5.14), сделав замену тензора H^{ik} в соответствии с формулой (5.114). В результате имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} &= 0, \\ \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left\{ \sqrt{-g} (\varepsilon_0 F_*^{ik} - Q^{ik}) \right\} &= -j^i, \end{aligned} \right\} \quad (5.131)$$

где введенный контравариантный тензор F_*^{ik} имеет, согласно отношениям (5.128) и (5.130), следующий вид, соответственно:

$$F_*^{ik} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -cB_3 & cB_2 \\ E^2 & cB_3 & 0 & -cB_1 \\ E^3 & -cB_2 & cB_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.131а)$$

$$F_*^{ik} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{\gamma}E^1 & -\sqrt{\gamma}E^2 & -\sqrt{\gamma}E^3 \\ \sqrt{\gamma}E^1 & 0 & -cB_3 & cB_2 \\ \sqrt{\gamma}E^2 & cB_3 & 0 & -cB_1 \\ \sqrt{\gamma}E^3 & -cB_2 & cB_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.131б)$$

С целью получения обобщенных материальных соотношений воспользуемся исходными уравнениями (5.2), устанавливающими связь между ко- и контравариантными тензорами электромагнитного поля в любой системе отсчета.

Поскольку представляющие интерес материальные соотношения должны отображать связь между компонентами метрического тензора и тензоров P_{ik} и Q^{ik} , то используя общие формулы (5.114), записываем:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_0 F_{ik} + P_{ik} &= g_{il} g_{km} (\varepsilon F_*^{lm} - Q^{lm}), \\ \varepsilon_0 F_{ik} &= g_{il} g_{km} (H^{lm} - Q^{lm}). \end{aligned} \right\} \quad (5.132)$$

Далее, учитывая, что согласно (5.111), $P_{0\alpha} = \theta F_{0\alpha}$, окончательно получаем:

$$\left. \begin{aligned} (\varepsilon_0 + \theta) F_{0\alpha} &= g_{0i} g_{\alpha k} (\varepsilon_0 F_*^{ik} - Q^{ik}), \\ \varepsilon_0 F_{\alpha\beta} &= g_{\alpha i} g_{\beta k} (H^{ik} - Q^{ik}), \end{aligned} \right\} \quad (5.133)$$

где первое уравнение определяет электрическую поляризацию, второе – магнитную.

Уравнения (5.133) совместно с уравнениями Максвелла (5.131) составляют полную систему уравнений, описывающих электромагнитное поле в произвольно поляризованной среде, покоящейся в переменном гравитационном поле.

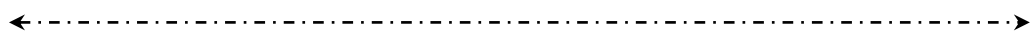
5.6.3. Уравнения поля в гравитационном поле на основе векторов поляризации

Чтобы получить уравнения (5.131) и (5.133) в векторном виде, воспользуемся тензорами поля (5.48), (5.130) и (2.97a). В результате уравнения Максвелла принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} rot \vec{E} &= -\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{\gamma} \vec{B}), \\ div \vec{B} &= 0, \\ \frac{1}{\mu_0} rot \vec{B} - \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\gamma} \vec{E} &= \vec{j} + \vec{j}_n, \\ \varepsilon_0 div \vec{E} + div \vec{P} &= \rho, \end{aligned} \right\} \quad (5.134)$$

где \vec{j}_n – полный поляризационный ток, равный сумме тока электрической поляризации и тока намагничивания:

$$\vec{j}_n = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\gamma} \vec{P} + rot \vec{M}. \quad (5.135)$$



Используя те же тензоры и ограничиваясь гравитационными полями, для которых $-g_{00} = g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$, материальные соотношения (5.133) получаем в векторном виде:

$$\left. \begin{aligned} \vec{P} &= \theta \vec{E} + c \varepsilon_0 [\vec{B} \vec{G}] - \frac{1}{c} [\vec{M} \vec{G}], \\ \vec{M} &= \frac{\chi}{\mu} \vec{B} - c \varepsilon_0 [\vec{E} \vec{G}]. \end{aligned} \right\} \quad (5.136)$$

Материальное соотношение для тока проводимости определяется выражением (5.58).

В случае линейной поляризации по полю, когда выполняются соотношения (5.112), на основе исходных связей (5.110) уравнения (5.136) приведем к виду:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{H} \vec{G}]; \quad \vec{B} = \mu \vec{H} - \frac{1}{c} [\vec{E} \vec{G}]. \quad (5.137)$$

При заданной метрике и нулевой скорости среды они в точности совпадают с уравнениями (5.29) и (5.30).

При выводе волнового уравнения условимся для простоты, что метрика гравитационного поля постоянна, а волна распространяется в непроводящей среде ($j = 0$) в отсутствие свободных зарядов ($\rho = 0$). При этом уравнения (5.134)–(5.136) преобразуем к следующему виду:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot} \vec{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \mu_0 \frac{\partial \vec{M}}{\partial t}; \quad \text{div}(\vec{H} + \vec{M}) = 0, \\ \text{rot} \vec{H} &= \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}; \quad \varepsilon_0 \text{div} \vec{E} + \text{div} \vec{P} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.138)$$

$$\vec{P} = \theta \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{H} \vec{G}]; \quad \vec{M} = \chi \vec{H} - c \varepsilon_0 [\vec{E} \vec{G}]. \quad (5.139)$$

Учитывая, что вторые уравнения каждой пары системы (5.138) автоматически следуют из первых, волновое уравнение получаем в виде:

$$\begin{aligned} \text{rot rot} \vec{E} &= -\mu_0 (1 + \chi) (\varepsilon_0 + \theta) \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \\ & - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [\vec{G} \text{rot} \vec{E}] - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} [\vec{G} \vec{E}] + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [[\vec{G} \vec{E}] \vec{G}], \end{aligned} \quad (5.140)$$

которое с точностью до коэффициента при первом члене в правой части совпадает с видом уравнения (5.61) при тех же исходных условиях.

Решая уравнение (5.140) так же, как и (5.61), получаем дисперсионное соотношение:

$$\vec{k}^2 - \mu_0(1 + \chi)(\varepsilon_0 + \theta)\omega^2 - 2\frac{\omega}{c}\vec{G}\vec{K} + \frac{\omega^2}{c^2}\vec{G}^2 = 0, \quad (5.141)$$

решением которого является волновой вектор в виде:

$$\vec{k} = \omega\sqrt{\mu_0(1 + \chi)(\varepsilon_0 + \theta)}\vec{e} + \frac{\omega}{c}\vec{G}. \quad (5.142)$$

Из полученного соотношения следует важный вывод: при любой напряженности электрического и магнитного поля, когда поляризация становится нелинейной, релятивистское приращение волнового вектора от свойств среды не зависит. Этот вывод имеет практическое значение, в частности, при исследовании распространения волн в ионосфере и в волоконных световодах, когда с целью увеличения отношения сигнал/шум в приемнике увеличивают мощность излучаемого сигнала.

В случае линейной поляризации по полю, когда выполняются соотношения (5.112), выражение (5.142) полностью совпадает с (5.75). Такое совпадение конечных результатов свидетельствует о правильности разработанной выше теории.

Для перехода к движущейся среде применим преобразования Лоренца к дисперсионному соотношению (5.141), используя инвариантную его часть (5.108). С помощью соотношения $\omega' \approx \omega + \vec{k}\vec{V}$ получаем:

$$\vec{k}^2 - \mu_0(1 + \chi)(\varepsilon_0 + \theta)\omega^2 - 2\frac{\omega}{c}\vec{G}\vec{K} + \frac{\omega^2}{c^2}\vec{G}^2 + \frac{2\omega}{c}\eta\vec{k}\vec{V} = 0, \quad (5.143)$$

где $\eta = c^2\mu_0(1 + \chi)(\varepsilon_0 + \theta) - 1$.

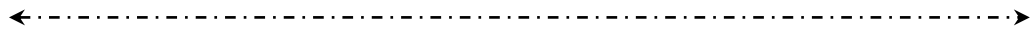
Отсюда следует выражение для волнового вектора:

$$\vec{k} = \omega\sqrt{\mu_0(1 + \chi)(\varepsilon_0 + \theta)}\vec{e} + \frac{\omega}{c}\vec{G} - \frac{\eta}{c}\vec{V}, \quad (5.144)$$

что в случае линейной поляризации по полю полностью согласуется с формулой (5.75).

В заключение рассмотрим уравнение (5.139) при нулевом внешнем электрическом и магнитном поле. В результате имеем следующие уравнения:

$$\vec{P} = \frac{1}{c}[\vec{H}\vec{G}]; \quad \vec{M} = -c\varepsilon_0[\vec{E}\vec{G}], \quad (5.145)$$



которые описывают наведенную электрическую и магнитную поляризацию, фиксируемую наблюдателем, покоящимся в неинерциальной системе отсчета. Это подтверждает существование эффектов наведенных статических полей, которые выше были получены на основе других теоретических положений [214].

Используя соотношения (5.110) и связь $\epsilon_0\mu_0 = c^{-2}$, из формул (5.145) нетрудно получить соотношения (5.38). Такое формальное совпадение также свидетельствует о правильности развитых выше теоретических положений.

5.7. Выводы к разделу 5

Как отмечено выше, при выводе уравнений поля, включающих систему уравнений Максвелла и материальных уравнений, преследовалась цель сохранения уравнений Максвелла в традиционном виде. В таком случае вся информация о гравитационном поле концентрируется в материальных соотношениях.

Для анализа свойств электромагнитного поля в среде, движущейся в гравитационном поле, приведем сводку полученных выше материальных соотношений (номера соотношений сохранены):

$$\vec{D} = \frac{\gamma}{\sqrt{g}} \epsilon \vec{E} + \frac{\sqrt{\gamma}}{cg_{00}} [\vec{G}\vec{H}] + \frac{n^2 - 1}{c^2} [\vec{V}\vec{H}], \quad (5.29)$$

$$\vec{B} = \frac{\gamma}{\sqrt{g}} \mu \vec{H} + \frac{\sqrt{\gamma}}{cg_{00}} [\vec{E}\vec{G}] + \frac{n^2 - 1}{c^2} [\vec{E}\vec{V}], \quad (5.30)$$

$$\vec{j} = \sigma \Gamma \left(\vec{E} - \sqrt{\frac{-g_{00}}{\gamma}} [\vec{B}\vec{V}] \right); \quad \rho_n = \frac{\sigma}{c} \Gamma \left(\frac{\vec{E}\vec{V}}{c\sqrt{-g_{00}}} + \sqrt{-g_{00}} \vec{E}\vec{G} \right). \quad (5.32)$$

Из этих уравнений следует, что выражения для векторов индукции электрического и магнитного поля, для тока и заряда несут информацию о следующих факторах:

- 1) о преломляющих свойствах среды распространения (через коэффициент преломления n);
- 2) о скорости движения среды \vec{V} ;
- 3) о статическом φ и векторном \vec{G} потенциалах гравитационного поля.

←----->

Для наиболее общего случая, соответствующего системе отсчета, вращающейся в гравитационном поле, на основе предыдущих разделов имеем:

– временной компонент метрического тензора, согласно (2.97), выражается соотношением: $g_{00} = -\left(1 - \frac{2\varphi}{c^2} - G^2\right)$;

– определитель четырехмерного метрического тензора, согласно (2.101), имеет вид: $g = 1 + \frac{4\varphi}{c^2} + O(c^{-4})$;

– определитель трехмерного метрического тензора, согласно (2.102), определяется формулой: $\gamma = 1 + \frac{6\varphi}{c^2} + G^2 + O(c^{-4})$.

Рассмотрим несколько частных случаев приведенной выше системы уравнений (5.29) – (5.32).

1. Среда движется со скоростью \vec{V} . Потенциалы гравитационного поля пренебрежимо малы ($g = \gamma = -g_{00} \approx 1$). При этих условиях электрическая и магнитная индукции, а также величина тока и заряда содержат информацию только о скорости движения среды. Эта ситуация достаточно хорошо изучена в классической электродинамике движущихся сред.

2. Среда неподвижна ($V = 0$), система отсчета вращается в статическом гравитационном поле ($\varphi \neq 0; \vec{G} \neq 0$). В этом случае система уравнений (5.29) – (5.32) с учетом (5.139) принимает вид:

$$\vec{D} = \frac{\gamma}{\sqrt{g}} \varepsilon \vec{E} + \frac{\sqrt{\gamma}}{cg_{00}} [\vec{G}\vec{H}], \quad (5.29^*)$$

$$\vec{B} = \frac{\gamma}{\sqrt{g}} \mu \vec{H} + \frac{\sqrt{\gamma}}{cg_{00}} [\vec{E}\vec{G}], \quad (5.30^*)$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}; \quad \rho_n = \frac{\sqrt{-g_{00}}}{c} \vec{j}\vec{G}, \quad (5.32^*)$$

$$\vec{P} = \theta \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{H}\vec{G}]; \quad \vec{M} = \chi \vec{H} - c\varepsilon_0 [\vec{E}\vec{G}]. \quad (5.139^*)$$



Таким образом, векторы электрической и магнитной индукции, векторы электрической поляризации, а также наведенный электрический заряд являются носителями информации о статическом и векторном потенциалах гравитационного поля. Это условие выполняется в отсутствие внешних электрических и магнитных полей, а также преломляющей среды, т.е. в вакууме (см. формулы (5.34), (5.36) и (5.38)). Исключение составляет величина электрического тока, которая является инвариантом по отношению к любому гравитационному полю.

Чтобы определить, как реагирует электромагнитная волна на параметры гравитационного поля, обратимся к дисперсионному соотношению (5.72), решением которого является волновой вектор \vec{k} в виде (5.75), который представим в следующей форме:

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{n}^*$$

где в отсутствие движения среды ($V = 0$) из (5.78) имеем:

$$\vec{n}^* = \frac{n}{\sqrt{-g_{00}}} \vec{e} + \frac{\vec{G}}{-g_{00}} = \frac{n\vec{e}}{1 - \frac{\varphi}{c^2}} + \frac{\vec{G}}{1 - \frac{2\varphi}{c^2}} \quad (5.78^*)$$

Это выражение определяет *эффективный коэффициент преломления гравитационного поля, как оптически плотной среды.*

Таким образом, электромагнитная волна, распространяющаяся в гравитационном поле, также является носителем информации о статическом и векторном потенциалах гравитационного поля.

В целом на основе проведенного анализа можно сделать следующий вывод: *электромагнитное поле любой частоты является фундаментальным индикатором истинного гравитационного поля, а также неинерциального, в том числе вращательного движения. Информация о гравитации и неинерциальном движении содержится практически в любом параметре электромагнитного поля.*

Важной стороной отмеченного свойства поля является то, что при выводе всех приведенных уравнений не накладывалось никаких условий на частоту волны. Поэтому *эффекты изменения параметров электромагнитного поля, вызванные истинным гравитационным полем, а также неинерциальным движением системы источник – приемник должны проявляться на любой частоте, включая нулевую.*

←----->

6. ПАРАМЕТРЫ РАСПРОСТРАНЕНИЯ РАДИОВОЛН НА ОСНОВЕ ОПТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

6.1. Фаза волны и обобщенный коэффициент преломления пространства-времени в произвольной системе отсчета с учетом движения среды

Коэффициент преломления (5.78) учитывает преломляющие свойства движущейся среды (коэффициент неподвижной среды n и скорость движения среды \vec{V}), влияние статического потенциала гравитационного поля $\varphi = \frac{c^2}{2}(\mathbf{g}_{00} - 1)$, а также влияние векторного потенциала поля \vec{G} . Однако в нем нет информации об изменении пространственных свойств гравитационного поля в зависимости от его потенциала. Вместе с тем, как показано в разделе 3.2, такая зависимость может быть весьма существенной, причем определяется влиянием и статического, и векторного потенциалов гравитационного поля.

Чтобы установить такое влияние, обратимся к определению приращения фазы $d\Phi$ электромагнитной волны. Поскольку фаза волны является инвариантом к выбору системы отсчета, определим ее для координатного времени t и координатной частоты ω_k в виде:

$$d\Phi = \omega_k dt - \vec{k} d\vec{\delta}, \quad (6.1)$$

где \vec{k} – волновой вектор; $d\vec{\delta}$ – элемент пространственной длины, квадрат которого определяется трехмерным пространственным метрическим тензором $\gamma_{\alpha\beta}$ формулой (3.35):

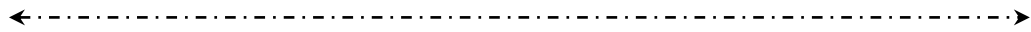
$$d\delta^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (6.2)$$

Учитывая далее, что, согласно (5.75), $\vec{k} = \frac{\omega_k}{c} \vec{n}^*$, формулу (6.1) приводим к виду:

$$d\Phi = \omega_k dt - \frac{\omega_k}{c} d\psi(x, y, z), \quad (6.3)$$

где

$$d\psi(x, y, z) = \vec{n}^* d\vec{\delta} \quad (6.4)$$



– приращение эйконала волны (оптического пути) вдоль направления распространения волны; $\vec{n}^* = n\vec{e}$ – коэффициент преломления среды в гравитационном поле, который определяется соотношением (5.78); \vec{e} – орт волны.

Полный эйконал вдоль трассы распространения волны между точками 1 и 2 определяется интегрированием соотношения (6.4):

$$\Delta\psi_{12} = \int_1^2 d\psi = \int_1^2 \vec{n}^* \cdot \sqrt{\gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta} \quad (6.5)$$

Вводя в рассмотрение квадрат координатного расстояния dl^2 :

$$dl^2 = dx^\alpha dx^\alpha = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (6.6)$$

формулы (6.4) и (6.5) представляем в окончательном виде:

$$d\psi(x, y, z) = \vec{n}^* \cdot d\vec{R}, \quad (6.7)$$

$$\Delta\psi_{12} = \int_1^2 d\psi = \int_1^2 \vec{n}^* \cdot d\vec{R}, \quad (6.8)$$

где $d\vec{R} = \vec{e}dl$;

$$\vec{n}^* = n^* \sqrt{\frac{\gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta}{dx^\alpha dx^\beta}} = \left(\frac{n}{\sqrt{-g_{00}}} \vec{e} + \frac{\vec{G}}{-g_{00}} - \frac{n^2 - 1}{c} \vec{V} \right) \sqrt{\frac{\gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta}{dx^\alpha dx^\beta}} \quad (6.9)$$

– обобщенный коэффициент преломления пространства-времени как оптически плотной среды распространения электромагнитных волн.

Полученный коэффициент является релятивистским показателем и учитывает две причины релятивистского изменения фазового набега и приращения эйконала на трассе распространения электромагнитной волны в гравитационном поле: изменение фазовой скорости волны ($V_\Phi = c/n^*$) за счет статического и векторного гравитационных потенциалов и удлинение пути луча ($d\delta > dl$) за счет искривления пространства в поле тяготеющих тел.

Рассмотрим несколько примеров релятивистских изменений преломляющих свойств пространства-времени за счет влияния истинных и наведенных вращением гравитационных полей.

←----->

1. Статическое гравитационное поле с метрическим тензором, имеющим компоненты (2.51).

Пренебрегая высшими степенями потенциала, компоненты метрического тензора получаем в виде:

$$g_{00} = -\left(1 - \frac{2\varphi}{c^2}\right), \quad g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right), \quad g_{0\alpha} = 0; \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3,$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ – единичный тензор второго ранга; φ – статический гравитационный потенциал. Поэтому на основе соотношений (2.27) и (6.9) получаем:

$$n^{**} = n \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right) - \frac{n^2 - 1}{c} \vec{V}\vec{e}. \quad (6.10)$$

Таким образом, коэффициент преломления изменяется как за счет движения среды, что приводит к эффекту увлечения света, так и за счет двойного влияния статического гравитационного потенциала. Причем на принятом уровне точности оба эффекта независимы и складываются аддитивно. В частном случае вакуума ($n = 1$) отсюда получаем известный результат [3]:

$$n^{**} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}. \quad (6.11)$$

Преломляющие свойства гравитационного поля изотропны и от направления не зависят.

2. Равномерно ускоренная система отсчета. Метрический тензор в этой системе имеет компоненты [2]:

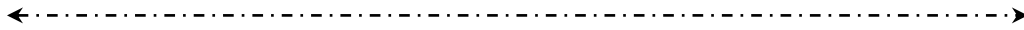
$$g_{00} = -\left(1 - \frac{2\varphi}{c^2}\right), \quad g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}, \quad g_{0\alpha} = 0, \quad (6.12)$$

где $\varphi = \vec{a}\vec{R}$; \vec{a} – линейное ускорение системы отсчета. В такой системе отсчета $\gamma_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$; $d\delta = dl^2$; $d\delta^2 = dl^2$, т.е. пространство плоское. Поэтому имеем:

$$n^{**} = n \left(1 - \frac{\vec{a}\vec{R}}{c^2}\right) - \frac{n^2 - 1}{c} \vec{V}\vec{e}, \quad (6.13)$$

3. Система отсчета, равномерно вращающаяся в статическом гравитационном поле.

Метрический тензор в такой системе определяется компонентами (2.97). Если пренебречь неравномерностью вращения Земли, компоненты тензора имеют вид:



$$g_{00} = -\left(1 - \frac{2\varphi}{c^2} - G_\alpha G^\alpha\right), g_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 + \frac{2\varphi}{c^2}, & \alpha = \beta, \\ 0, & \alpha \neq \beta, \end{cases} \quad (6.14)$$

$$g_{0\alpha} = G_\alpha = \frac{[\vec{\Omega R}]_\alpha}{c}, G_1 = -\frac{\Omega_z y}{c}, G_2 = \frac{\Omega_z x}{c}, G_3 = 0.$$

Согласно (2.99), трехмерный метрический тензор в такой системе имеет следующие компоненты:

$$\gamma_{11} = \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2} + G_1^2\right), \gamma_{22} = \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2} + G_2^2\right), \quad (6.15)$$

$$\gamma_{33} = \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right), \gamma_{12} = \gamma_{21} = G_1 G_2.$$

Соответственно, пространственный элемент длины в такой системе определяется формулой (3.37). Используя приведенные компоненты метрических тензоров, из (6.9) находим:

$$n^{**} = n \left[1 + \frac{2\varphi}{c^2} + \frac{1}{2} \vec{G}^2 + \frac{1}{2} (\vec{G}\vec{e})^2 \right] + \vec{G}\vec{e} - \frac{n^2 - 1}{c} \vec{V}\vec{e}. \quad (6.16)$$

Из анализа полученной формулы следуют следующие основные преломляющие оптические свойства пространства-времени во вращающейся системе [229] :

– анизотропность, поскольку преломляющие свойства существенно зависят от направления распространения волны. Например, при распространении волны вдоль радиуса имеем $\vec{G}\vec{e} = 0$; при распространении перпендикулярно радиусу получаем $(\vec{G}\vec{e})^2 = G^2$, а также $\vec{G}\vec{e} = \pm G$, в зависимости от направления вектора \vec{e} ;

– неоднородность преломляющих свойств вдоль радиус-вектора, поскольку, согласно (6.14), компоненты метрического тензора зависят от расстояния от центра системы отсчета;

– изотропность преломляющих свойств, вызванных влиянием статического гравитационного поля;

– анизотропность преломляющих свойств, вызванных влиянием движения среды.

**6.2. Уравнения распространения электромагнитных волн
в неоднородном гравитационном поле**

6.2.1. Уравнение эйконала

Наиболее широко применяемым методом расчета параметров волны, распространяющейся в плавно неоднородной среде, является метод геометрической оптики [2, 222]. Приближение геометрической оптики отвечает асимптотическому пределу $\lambda \rightarrow 0$, т.е. малости длины волны по сравнению со всеми другими геометрическими параметрами задачи. Простота и наглядность этого метода делает его удобным и при исследовании процессов распространения в неоднородных гравитационных полях.

Основным уравнением геометрической оптики является уравнение эйконала, которое определяет направление лучей. Если фазу волны представить в виде (6.3), то функция координат $\psi(x, y, z)$, имеющая размерность длины, и есть искомый эйконал, или фазовый путь.

Для перехода от волновой к геометрической оптике по методу Рытова [223, 224] воспользуемся уравнениями Максвелла (5.49), которые в отсутствие токов и свободных зарядов в среде представляем в виде:

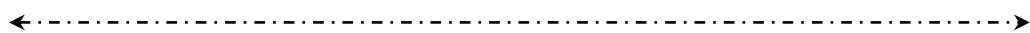
$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial(\sqrt{\gamma} \vec{B})}{\partial t}, \quad \text{rot} \vec{H} = -\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial(\sqrt{\gamma} \vec{D})}{\partial t}. \quad (6.17)$$

Для периодических процессов с временным множителем $e^{-i\omega t}$ при постоянной метрике ($\gamma = \text{const}$) на основе материальных соотношений (5.52) эти уравнения приводим к виду:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot} \vec{E} &= ikc \left(\frac{\mu}{\sqrt{-g_{00}}} \vec{H} + \frac{1}{c} [\vec{Y} \vec{E}] \right), \\ \text{rot} \vec{H} &= -ikc \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{-g_{00}}} \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{H} \vec{E}] \right). \end{aligned} \right\} \quad (6.18)$$

Следуя методу Рытова, решение будем искать в виде рядов:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\vec{E}_0 + \frac{i}{k_0} \vec{E}_1 + \dots \right) e^{ik_0 \psi}, \\ \vec{H} &= \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left(\vec{H}_0 + \frac{i}{k_0} \vec{H}_1 + \dots \right) e^{ik_0 \psi}. \end{aligned} \quad (6.19)$$



Подставляя соотношения (6.18) в (6.120) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях k_0 , получаем уравнения нулевого приближения:

$$\left. \begin{aligned} [\nabla\psi - \vec{Y}, \vec{E}_0] &= \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{-g_{00}}} cH_0, \\ [\nabla\psi - \vec{Y}, \vec{H}_0] &= \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{-g_{00}}} cE_0, \end{aligned} \right\} \quad (6.20)$$

и уравнения первого приближения:

$$\begin{aligned} \text{rot}\vec{E}_0 - \left[\left(\frac{\nabla\varepsilon}{2\varepsilon} - \frac{\nabla\varphi}{2c^2} \right) \vec{E}_0 \right] &= -\frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{\sqrt{-g_{00}}} c\vec{H}_1 + [(\nabla\psi - \vec{Y})\vec{E}] \\ -\text{rot}\vec{H}_0 - \left[\left(\frac{\nabla\mu}{2\mu} - \frac{\nabla\varphi}{2c^2} \right) \vec{H}_0 \right] &= \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{\sqrt{-g_{00}}} c\vec{E}_1 + [(\nabla\psi - \vec{Y})\vec{H}_1], \end{aligned} \quad (6.21)$$

где φ – статический гравитационный потенциал, связанный с временным компонентом метрического тензора соотношением $\varphi = \frac{c^2}{2}(g_{00} - 1)$; вектор \vec{Y} определяется соотношением (5.52).

Исключим вектор \vec{H}_0 из уравнений (6.20). В результате получим:

$$(\nabla\psi - \vec{Y})(\nabla\psi - \vec{Y}, \vec{E}_0) - (\nabla\psi - \vec{Y})^2 \vec{E}_0 = \frac{n^2}{-g_{00}} \vec{E}_0. \quad (6.22)$$

Учитывая, что, согласно первому уравнению (6.20), векторы $(\nabla\psi - \vec{Y})$ и \vec{E}_0 ортогональны, из соотношения (6.22) получаем обобщенное уравнение эйконала:

$$(\nabla\psi - \vec{Y})^2 = \frac{n^2}{-g_{00}}, \quad (6.23)$$

которое на основании (5.52) в развернутом виде выглядит следующим образом:

$$\left[\nabla\psi - \left(\frac{\vec{G}}{-g_{00}} - \frac{n^2 - 1}{c} \vec{V} \right) \right]^2 = \frac{n^2}{-g_{00}}. \quad (6.24)$$

В вакууме уравнение эйконала (6.24) приобретает форму:

$$(\nabla\psi)^2 + \frac{2\vec{G}}{g_{00}} + \vec{G}^2 = \frac{1}{-g_{00}}. \quad (6.25)$$

Наконец, в покоящейся среде в инерциальной системе отсчета ($V = G = 0$) формула (6.24) сводится к классическому результату:

$$(\nabla\psi)^2 = n^2. \quad (6.26)$$

Таким образом, положение волнового фронта, а значит и положение луча в пространстве, зависит от характеристик среды ε, μ , ее скорости, а также от статического и векторного потенциалов гравитационного поля.

Полученные уравнения обобщают известные результаты для распространения волны в постоянном неоднородном гравитационном поле [2, 3, 225], а также в покоящихся неоднородных средах в инерциальной системе [222, 223, 224].

6.2.2. Релятивистская рефракция луча в гравитационном поле на основе вариационного принципа Ферма

Уравнение луча, определяющее рефракцию радиолуча, можно найти как из уравнения эйконала (6.24), так и из вариационного принципа Ферма. Согласно этому принципу, для траектории луча между двумя заданными точками пространства А и В должно выполняться условие минимума эйконала [1, 2, 226]. Применительно к данному случаю это условие записывается на основе формулы (6.8) в виде:

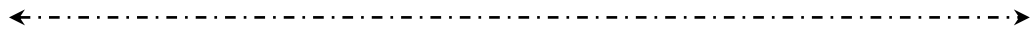
$$\Delta\psi_{AB} = \int_A^B \vec{n}^{**} d\vec{R} = \min, \quad (6.27)$$

где $d\vec{R} = \vec{e} dl$; $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$; \vec{n}^{**} – обобщенный коэффициент преломления движущейся среды в гравитационном поле, который в общем случае определяется формулой (6.9).

Уравнение луча, получаемое путем варьирования интеграла в форме (3.5), имеет вид [226]:

$$\frac{d(n^{**}\vec{e})}{dR} = \nabla n^{**}, \quad (6.28)$$

где $\vec{e} = \frac{d\vec{l}}{dl}$ – единичный вектор касательной к лучу.



Учитывая, что $\frac{dn^{**}}{dl} = \vec{e} \frac{dn^{**}}{dl} = \vec{e} \nabla n^{**}$, выражение (6.28) можно представить в развернутом виде:

$$\frac{d\vec{e}}{dl} = \frac{1}{n^{**}} [\nabla n^{**} - \vec{e} (\vec{e} \nabla n^{**})]. \quad (6.29)$$

Уравнения луча (6.28) и (6.29) вместе с граничными условиями, задающими направление луча при $\vec{R} = \vec{R}_0$, определяют траекторию луча.

Используя векторную характеристику кривизны луча \vec{K} , можем записать:

$$\vec{K} = \frac{\vec{N}}{R_k} = \frac{d\vec{e}}{dl}, \quad (6.30)$$

где \vec{N} – единичный вектор главной нормали, указывающий направление вектора $d\vec{e}$ и обращенный в сторону уклонения луча; R_k – радиус кривизны.

Умножая выражения (6.29) и (6.30) на \vec{N} скалярно и учитывая, что $\vec{N}\vec{e} = 0$, получаем:

$$\frac{1}{R_k} = \vec{N} \frac{\nabla n^{**}}{n^{**}}. \quad (6.31)$$

Отсюда следует, что положительному значению градиента (увеличению n^{**}) соответствует положительная кривизна. Иначе говоря, луч изгибается в сторону увеличения показателя преломления: в общем случае произвольного n^{**} по абсолютной величине, в частном случае атмосферы с положительным n – по модулю.

Подставляя в уравнения (6.29) и (6.31) коэффициенты преломления (6.11), (6.13) и (6.16), можно получить уравнение лучей в различных системах отсчета.

В статическом гравитационном поле Земли с достаточной степенью точности можно считать, что потенциал определяется формулой $\varphi_e = \frac{\mu_e}{\rho}$. Поэтому, согласно (6.11), «гравитационная» среда с коэффициентом преломления $n^{**} = 1 + \frac{2\mu_e}{c^2 \rho}$ является изотропной сферически слоистой. «Гравитационная» среда в равномерно ускоренной системе отсчета с коэффициентом (6.13), равным в вакууме $n^{**} = 1 - \frac{a\vec{R}}{c^2}$ – также плоскостойкая.

←----->

Теория распространения волны в сферически-слоистых и плоско-слоистых средах достаточно подробно разработана в [227]. Согласно этой теории, траектория луча в сферически-слоистой среде есть плоская кривая, удовлетворяющая уравнению:

$$n^{**}R \sin \phi_e = const, \quad (6.32)$$

где R – расстояние от рассматриваемого слоя среды до центра сферы; ϕ_e – угол падения луча на преломляющий слой. Угол астрономической рефракции луча, приходящего из бесконечности в данную точку, при этом составляет:

$$\Delta\beta = (n_0 - 1)ctg\theta, \quad (6.33)$$

где n_0 – коэффициент преломления в точке приема; θ – угол места, под которым принимается луч.

Максимальное значение угла астрономической рефракции будет при $\theta = 0$. Поэтому, используя коэффициент преломления сферически симметричного гравитационного поля (6.11) и учитывая (6.32), получаем:

$$\Delta\beta_{\max} = \frac{2\mu}{\rho c^2}, \quad (6.34)$$

что ровно в два раза отличается от известного результата (см., например, работу [30]), определяющего угол отклонения луча в поле тяготеющей массы. Такое различие объясняется тем, что здесь рассматривается лишь половина пути луча, используемого для расчетов во втором случае. В частности, для гравитационного поля Земли при $\mu_e \approx 4 \cdot 10^{14} \text{ м}^3/\text{с}^2$; $\rho = R_3 = 6,4 \cdot 10^6 \text{ м}$ имеем $\Delta\beta_{\max} = 1,4 \cdot 10^{-3}$ мкрад.

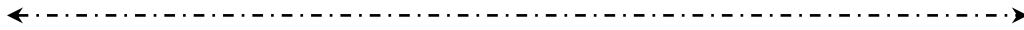
Для плоскослоистой среды уравнение луча имеет вид [227]:

$$n^{**} \sin \phi_e = const. \quad (6.35)$$

Нетрудно показать, что в гравитационном поле линейно ускоренной системы максимальное отклонение луча, распространяющегося в пределах геостационарной орбиты, определится соотношением: $\Delta\beta_{\max} = \frac{aR}{c^2}$,

что при $a = 10 \text{ м/с}^2$; $R = 4 \cdot 10^7 \text{ м}$ составит $\approx 4 \cdot 10^{-3}$ мкрад.

Особо следует рассмотреть релятивистскую рефракцию волны во вращающейся системе отсчета.



6.2.3. Релятивистская рефракция в гравитационном поле вращающейся системы отсчета

Уравнение (6.31) для случая вращающейся системы отсчета приводится к виду [234]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_k} = \vec{N} \frac{\nabla n}{n} \left(1 - \frac{\vec{G}\vec{e}}{n} - \frac{2\vec{V}\vec{e}}{c} \right) + \vec{N} \left\{ \vec{G}\nabla\vec{G} + (\vec{G}\vec{e})\nabla(\vec{G}\vec{e}) \right\} + \\ + \frac{\vec{N}}{n} \left(1 - \frac{\vec{G}\vec{e}}{n} \right) \nabla(\vec{G}\vec{e}) - \frac{n^2 - 1}{cn} \nabla(\vec{V}\vec{e}), \end{aligned} \quad (6.36)$$

где скорость среды \vec{V} считается переменной вдоль луча. Если среда покоится, то в первом приближении можно записать:

$$\frac{1}{R_k} = \vec{N} \frac{\nabla n}{n} + \frac{\vec{N}}{n} \nabla(\vec{G}\vec{e}), \quad (6.37)$$

откуда следует важный вывод: кривизна луча, вызванная неоднородностью коэффициента преломления среды, и кривизна, обусловленная вращением системы отсчета, независимы, алгебраически складываются, и поэтому их можно рассматривать раздельно.

В результате при $n-1 \ll 1$ выделим чисто «гравитационную» кривизну:

$$\frac{1}{R_k} = \vec{N} \left\{ \vec{G}(\nabla\vec{G}) + (\vec{G}\vec{e})\nabla(\vec{G}\vec{e}) + \nabla(\vec{G}\vec{e})(1 - \vec{G}\vec{e}) \right\}; \quad (6.38)$$

Для исследования поведения волны во вращающейся системе конкретизируем задачу, положив, что система отсчета вращается равномерно: $\vec{G} = \frac{[\vec{\Omega}\vec{R}]}{c}$.

При вычислении кривизны луча воспользуемся соотношениями [135]:

$$\left. \begin{aligned} \nabla(\vec{G}\vec{e}) &= (\vec{G}\nabla)\vec{e} + (\vec{e}\nabla)\vec{G} + [\vec{G}rot\vec{e}] + [\vec{e}rot\vec{G}], \\ \nabla\vec{G} &= \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z}, \\ (\vec{e}\nabla) &= \frac{dx}{dl} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy}{dl} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{dz}{dl} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{d}{dl}. \end{aligned} \right\} \quad (6.38a)$$

←----->

Пренебрегая эффектами порядка $1/c^2$, а также пространственными производными $\nabla\vec{e}$ и $[\nabla\vec{e}]$, поскольку они тоже вносят эффекты второго порядка, получаем:

$$\frac{1}{R_k} \approx \vec{N}\nabla(\vec{G}\vec{e}) \approx \vec{N}\left(\frac{d\vec{G}}{dl} + [\vec{e}rot\vec{G}]\right). \quad (6.39)$$

Подставив значение \vec{G} для вращающейся системы, найдем:

$$\frac{1}{R_k} = \frac{\vec{N}}{c} \left(\frac{d[\vec{\Omega}\vec{R}]}{dl} - 2[\vec{\Omega}\vec{e}] \right).$$

Выражая в общем случае dl через приращение радиуса в виде

$$dl = \frac{dR}{\vec{R}^0\vec{e}},$$

где \vec{R}^0 – единичный радиус-вектор, получаем:

$$\frac{1}{R_k} = \vec{N} \left\{ \frac{[\vec{\Omega}\vec{R}^0]}{c} (\vec{R}^0\vec{e}) - 2 \frac{[\vec{\Omega}\vec{e}]}{c} \right\}. \quad (6.40)$$

В частном случае распространения луча почти по радиусу ($dl \approx dR, \vec{e} = \vec{R}^0$) имеем:

$$\frac{1}{R_k} = -\frac{\Omega}{c}. \quad (6.41)$$

Таким образом, в первом приближении луч вдоль радиуса распространяется с постоянной кривизной, т.е. по дуге окружности радиусом

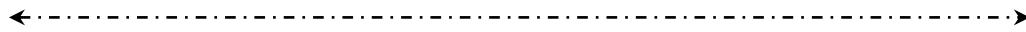
$$R_k = \frac{c}{\Omega}. \quad (6.42)$$

Для качественного анализа формы луча во вращающейся системе воспользуемся формулами (6.29) и (6.30), где направление вектора кривизны \vec{K} определяет сторону отклонения луча. Поскольку, согласно (6.39) и (6.40),

$$\nabla n^{**} \approx \nabla(\vec{G}\vec{e}) = \frac{[\vec{\Omega}\vec{R}^0]}{c} (\vec{R}^0\vec{e}) - 2 \frac{[\vec{\Omega}\vec{e}]}{c}, \quad (6.43)$$

то, пренебрегая членами порядка $1/c^2$, получаем:

$$\vec{K} = \vec{K}_1 + \vec{K}_2 + \vec{K}_3, \quad (6.44)$$



где

$$\vec{K}_1 = \frac{1}{c} [\vec{\Omega} R^0] (\vec{R}^0 \vec{e}); \quad \vec{K}_2 = -\frac{2}{c} [\vec{\Omega} \vec{e}];$$

$$\vec{K}_3 = -\frac{\vec{e}}{c} \left\{ \vec{e} [\vec{\Omega} \vec{R}^0] (\vec{R}^0 \vec{e}) \right\}.$$

При этом учтено, что $\vec{e} [\vec{\Omega} \vec{e}] = 0$.

Таким образом, в общем случае искривление луча определяется тремя векторами, величина и направление которых зависят от ориентации луча относительно центра и плоскости вращения. Поскольку каждый из них перпендикулярен вектору $\vec{\Omega}$, то все они лежат в плоскости вращения. Рассмотрим несколько наиболее характерных случаев движения волны во вращающейся системе. При распространении луча параллельно вектору $\vec{\Omega}$ все три вектора (6.44) равны нулю, что свидетельствует о прямолинейном распространении волны. Теперь предположим, что волна движется произвольно в плоскости вращения (рис. 6.1.).

Поскольку вектор \vec{K}_3 всегда направлен по касательной к траектории, а вектор \vec{K}_2 по абсолютной величине всегда больше \vec{K}_1 , то равнодействующая \vec{K} для любого луча всегда направлена в одну и ту же сторону (при вращении системы против часовой стрелки—вправо).

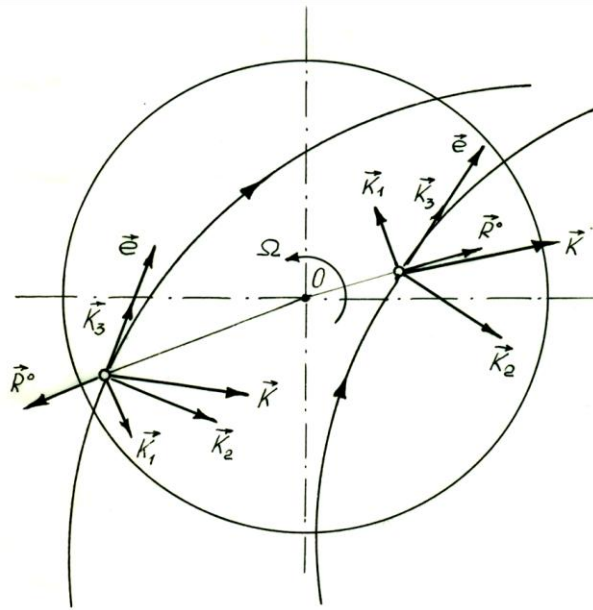


Рис. 6.1.

Кривизна лучей, идущих в противоположных направлениях, имеет обратный знак. Поэтому для одного и того же наблюдателя направления изгиба прямых и обратных лучей противоположны. Особо следует остановиться на случае распространения волны почти вдоль радиуса вращения (рис. 6.2).

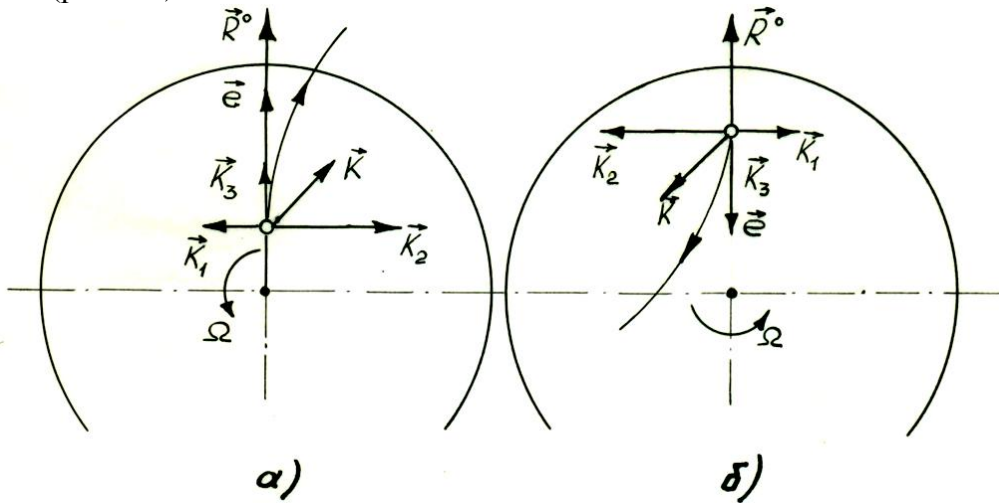
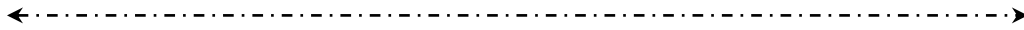


Рис. 6.2.

При этом для прямого и обратного луча векторы \vec{K}_1 и \vec{K}_2 прямо противоположны, причем модуль вектора \vec{K}_2 ровно в два раза больше. В результате $\vec{K} = 0,5 \vec{K}_2$. Поэтому при таком размещении луча относительно центра, вращения его кривизна несколько меньше, чем в других случаях (рис. 6.1), где сумма векторов \vec{K}_1 и \vec{K}_2 больше.

Искривление траектории радиолуча приведет к удлинению его фазового пути, а также к изменению угла, под которым луч виден в точке приема. Оценим в первом приближении эффект увеличения пути для радиально идущих лучей. При этом воспользуемся уже отмеченным выше обстоятельством, что такие лучи имеют форму дуги окружности с радиусом (6.42). Задаваясь уравнением окружности в виде $x^2 + y^2 = R_2^2$, получаем длину ее дуги в виде

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx = R \Big|_a^b \arcsin \frac{x}{R}.$$



При $a = -\frac{R}{2}, b = \frac{R}{2}$ получаем:

$$L = R \left(1 + \frac{L_0^2}{48R_k^2} \right), \quad (6.45)$$

где R – длина хорды кривой. Для орбитальной системы координат при $R_{\max} = 10^8$ м, $\Omega = 10^{-3}$ с⁻¹ малый член в скобках составляет величину $2 \cdot 10^{-9}$. Поэтому при меньших угловых скоростях и расстояниях между двумя точками во вращающейся системе отсчета длину кривой можно считать равной кратчайшему расстоянию по прямой между теми же точками. В связи с этим в последующем при определении времени распространения волны и ее эйконала будем использовать интегрирование по прямой.

Угол рефракции α_Ω между касательными в начальной и конечной точках траектории найдем из определения кривизны

$$\frac{1}{R_k} = \frac{d\alpha}{dl}. \quad (6.46)$$

Отсюда, используя выражение (6.40), находим:

$$\alpha_\Omega = \frac{1}{c} \int_L \vec{N} d[\vec{\Omega}\vec{R}] - \frac{2}{c} \int_L \vec{N} [\vec{\Omega}\vec{e}] dl. \quad (6.47)$$

Угол α_Ω есть угол релятивистской рефракции во вращающейся системе отсчета.

Ограничиваясь плоской задачей и учитывая замечание о возможности интегрирования по прямой, последнее соотношение получим в виде:

$$\alpha_\Omega = \frac{\Omega}{c} \int_L \cos \beta dl - \frac{2\Omega}{c} \int_L dl, \quad (6.48)$$

где β – угол между векторами \vec{R}^0 и \vec{e} . Отрицательное значение этого угла свидетельствует о том, что луч отклоняется в сторону, противоположную вектору $[\vec{\Omega}\vec{R}]$.

Угол рефракции для радиального луча можно также найти из (6.46) на основе (6.41). В результате получаем:

$$\alpha_{\Omega} = -\frac{\Omega R}{c}. \quad (6.49)$$

Рассмотренное искривление луча приводит к тому, что встречные лучи между двумя точками (например, в системах связи) не совпадают, охватывая замкнутый контур (рис. 6.3а), при этом поперечное отклонение луча, близкого к радиальному, составит в первом приближении величину:

$$\delta x_{\uparrow} = \alpha_{\Omega} R = \frac{\Omega R^2}{c}. \quad (6.50)$$

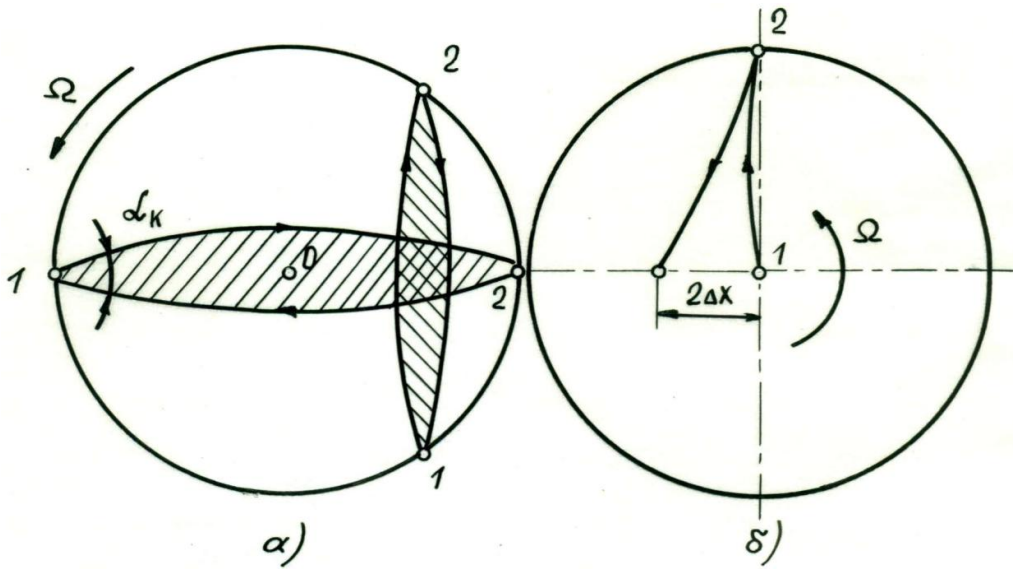


Рис. 6.3.

В запросных радиолиниях ситуация сложнее (рис. 6.3б): строго обратно ретранслированный радиолуч, получая ту же кривизну, не попадает в исходную точку. Нетрудно показать, что

$$\delta x_{\downarrow} = 2\delta x = \frac{2\Omega R^2}{c}. \quad (6.51)$$

6.3. Поворот плоскости поляризации волны в неоднородном гравитационном поле

Одной из важнейших характеристик волны является положение плоскости поляризации вдоль луча. Чтобы убедиться в том, влияет ли неоднородность среды и гравитационного поля на положение плоскости поляризации, выведем волновое уравнение в случае постоянной метрики. Для этого воспользуемся уравнениями Максвелла (5.49) в отсутствие тока проводимости, зарядов и при $\gamma = 1$. Уравнения принимают в этом случае вид:

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (6.52)$$

В качестве материальных используем уравнения (5.52). Поэтому предыдущее уравнение преобразуется к виду:

$$\text{rot} \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \frac{1}{c} \left[\vec{Y} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right]. \quad (6.53)$$

Выражая вектор индукции \vec{D} с помощью материальных соотношений в виде

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} + \frac{1}{\mu c} \left[\vec{B} \vec{Y} \right] - \frac{1}{\mu c^2} \left[\left[\vec{Y} \vec{E} \right] \vec{Y} \right],$$

из (6.52) находим:

$$\text{rot} \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu c} \left[\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \vec{Y} \right] - \frac{1}{\mu c^2} \left[\left[\vec{Y} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] \vec{Y} \right]. \quad (6.54)$$

Учитывая, что для плоской волны оператор дифференцирования по времени $\partial/\partial t$ равносильен умножению на $-i\omega$, а оператор градиента $\nabla = \partial/\partial \vec{R}$ – на $i\vec{k}$, из (6.53) и (6.54) после некоторых преобразований получаем волновое уравнение:

$$\begin{aligned} \text{rot} \text{rot} \vec{E} - \frac{n^2}{g_{00}} k_0^2 \vec{E} = k_0^2 \left[\left[\vec{Y} \vec{E} \right] \vec{Y} \right] + k_0 \left\{ (\vec{Y} \vec{k}) \vec{E} - \vec{Y} (\vec{k} \vec{E}) \right\} + \\ + ik_0 \left\{ \left[\vec{Y} \text{rot} \vec{E} \right] + \left[\vec{H} \nabla \left(\frac{\mu}{\sqrt{-g_{00}}} \right) \right] + (\vec{E} \nabla) \vec{Y} - \vec{E} (\nabla \vec{Y}) \right\}. \end{aligned} \quad (6.55)$$

←----->

Если бы правая часть уравнения (6.55) была равна нулю (что возможно при $\vec{Y}=0$), а также отсутствовала неоднородность среды и гравитационного поля $\left(\nabla \frac{\mu}{\sqrt{-g_{00}}}=0\right)$, то все три составляющие вектора \vec{E} удовлетворяли бы одному и тому же уравнению

$$\text{rot rot} \vec{E} + \frac{n^2}{g_{00}} k_0^2 \vec{E} = 0,$$

которое при заданных условиях с учетом уравнения $\text{div} \vec{D} = \text{div} \vec{E} = 0$ приводилось бы к известной форме:

$$\nabla^2 \vec{E} + \frac{n^2}{-g_{00}} k_0^2 \vec{E} = 0. \quad (6.56)$$

В этих условиях поляризация волны вдоль луча сохраняется неизменной.

В неоднородном же гравитационном поле при ненулевой правой части волнового уравнения (6.55) оказывается существенной ориентация векторов поля \vec{E} и \vec{H} относительно векторов \vec{Y} и $\nabla \frac{\mu}{\sqrt{-g_{00}}}$. Учитывая

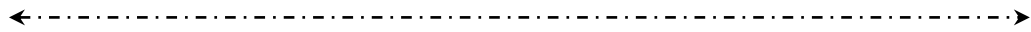
выражение (5.52) для \vec{Y} , можно заключить, что положение плоскости поляризации определяется, кроме неоднородности среды, пространственно-временными компонентами метрического тензора, а также движением среды.

Как следует из подраздела 5.4, в любом гравитационном поле векторы \vec{E} , \vec{H} и \vec{e} образуют естественный треугольник. Здесь \vec{e} — единичный вектор, направленный по касательной к лучу, и определяемый, согласно (5.75), соотношением:

$$\vec{e} = \frac{\sqrt{-g_{00}}}{n} \left(\frac{c}{\omega} \vec{k} + \frac{\vec{G}}{g_{00}} + \frac{n^2 - 1}{c} \vec{V} \right).$$

Точное решение задачи о повороте осей трехгранника относительно нормали к лучу впервые дано Рытовым [224] и Скроцким [225] и выражается в виде:

$$\frac{d\phi_{\Pi}}{dl} = \frac{1}{T} + \frac{1}{2} \vec{e} \text{rot} \vec{e}, \quad (6.57)$$



где ϕ_{Π} – угол между главной нормалью к лучу и вектором \vec{E} ; dl – элемент длины дуги, отсчитываемой вдоль кривой; T – радиус кривизны луча (векторной линии).

Из вышеизложенного следует, что поворот плоскости поляризации волны вызывается одновременно неоднородностью преломляющей среды, неоднородностью гравитационного поля, а также неоднородностью скорости движения среды. При этом влияние пространственно-временного компонента метрического тензора (векторного потенциала поля) \vec{G} на положение плоскости поляризации инвариантно к свойствам преломляющей сплошной среды.

Коэффициент, определяющий пространственную скорость изменения положения плоскости поляризации в гравитационном поле (6.57),

$$K_{\Pi} = \frac{d\phi_{\Pi}}{dl} \quad (6.58)$$

назовем *показателем градиента угла поворота плоскости поляризации электромагнитной волны в гравитационном поле*.

6.4. Время распространения электромагнитной волны в гравитационном поле

Для определения времени распространения волнового фронта волны выражение для фазы волны (6.3) представим в виде [234]:

$$d\Phi_{12} = \omega_k dt - \omega_k dt_{12}, \quad (6.59)$$

где, в соответствии с (6.8), интервал координатного времени распространения между двумя точками составит:

$$dt_{12} = \frac{1}{c} d\psi_{12}(x, y, z) = \frac{1}{c} \vec{n}^{**} d\vec{R}. \quad (6.60)$$

причем входящий сюда обобщенный коэффициент преломления движущейся среды в гравитационном поле \vec{n}^{**} определяется формулой (6.9).

Координатное время распространения волны между моментом излучения t_1 из точки излучения 1 с радиус-вектором \vec{R}_1 и моментом ее приема t_2 в точке 2 с радиус-вектором \vec{R}_2 определим как интеграл вдоль трассы распространения от соотношения (6.60):

$$t_{12} = \frac{1}{c} \int_{\vec{R}_1}^{\vec{R}_2} \vec{e} d\vec{R} + \frac{1}{c} \int_{\vec{R}_1}^{\vec{R}_2} (\vec{n}^{**} - \vec{e}) d\vec{R}, \quad (6.61)$$

где \vec{e} – орт радиолуча.

Соответствующий промежуток собственного времени τ_{12} , фиксируемый часами, размещенными на одной платформе с движущимся приемником (в точке 2), устанавливается соотношениями (3.15) и (3.9а), определяющими релятивистский коэффициент преобразования θ_2 шкалы собственного времени приемника τ относительно шкалы координатного времени t :

$$\tau_{12} = \theta_2 t_{12} = \frac{\theta_2}{c} \int_{\bar{R}_1}^{\bar{R}_2} \vec{e} d\bar{R} + \frac{\theta_2}{c} \int_{\bar{R}_1}^{\bar{R}_2} (\vec{n}^{**} - \vec{e}) d\bar{R}. \quad (6.62)$$

где

$$\theta_2 = \left\{ \left(\sqrt{-g_{00_2}} - \frac{g_{0\alpha 2} V_2^\alpha \theta_0}{c \sqrt{-g_{00_2}}} \right)^2 - \frac{(\theta_0 V_2)^2}{c^2} \right\}^{0.5}. \quad (6.63)$$

Здесь индексом «2» отмечены характеристики гравитационного поля и скорость измерительных часов, связанных с приемником волны.

Первый интеграл соотношения (6.62) определяется геометрической длиной трассы между моментами излучения t_2 и приема t_1 . Поэтому представим ее через геометрическую длину трассы R' на момент излучения t_1 в виде:

$$\int_{\bar{R}_1}^{\bar{R}_2} \vec{e} d\bar{R} = \bar{R}_2(t_2) - \bar{R}_1(t_1) \approx R' + \frac{\vec{V}_2 \bar{R}'}{c^2} + \frac{R'^2}{2c^2} \vec{a}_2 \vec{e}, \quad (6.64)$$

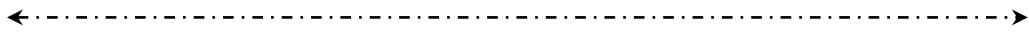
где \vec{V}_2, \vec{a}_2 – векторы пространственной скорости и ускорения приемника, соответственно;

$$R' = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2}, \quad (6.65)$$

штрихованные координаты излучателя и приемника относятся к моменту излучения.

На основании полученных соотношений формула (6.62) принимает вид:

$$\tau_{12} = \frac{\theta_2 R'}{c} + \frac{\theta_2}{c} \int_{\bar{R}_1}^{\bar{R}_2} (\vec{n}^{**} - \vec{e}) d\bar{R} + \frac{\vec{V}_2 \bar{R}'}{c^2} + \frac{R'^2}{2c^3} \vec{a}_2 \vec{e}. \quad (6.66)$$



Аналогично рассуждая, можно выразить время распространения через геометрическую длину трассы R'' на момент приема t_2 :

$$\tau_{12} = \frac{\theta_2 R''}{c} + \frac{\theta_2}{c} \int_{\vec{R}_1}^{\vec{R}_2} (\vec{n}^{**} - \vec{e}) d\vec{R} + \frac{\vec{V}_1 \vec{R}''}{c^2} + \frac{R''^2}{2c^3} \vec{a}_1 \vec{e}, \quad (6.67)$$

где индекс 1 обозначает величины, относящиеся к приемнику, а расстояние R'' определяется по формуле, аналогичной (6.65), через координаты излучателя и приемника на момент приема.

Полученные формулы (6.66) и (6.67) на основе обобщенного коэффициента преломления движущейся сплошной среды (6.9) обобщают известные результаты, полученные для статических гравитационных полей и вращающихся систем отсчета [1, 2]. Однако они являются более точными, поскольку позволяют рассчитать время распространения радиоволны в гравитационном поле с учетом эффектов порядка $1/c^3$.

Отсюда нетрудно получить решения для некоторых частных случаев, например, для распространения волн в среде, покоящейся в равномерно вращающейся земной системе отсчета. Это соответствует случаю распространения радиоволн в атмосфере, а также в глобальных волоконно-оптических измерительных линиях в сплошной среде с коэффициентом преломления n_0 .

Полагая в выражении (6.9) для обобщенного коэффициента преломления $\vec{G} = \frac{1}{c} [\vec{\Omega} \vec{R}]$, пренебрегая влиянием статического гравитационного поля, влиянием центробежного потенциала, а также скоростью среды, приходим к обобщению известного результата (1.76):

$$\tau_{12} = \frac{1}{c} \int_R n_0 dR + \frac{2\vec{\Omega} \vec{S}_\nabla}{c^2} + \frac{\vec{V}_2 \vec{R}'}{c^2} + \frac{R'^2}{2c^3} \vec{a}_2 \vec{e}, \quad (6.68)$$

где S_∇ – площадь, ограниченная радиолучом и радиусами-векторами его начала и конца. Для волоконно-оптической линии при $V_2 = a_2 = 0$ формула упрощается, т.к. два последних члена исчезают.

Важный результат этой формулы состоит в том, что гироскопическая задержка, определяемая компонентом метрического тензора \vec{G} , совершенно не зависит от свойств преломляющей среды: атмосферы или материала световода [214].

←----->

6.5. Частота электромагнитной волны вдоль трассы распространения

6.5.1. Связь собственных частот волны в двух точках трассы

Фаза электромагнитной волны, как установлено выше, определяется формулой (6.1). Для одной и той же пространственной точки трассы волны, когда пространственный интервал равен нулю ($d\delta = 0$), временной набег фазы можем выразить двояко: через интервал координатного времени dt , а также через интервал собственного времени в этой точке $d\tau$:

$$d\Phi = \omega_k dt = \omega_c d\tau, \quad (6.69)$$

где

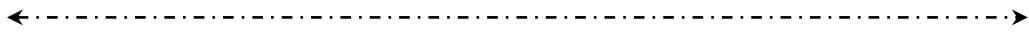
$$\omega_k = \frac{d\Phi}{dt}; \quad \omega_c = \frac{d\Phi}{d\tau} \quad (6.70)$$

– соответственно, координатная частота волны, определяемая в единицах координатного времени, и собственная частота волны, измеряемая в единицах собственного времени, соответствующего данной точке пространства-времени.

Связь между собственным и координатным временем в любой точке пространства-времени устанавливается соотношением (3.5), определяющим релятивистский коэффициент преобразования шкалы собственного времени τ относительно шкалы координатного времени t для хранителя, движущегося в гравитационном поле [234]. Для некоторой i -той точки трассы волны этот коэффициент запишем в виде:

$$\theta_i = \frac{d\tau_i}{dt} = \left\{ \left(\sqrt{-g_{00_i}} - \frac{g_{0\alpha_i} V_{ki}^\alpha}{c \sqrt{-g_{00_i}}} \right)^2 - \frac{V_{ki}^2}{c^2} \right\}^{0.5}. \quad (6.71)$$

Поскольку интервал координатного времени dt в данной четырехмерной системе отсчета от координат не зависит, то частота ω_k электромагнитной волны постоянна вдоль трассы распространения. Собственное же время и частоту в данной точке пространства можно измерить, в отличие от координатных величин, с помощью часов, размещенных в этой же точке. Однако промежутки собственного времени и собственная частота при тех же значениях dt и ω_k зависят, как следует из (6.71), от пространственных координат измерительных часов и скорости их движения.



Поэтому собственная (истинная, измеряемая) частота волны, измеренная совершенно одинаковыми часами, но размещенными по трассе распространения, будет различна. Это важное свойство собственной частоты имеет большое прикладное значение и будет использовано в данной работе в дальнейшем. Согласно (6.70) и (6.71), связь между координатной и собственной (измеряемой) частотами вдоль трассы распространения устанавливается соотношением:

$$\frac{\omega_k}{\omega_{ci}} = \frac{d\tau_i}{dt} = \theta_i. \quad (6.72)$$

Частота ω_k непосредственно не измеряется. Однако ее использование имеет большое теоретическое значение при исследовании распространения волн в неоднородных средах, когда основным условием правильного решения задачи является постоянство частоты вдоль луча. Полученные в разделе 5 дисперсионные соотношения содержат именно координатную частоту, поскольку при выводе не вводилось собственное время.

Представим фазовые набегы за счет времени и частоты (6.60) в двух точках пространства в виде: $d\Phi_1 = \omega_{c1} d\tau_1$, $d\Phi_2 = \omega_{c2} d\tau_2$. Тогда при равенстве этих фазовых набегов $d\Phi_1 = d\Phi_2$, например, при равенстве количества переходов синусоиды волны через нуль, на основе формулы (6.72) можно установить соотношение собственных частот одной и той же волны в точках 1 и 2 трассы распространения, измеренных по собственным часам в этих точках:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{f_1}{f_2} = \frac{\theta_2}{\theta_1} \frac{dt_2}{dt_1}, \quad (6.73)$$

где коэффициенты преобразования шкал собственного времени θ_1 и θ_2 относительно координатного времени определяются соотношением (6.71).

Здесь и далее условимся, что точка 1 трассы радиоволны соответствует излучению, а точка 2 – приёму радиоволны.

Согласно (6.71), коэффициент θ_i определяется через координатную скорость измерительных часов. Для перехода от координатной скорости подвижного хранителя V_k^α (3.4) к действительной его скорости V^α , измеренной в единицах собственного времени τ_0 базового хранителя времени баллистического Центра, используем соотношение (3.4). В результате имеем:

$$V_k^\alpha = V^\alpha \theta_0, \quad (6.74)$$

где θ_0 – коэффициент преобразования неподвижных часов базового Центра.

В результате для коэффициентов θ_1 и θ_2 , входящих в (6.73), получаем выражения:

$$\theta_i = \left\{ \left(\sqrt{-g_{00_i}} - \frac{g_{0\alpha_i} V_i^\alpha \theta_0}{c \sqrt{-g_{00_i}}} \right)^2 - \frac{(V_i \theta_0)^2}{c^2} \right\}^{0.5}, \quad i = 1; 2, \quad (6.75)$$

где коэффициент θ_0 для неподвижных базовых часов баллистического Центра определяется формулой (6.71) при условии $V_0 = 0$:

$$\theta_0 = \sqrt{-g_{00}^{(0)}} \quad (6.76)$$

Отношение dt_2 / dt_1 найдем, исходя из соотношения:

$$t_2 = t_1 + t_{12}, \quad (6.77)$$

где t_{12} – время распространения луча на трассе между источником и приемником. Отсюда следует:

$$\frac{dt_2}{dt_1} = 1 + \frac{dt_{12}}{dt_1}. \quad (6.78)$$

Промежуток времени t_{12} для плоской волны найдем из выражения (6.61), где коэффициент преломления n^{**} выражается развернутым соотношением (6.9).

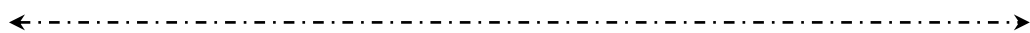
В выражении (6.61) три переменных: радиусы-векторы источника и приемника волны \vec{R}_1 и \vec{R}_2 , а также коэффициент преломления среды $n^{**}(\vec{R})$. Поэтому

$$\frac{dt_{12}}{dt_1} = \frac{\vec{n}^{**}(\vec{R}_2)}{c} \frac{d\vec{R}_2}{dt_2} \frac{dt_2}{dt_1} - \frac{\vec{n}^{**}(\vec{R}_1)}{c} \frac{d\vec{R}_1}{dt_1} + \frac{1}{c} \int_{\vec{R}_2}^{\vec{R}_1} \frac{\partial n^{**}(\vec{R})}{dt_1} d\vec{R}, \quad (6.79)$$

где $\vec{n}^{**}(\vec{R}_1)$ и $\vec{n}^{**}(\vec{R}_2)$ – коэффициенты преломления на концах трассы.

Подставляя полученное выражение в (6.78), получаем:

$$\frac{dt_2}{dt_1} = \frac{1 - \frac{\vec{n}^{**}(\vec{R}_1)}{c} \vec{V}_1^k \vec{e}_1 + \frac{1}{c} \int_{\vec{R}_1}^{\vec{R}_2} \frac{\partial \vec{n}^{**}(\vec{R})}{dt_1} d\vec{R}}{1 - \frac{\vec{n}^{**}(\vec{R}_2)}{c} \vec{V}_2^k \vec{e}_2}, \quad (6.80)$$



где \vec{e}_1, \vec{e}_2 – орты лучей в точках излучения и приема;

$$\vec{V}_1^k = \frac{d\vec{R}_1}{dt_1}; \quad \vec{V}_2^k = \frac{d\vec{R}_2}{dt_1} \quad (6.81)$$

– координатные скорости приемника и источника волны относительно начала системы координат. Кроме того, производная $\frac{\partial n^{**}}{\partial t_1}$ также опреде-

лена в единицах координатного времени t_1 . Однако скорости движения материальных точек удобнее измерять в масштабе собственного времени каких-либо часов, связанных с характерной точкой выбранной координатной системы, в частности, неподвижных относительно нее.

Чтобы перейти к собственным значениям скоростей излучателя \vec{V}_1 и приемника \vec{V}_2 , а также собственному значению производной коэффициента преломления $\frac{\partial n^{**}}{\partial \tau}$, необходимо воспользоваться соотношением

(6.74). Коэффициент преобразования θ_0 (6.76) соответствует точке размещения базовых часов баллистического Центра, определяющего и прогнозирующего действительные значения скоростей излучателя и приемника. В результате из формулы (6.73) с учетом соотношений (6.75) и (6.81) находим частоту принимаемого сигнала:

$$\omega_{c2} = \omega_{c1} \frac{\left\{ \left(\sqrt{-g_{00_1}} - \frac{g_{0\alpha_1} V_1^\alpha \theta_0}{c \sqrt{-g_{00_1}}} \right)^2 - \frac{(V_1 \theta_0)^2}{c^2} \right\}^{0,5}}{\left\{ \left(\sqrt{-g_{00_2}} - \frac{g_{0\alpha_2} V_2^\alpha \theta_0}{c \sqrt{-g_{00_2}}} \right)^2 - \frac{(V_2 \theta_0)^2}{c^2} \right\}^{0,5}} \cdot \frac{1 - \frac{\vec{n}^{**}(\vec{R}_2)}{c} \theta_0 \vec{V}_2 \vec{e}_2}{1 - \frac{\vec{n}^{**}(\vec{R}_1)}{c} \theta_0 \vec{V}_1 \vec{e}_1 + \frac{\theta_0}{c} \int_{\vec{R}_1}^{\vec{R}_2} \vec{n}^{**}(\vec{R}) d\vec{R}}$$

←----->

где введено обозначение производной коэффициента преломления

$$\vec{n}^{**}(\vec{R}) = \frac{\partial \vec{n}^{**}(\vec{R})}{\partial t_1}; \quad \vec{V}_2 = \vec{V}_2' + \frac{\vec{a}_2 \vec{R}}{c}; \quad \vec{V}_2'; \quad \vec{a}_2 - \text{ скорость и ускорение}$$

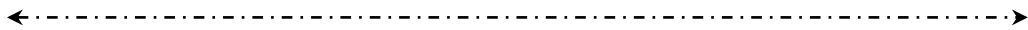
приемника на момент излучения радиоволны t_1 .

Полученная формула обобщает известные результаты, относящиеся к распространению радиоволн в атмосфере, в истинном гравитационном поле, а также во вращающейся системе отсчета [1, 2, 3, 11]. При ее выводе учтены члены, пропорциональные $1/c^3$, что соответствует ошибке расчета относительных релятивистских частотных смещений не более 10^{-18} . В частном случае распространения волны вне гравитационного поля, когда источник волны жестко связан с началом инерциальной системы координат ($V_1 = 0$), формула (6.82) сводится к соотношению (1.33), следующему из преобразований Лоренца.

6.5.2. Инвариантное гравитационное смещение частоты как характеристика гравитационного поля

Полученная формула (6.82) описывает частотные эффекты чисто релятивистского происхождения, кинематические эффекты, определяемые взаимным движением источника и приемника волны, а также эффекты, определяемые оптическими свойствами (коэффициентом преломления) среды. Первые из них определяются влиянием потенциалов гравитационного поля, а также эффектом Допплера II порядка, зависящего от квадрата относительной скорости источника и приемника волны. Они инвариантны к преломляющим свойствам среды. Кинематический эффект смещения частоты – эффект Допплера I порядка - зависит как от скорости относительного движения, так и от коэффициента преломления среды.

Из перечисленных эффектов особо следует выделить гравитационную составляющую релятивистского смещения частоты радиоволны, определяемую статическим и векторным потенциалами поля. Она является инвариантом по отношению к взаимному движению источника и приемника, а также к оптическим свойствам среды на трассе распространения. Поэтому она может использоваться в качестве одной из постоянных характеристик оптической модели гравитационного поля, в частности, околоземного пространства-времени [234].



Чтобы строго выделить инвариантную часть, положим в формуле (6.82) $n = 1; V_1 = V_2 = 0$. В результате формула (6.82) принимает вид:

$$\omega_{c2} = \omega_{c1} \frac{\sqrt{-g_{00_1}}}{\sqrt{-g_{00_2}}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\theta_0}{2c} \int_{\vec{R}_1}^{\vec{R}_2} \vec{n}_1^{**}(\vec{R}) d\vec{R}}. \quad (6.83)$$

Дальнейшие вычисления проведем для наиболее общего случая, а именно применительно к связанной с космическим аппаратом орбитальной системе отсчета. Метрический тензор такой системы имеет компоненты, определяемые соотношениями (2.107). Особенностью такой системы является переменный характер угловой скорости орбитальной системы, определяемой соотношением (2.105).

По этой причине производная по времени от векторного потенциала не равна нулю: $\vec{G} \neq 0$. Обобщенный коэффициент преломления пространства-времени вычисляется подобно коэффициенту (6.16) и для вакуума при $n = 1$ приобретает вид:

$$\vec{n}^{**} = \vec{e} + \frac{2\varphi}{c^2} \vec{e} + \frac{1}{2} \vec{e} G^2 + \frac{1}{2} \vec{e} (\vec{G}\vec{e})^2 + \vec{G}, \quad (6.84)$$

где единичный вектор \vec{e} определяет фиксированное направление в пространстве между неподвижными точками, а поэтому производная по времени от него равна нулю. Дифференцируя коэффициент преломления (6.84), выражение (6.83) приводим к виду:

$$\omega_{c2} = \omega_{c1} F_{12}, \quad (6.85)$$

где

$$F_{12} = \frac{\sqrt{-g_{00_1}}}{\sqrt{-g_{00_2}}} \left\{ 1 - \frac{1}{c} \int_{R_1}^{R_2} \left[\frac{2\dot{\varphi}}{c} + 2(\vec{G}\vec{e})\vec{e} + \vec{G} \right] d\vec{R} \right\} \quad (6.86)$$

– коэффициент гравитационного преобразования частоты электромагнитной волны, или показатель частотной активности гравитационного поля [230, 234]

Этот показатель является индивидуальной характеристикой гравитационного поля. Как уже упоминалось, он не зависит от движения передатчика и приемника и от характеристик преломляющей среды на трассе распространения.

В частности, для статического гравитационного поля с метрикой Шварцшильда (1.42), а также для стационарного поля вращающейся системы с нулевой производной статического и векторного потенциалов ($\dot{\varphi} = \dot{G} = 0$) рассмотренный коэффициент определяется выражением:

$$F_{12} = \frac{\sqrt{-g_{00_1}}}{\sqrt{-g_{00_2}}}. \quad (6.87)$$

Следует заметить, что к выражению (6.85) можно прийти на основе соотношений (6.79), (6.79) и (6.73), приняв, в отсутствие сплошной среды, равенство нулю скоростей источника и приемника волны.

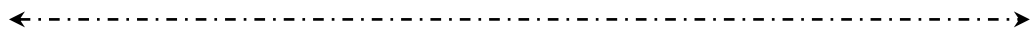
На основе коэффициента преобразования частоты F (6.87) формула (6.82) для принимаемой частоты без потери точности приобретает вид:

$$\omega_{c_2} = F_{12} \omega_{c_1} \frac{\left\{ \left(1 - \frac{g_{0\alpha_1} V_1^\alpha \theta_0}{-g_{00_1} c} \right)^2 - \frac{(V_1 \theta_0)^2}{-g_{00_1} c^2} \right\}^{0.5}}{\left\{ \left(1 - \frac{g_{0\alpha_2} V_2^\alpha \theta_0}{-g_{00_2} c} \right)^2 - \frac{(V_2 \theta_0)^2}{-g_{00_2} c^2} \right\}^{0.5}}, \quad (6.88)$$

$$\cdot \frac{1 - \frac{\vec{n}^{**}(\vec{R}_2)}{c} \theta_0 \vec{V}_2 \vec{e}_2}{1 - \frac{\vec{n}^{**}(\vec{R}_1)}{c} \theta_0 \vec{V}_1 \vec{e}_1 + \frac{\theta_0}{c} \int_{\vec{R}_1}^{\vec{R}_2} \dot{\vec{n}}_{a_1}(\vec{R}) d\vec{R}}$$

где $\dot{\vec{n}}_{a_1}$ – производная коэффициента преломления сплошной среды (атмосферы); $\vec{V}_2 = \vec{V}_2' + \frac{\vec{a}_2 \vec{R}}{c}$; \vec{V}_2' ; \vec{a}_2 – скорость и ускорение приемника на момент излучения радиоволны.

Другая возможность вычисления инвариантной части частотного релятивистского смещения основана на представлении об изменении кинетической энергии фотона при его свободном падении в ньютоновской модели гравитационного поля [2]. При этом считаем, что материальная среда на трассе частоту волны не изменяет.



Энергия фотона массой m_f в некоторой точке траектории равна [1, 2]:

$$E = E_1 \left(1 + \frac{\Delta E}{E_1} \right), \quad (6.89)$$

Здесь E_1 – начальная энергия фотона; ΔE – изменение энергии фотона за счет работы гравитационного поля по перемещению этого фотона из одной точки в другую,

$$\Delta E = m_f \int_R \ddot{\vec{R}} d\vec{R}, \quad (6.90)$$

где $\ddot{\vec{R}}$ – гравитационное ускорение в каждой точке поля. Учитывая, что $m_f = \frac{\hbar\omega}{2\pi c^2}$, $E = \frac{\hbar\omega}{2\pi}$ (\hbar – постоянная Планка), из соотношений (6.89) и (6.90) находим связь между начальной ω_1 и текущей $\omega(R)$ частотами:

$$\omega(R) = \omega_1 \left(1 + \frac{1}{c^2} \int_R \ddot{\vec{R}} d\vec{R} \right). \quad (6.91)$$

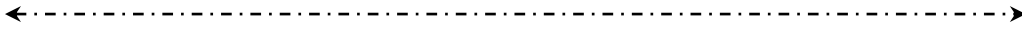
Гравитационное ускорение, или ускорение свободного падения, $\ddot{\vec{R}}_\alpha$ в произвольной системе отсчета определяется через компоненты метрического тензора g_{00} ; $g_{0\alpha}$ и скорость V^β следующим образом [2]:

$$\ddot{\vec{R}}_\alpha = -\frac{\partial\varphi}{dx^\alpha} - c \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{g_{0\alpha}}{\sqrt{-g_{00}}} \right) + 2M_{\alpha\beta} V^\beta, \quad (6.92)$$

где φ – статический гравитационный потенциал;

$$M_{\alpha\beta} = \frac{c}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\frac{g_{0\alpha}}{\sqrt{-g_{00}}} \right) - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{g_{0\beta}}{\sqrt{-g_{00}}} \right) \right]. \quad (6.93)$$

Физическую сущность последнего члена выражения (6.93) установим применительно к равномерно вращающейся системе отсчета, в которой $g_{0\alpha} \approx G_\alpha = \frac{1}{c} [\vec{\Omega}\vec{R}]_\alpha$. Вычисления дают тензор с компонентами:



$$M_{\alpha\beta} = 2 \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.94)$$

Поскольку речь идет о распространении света, то $V^\alpha = ce^\alpha$. В результате имеем:

$$\ddot{R}_\alpha^* = 2cM_{\alpha\beta}e^\alpha = 2c[\vec{\Omega}\vec{e}]_\alpha, \quad (6.95)$$

что представляет собой компонент Кориолисова ускорения. Поскольку это ускорение направлено перпендикулярно к лучу, то $\int_R \ddot{R}_\alpha^* dx^\alpha = 0$, т.е.

сила Кориолиса энергии фотона не изменяет. Учитывая это замечание, из соотношений (6.91) и (6.92), пренебрегая членами высоких порядков, приходим к соотношению (6.85) [79], где коэффициент F определяется соотношением:

$$F = 1 - \frac{\varphi(R) - \varphi_1}{c^2} - \frac{1}{c} \int_R \dot{\vec{G}} d\vec{R}. \quad (6.96)$$

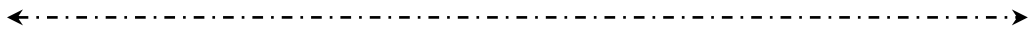
Если учесть, что статический потенциал $\varphi = \frac{c^2}{2}(g_{00} + 1)$, то полученное выражение с точностью до членов, содержащих $1/c^3$, согласуется с выражением (6.86), а для статического поля в точности совпадает с выражением (6.87).

6.5.3. Релятивистское смещение собственной частоты радиоволны вдоль трассы распространения

Релятивистскую разность собственных циклических частот электромагнитной волны вдоль трассы распространения, в частности, между точкой приема (1) и точкой излучения (2), вычислим на основе соотношения (6.73):

$$\frac{\Delta f}{f_1} = \frac{f_2 - f_1}{f_1} = \frac{\theta_1}{\theta_2} \frac{dt_1}{dt_2} - 1, \quad (6.97)$$

где коэффициенты преобразования шкал времени θ_1 ; θ_2 определяются соотношением (6.75), а отношение координатных интервалов времени dt_1 / dt_2 – формулой (6.81).



Полученное соотношение учитывает не только релятивистские смещения, но и смещения, вызванные эффектом Доплера I порядка. Чтобы выделить для последующего анализа только релятивистскую часть, рассмотрим с помощью этой формулы случай распространения радиоволн в статическом гравитационном поле ($G = 0$) в вакууме ($n = 1$) между неподвижными источником и приемником волны ($V = 0$). В результате имеем:

$$\frac{\Delta f_P}{f_1} = \frac{f_2 - f_1}{f_1} = \frac{\theta_1}{\theta_2} - 1. \quad (6.98)$$

Используя выражения для коэффициентов преобразования для данного случая $\theta_i = \sqrt{-g_{00_i}} \approx 1 - \frac{\varphi_i}{c^2}$; $i = 1; 2$, релятивистское смещение представляем в виде:

$$\frac{\Delta f_P}{f_1} = \frac{f_2 - f_1}{f_1} \approx \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{c^2}. \quad (6.99)$$

Если волна распространяется в гравитационном поле Земли сверху вниз, от точки с меньшим потенциалом ($\varphi_{e1} = \mu_e / \rho_1$) к точке с увеличенным потенциалом ($\varphi_{e2} = \mu_e / \rho_2$), то $\frac{f_2 - f_1}{f_1} \approx \mu_e \frac{\rho_1 - \rho_2}{c^2 \rho_1 \rho_2} > 0$, откуда следует, что $f_2 > f_1$. Таким образом, при «падении» сверху вниз электромагнитная волна испытывает «фиолетовое» частотное смещение.

Для волны обратного направления, т.е. при распространении вверх, когда в точке приема 2 потенциал меньше, чем в точке излучения 1 т.е. $\varphi_2 - \varphi_1 < 0$, имеем $f_2 < f_1$, или «красное» смещение частоты волны.

Если же световой луч распространяется с поверхности Солнца (точка излучения 1 с потенциалом φ_{s1}) и фиксируется на поверхности Земли (точка 2 с потенциалом $\varphi_{e2} < \varphi_{s1}$), то $f_2 < f_1$. Т.е. световой луч, принимаемый на Земле, испытывает частотное смещение в «красную» сторону спектра, что и было обнаружено экспериментально [16, 68].

Вообще говоря, релятивистское соотношение частот одной и той же электромагнитной волны в точках с разным гравитационным потенциалом *не зависит от направления ее распространения*. Соотношение (6.73) устанавливает связь между частотами в двух точках волны вне зависимости от направления ее движения. Оно справедливо, в том числе и для стоячей волны, создаваемой между двумя точками с разными гравитационными потенциалами. Поэтому при любом направлении волны между двумя точками в гравитационном поле Земли в точке с меньшим потенциалом (дальше от Земли) частота волны будет меньше, а в точке с увеличенным потенциалом (ближе к Земле) – частота больше.

Здесь следует обратиться к результатам предыдущих исследований релятивистского изменения частоты задающих генераторов атомных часов в гравитационном поле (раздел 3.1.1). Используя (3.17), формулу для релятивистской разности частот задающих генераторов, размещенных в точках 1 и 2, получаем в виде (индекс *m* опускаем):

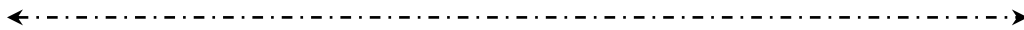
$$\frac{\Delta f_P^0}{f_1^0} = \frac{f_2^0 - f_1^0}{f_1^0} = \frac{\theta_2}{\theta_1} - 1 \approx -\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{c^2}, \quad (6.100)$$

где индекс «0» обозначает частоту и разность частот задающих генераторов.

Если сравнить формулы (6.99) и (6.100), то можно сделать следующий вывод: частота задающего генератора часов при поднятии их на некоторую высоту увеличивается, а частота электромагнитной волны, распространяющейся между нижними и верхними измерительными часами, наоборот, в верхней точке уменьшается.

Увеличение частоты орбитальных задающих генераторов атомных часов ГНСС ГЛОНАСС и GPS проверено экспериментально и этот факт используется в практике эксплуатации этих космических навигационных систем. Как отмечено в разделе 4, для повышения точности навигации релятивистское увеличение частоты задающего генератора бортовых часов ГНСС ГЛОНАСС и GPS компенсируется с помощью специальной поправки.

С другой стороны, гравитационное уменьшение частоты электромагнитной волны с высотой, как отмечено выше (см. раздел 1.3.3.3), также многократно и успешно подтверждено экспериментами (см., например [16, 68,97]).



**6.6. Фазовая и групповая скорости распространения
электромагнитных волн в изотропных средах,
движущихся в гравитационном поле**

6.6.1. Фазовая скорость волны в изотопной среде

Поскольку фаза волны (6.1) является инвариантом к выбору системы отсчета, то для координатного времени t и координатной частоты ω_k с учетом определения волнового вектора $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{n}^*$ она определяется в виде:

$$d\Phi = \omega_k dt - \vec{k} d\vec{\delta} = \omega_k dt - \frac{\omega_k}{c} \vec{n}^* d\vec{\delta}, \quad (6.101)$$

где \vec{k} – волновой вектор; $d\vec{\delta}$ – элемент пространственной длины, квадрат которого определяется трехмерным пространственным метрическим тензором $\gamma_{\alpha\beta}$ формулой (3.35); \vec{n}^* – эффективный коэффициент преломления движущейся среды в гравитационном поле, который определяется соотношением (5.78).

Отсюда для точки волны с постоянной фазой ($\Phi = \text{const}$) получаем соотношение:

$$d\vec{\delta} = \frac{\omega_k}{k} dt = \frac{c}{\vec{n}^*} dt. \quad (6.102)$$

Таким образом, плоскости постоянной фазы перемещаются с фазовой «координатной» скоростью, измеряемой в единицах координатного времени:

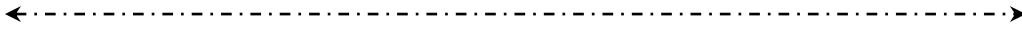
$$\vec{V}_\Phi^k = \frac{c}{\vec{n}_k^*}, \quad (6.103)$$

где

$$\vec{n}_k^* = \vec{n}^* = \frac{n\vec{e}}{\sqrt{-g_{00}}} + \frac{\vec{G}}{(-g_{00})} - \frac{n^2 - 1}{c} \vec{V}$$

– «координатный» коэффициент преломления волны, определяемый из (5.78).

Фазовую скорость, выраженную в единицах собственного времени, получим путем перехода в соотношении (6.101) от координатных величин ω и t к собственным, в соответствии с формулами (6.70) и (6.72). Учитывая, что фаза инвариантна к выбору системы отсчета, запишем



$$d\Phi = \omega_k dt - \frac{\omega_k}{c} \vec{n}_k^* \overline{d\delta} = \omega_k dt - \frac{\omega_{c_0}}{\vec{V}_\Phi^c} \overline{d\delta}. \quad (6.104)$$

Здесь ω_{c_0} – собственная частота, измеренная в единицах собственного времени некоторой выделенной точки j (чаще всего источника волны);

$$\vec{V}_\Phi^c = \frac{c}{\vec{n}_c^*} \quad (6.105)$$

– собственная (действительная) фазовая скорость волны;

$$\vec{n}_c^* = \vec{n}_k^* \theta \quad (6.106)$$

– «собственный», или действительный коэффициент преломления среды, измеренный прибором, движущимся относительно начала системы отсчета; θ_j – коэффициент преобразования шкал времени, определяемый соотношением (6.71).

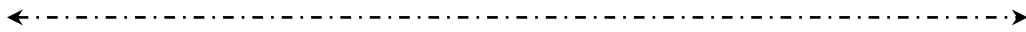
Если прибор, измеряющий скорость, покоится относительно начала координат ($V_j = 0$), то последнее соотношение упрощается:

$$\vec{n}_c^* = \sqrt{-g_{00}^0} \left(\frac{n\vec{e}}{\sqrt{-g_{00}}} + \frac{\vec{G}}{-g_{00}} - \frac{n^2 - 1}{c} \vec{V} \right). \quad (6.107)$$

Если параметры волны измеряются прибором, находящимся вблизи измерительного участка в среде, длина которого такова, что изменением компонента метрического тензора g_{00} на нем можно пренебречь (т.е. $g_{00}^0 = g_{00}$), то пренебрегая малыми членами, получаем:

$$\vec{n}_{co}^* = n\vec{e} + \frac{\vec{G}}{\sqrt{-g_{00}}} - \frac{n^2 - 1}{c} \vec{V}. \quad (6.108)$$

Полученный результат свидетельствует о том, что при $\vec{G} = \vec{V} = 0$ скорость волны в окрестностях измерителя всегда равна c/n , в вакууме равна c . Отличие фазовой скорости от этой фундаментальной постоянной будет лишь на протяженных трассах, где разницей между $\sqrt{-g_{00}^0}$ и $\sqrt{-g_{00}}$ нельзя пренебречь. Указанное обстоятельство и учитывается соотношением (6.107).



Полагая, что $\frac{V}{c}$, $G \ll n-1$, формулу (6.103), на основе соотношения ((6.108), представляем в виде:

$$\vec{V}_\Phi^c = \left\{ \frac{c}{n} - \frac{c}{n^2} \vec{G}\vec{e} + \alpha \vec{V}\vec{e} \right\} \vec{e}, \quad (6.109)$$

где $\alpha = 1 - \frac{1}{n^2}$ – коэффициент увлечения Френеля.

Вне гравитационного поля ($g_{00} = -1$; $G = 0$) формула (6.109) сводится к классической формуле Френеля [2]:

$$V_\Phi = \frac{c}{n} + \alpha \vec{V}\vec{e}. \quad (6.110)$$

Существенная особенность формулы (6.109) заключается в том, что составляющая скорости, вызванная пространственно-временным компонентом метрического тензора, зависит от коэффициента преломления среды n . Из этой формулы также следует, что система отсчета с $G \neq 0$ (как и при движении преломляющей среды вдоль луча) обладает существенной анизотропией: разница в скоростях распространения встречных лучей составляет величину

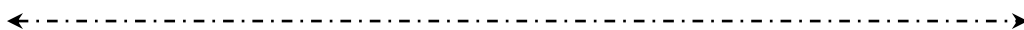
$$\Delta V_\Phi = \frac{2c}{n^2} \vec{G}\vec{e}.$$

Для равномерно вращающейся системы:

$\left(\vec{G} = \frac{1}{c} [\vec{\Omega}\vec{R}] \right) \Delta V_\Phi = \frac{2}{n^2} [\vec{\Omega}\vec{R}]\vec{e}$. Вместе с тем, это еще не значит, что если во вращающейся системе две волны от одного источника распространяются в средах с разными преломляющими свойствами на одинаковое расстояние, то фазовые сдвиги, вызванные вращением, будут разными.

6.6.2. Групповая скорость волны в изотропной среде

Групповую скорость распространения волн найдем путем дифференцирования общего дисперсионного соотношения (5.72) при условии, что проводимость среды равна нулю, а остальные члены при мнимой единице пренебрежимо малы. В результате групповая скорость, выраженная в единицах координатного времени, определяется общим выражением вида:



$$\vec{V}_\Gamma^k = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} \approx \frac{c}{n} \sqrt{-g_{00}} \vec{e} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \vec{V} - \frac{c\vec{G}}{n^2}. \quad (6.111)$$

Соответствующая групповая скорость, измеренная в единицах собственного времени в данной системе отсчета, определится из соотношения

$$\vec{V}_\Gamma^c = \frac{d\vec{R}}{d\tau} = \vec{V}_\Gamma^k \frac{1}{\theta_j}, \quad (6.112)$$

где коэффициент преобразования собственного времени θ_j , как и для фазовой скорости, определяется соотношением (6.71).

В частном случае системы отсчета, сопутствующей измерительным часам ($V_0 = 0$) при $V, Gc \ll c$ находим:

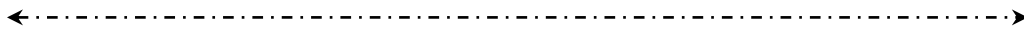
$$\vec{V}_\Gamma^c = \frac{\vec{V}_\Gamma^k}{\sqrt{-g_{00}^0}} \approx \sqrt{\frac{-g_{00}}{-g_{00}^0}} \frac{c}{n} \vec{e} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \vec{V} - \frac{c\vec{G}}{n^2}. \quad (6.113)$$

Таким образом, групповая скорость представляет собой геометрическую сумму трех векторов: фазовой скорости в неподвижной среде, скорости среды и пространственно-временного потенциала \vec{G} выбранной системе отсчета. Это принципиально отличает полученный результат от выражения для фазовой скорости, когда складываются лишь проекции на направление луча $\frac{\vec{k}}{k} = \vec{e}$. Это свидетельствует о том, что вектор групповой скорости в общем случае направлен не вдоль нормали к волновому фронту. Такая ситуация будет не только в движущейся преломляющей среде, но и в гравитационном поле в вакууме. Полагая в выражениях (6.111) и (6.112) $n = 1$, получаем:

$$\vec{V}_\Gamma^c = c\vec{e} - \frac{c\vec{G}}{\sqrt{g_{00}}}, \quad (6.114)$$

что, как и следовало ожидать, совпадает с фазовой скоростью (6.109) в вакууме.

Полученные выше формулы для групповой скорости в движущейся недиспергирующей среде обобщают известные результаты на случай стационарного гравитационного поля.



6.7. Скорость волны в диспергирующих средах, движущихся в гравитационном поле

6.7.1. Фазовая скорость в диспергирующей среде

Диэлектрическая и магнитная проницаемости прозрачной среды в общем случае зависят от частоты и волнового вектора, что определяет частотную и пространственную дисперсию. В последнем случае эти характеристики зависят от направления движения волны в среде. В результате и коэффициент преломления среды также зависит от тех же аргументов:

$$n = n(\omega, \vec{k}). \quad (6.115)$$

Характер волнового процесса в диспергирующей изотропной среде в любых гравитационных полях описывается полученными в разделе 5 волновыми уравнениями и дисперсионными соотношениями.

Если приращения частоты $\Delta\omega$ и волнового вектора $\Delta\vec{k}$ невелики, то последнее соотношение можно представить в приближенном виде:

$$\vec{n}(\omega, \vec{k}) = n_0 + \frac{\partial n}{\partial \omega} \Delta\omega + \frac{\partial n}{\partial \vec{k}} \Delta\vec{k}, \quad (6.116)$$

где $\frac{\partial n}{\partial \omega}$ и $\frac{\partial n}{\partial \vec{k}}$ – коэффициенты частотной и пространственной дисперсии среды, покоящейся в инерциальной системе отсчета; n_0 – коэффициент преломления на частоте ω_0 .

Чтобы установить основные свойства соотношения (6.116), ограничимся пока случаем движения среды в инерциальной системе. При этом в системе координат, где среда движется со скоростью \vec{V} , постоянные ε, μ, n будут зависеть от аргументов [213]:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\omega &= \Gamma(\omega - \vec{k}\vec{V}) - \omega, \\ \Delta\vec{k} &= \vec{V} \frac{(\vec{k}\vec{V})(1 - \Gamma^{-1}) - \omega \frac{V^2}{c^2}}{V^2 \Gamma^{-1}}. \end{aligned} \right\} \quad (6.117)$$

Ограничиваясь здесь и далее рассмотрением сред с нулевой пространственной дисперсией $\left(\frac{\partial n}{\partial \vec{k}} = 0\right)$, вместе с тем можно установить, что коэффициент преломления среды (6.116), в силу соотношения (6.117), даже при наличии только частотной дисперсии зависит от аргумента $\vec{k}\vec{V}$. Пространственную дисперсию такого вида, вызванную движением среды, можно определить как конвективную пространственную дисперсию, и на нее впервые было указано Столяровым [228]. Поскольку в гравитационном поле, согласно соотношению (6.82), частота волны зависит от направления распространения, то можно предположить наличие конвективной пространственной дисперсии чисто гравитационного происхождения.

Как и для недиспергирующей среды, введем в рассмотрение «координатные» и «собственные» фазовые скорости и коэффициенты преломления, подобные определяемым формулами (6.103) и (6.105).

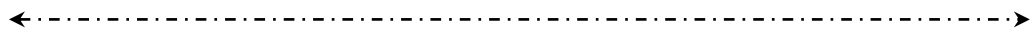
В них уже следует различать координатный и собственный коэффициенты преломления покоящейся среды:

$$\left. \begin{aligned} n_k &= \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}} \left(n_o + \frac{\partial n}{\partial \omega_k} \Delta \omega_k \right), \\ n_c &= \frac{\theta_0}{\sqrt{-g_{00}}} \left(n_o + \frac{\partial n}{\partial \omega_c} \Delta \omega_c \right), \end{aligned} \right\} \quad (6.118)$$

где $\frac{\partial n}{\partial \omega_c}$ и $\frac{\partial n}{\partial \omega_k}$ – координатный и собственный коэффициенты частотной дисперсии среды; n_o – коэффициент преломления на собственной частоте спектрального измерительного прибора.

Используя выражение для коэффициента преломления покоящейся диспергирующей среды (6.118), на основе (5.78) найдем координатный и собственный коэффициенты преломления движущейся диспергирующей среды в гравитационном поле:

$$\left. \begin{aligned} \vec{n}_k^* &\approx \frac{\vec{e}}{\sqrt{-g_{00}}} \left(n_o + \frac{\partial n}{\partial \omega} \Delta \omega \right) + \frac{\vec{G}}{-g_{00}} - \frac{n_o^2 - 1}{c} \vec{V}, \\ n_c^* &= \theta_0 n_k^*. \end{aligned} \right\} \quad (6.119)$$



Используя соотношения (6.119), на основе соотношений (6.79) – (6.82) нетрудно получить формулу для частоты в диспергирующей среде и вычислить входящий в эту формулу частотный сдвиг $\Delta\omega$.

В простейшем случае источником частотного смещения является эффект Доплера I порядка. Рассмотрим случай, когда среда связана с движущимся приемником. Это соответствует реальной ситуации, когда атмосфера в невращающейся земной системе отсчета ICRS движется вместе с наземным приемником 1 и его скорость равна скорости перемещения среды: $V_1 = V$. Пенебрегая в формуле (6.88) всеми незначительными частотными сдвигами, кроме доплеровского, находим смещение частоты радиоволны в среде (атмосфере) со средним коэффициентом преломления n_0 :

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_0 = \frac{\omega_0 n_0}{c} \vec{V} \vec{e} - \frac{\omega_0}{c} \vec{V}_2 \vec{e}, \quad (6.120)$$

где принято $\omega_1 = \omega_0$.

Используя соотношения (6.120), из (6.119) находим выражение для коэффициента преломления диспергирующей среды, движущейся во вращающейся системе отсчета (членами порядка $1/c^2$ пренебрегаем):

$$\vec{n}_k^* \approx \vec{n}_0 + \vec{G} + \left(\frac{n_0 \omega_0}{c} \frac{\partial n}{\partial \omega} - \frac{n_0^2 - 1}{c} \right) \vec{V} - \frac{\omega_0}{c} \frac{\partial n}{\partial \omega} \vec{V}_2. \quad (6.121)$$

Отсюда, в соответствии с (6.103), находим выражение для фазовой скорости волны в диспергирующей среде:

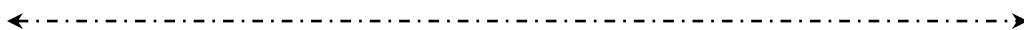
$$\vec{V}_\Phi = \left\{ \frac{c}{n_0} - \frac{c}{n_0^2} \vec{G} \vec{e} + \left(\frac{n^2 - 1}{n^2} - \frac{\omega_0}{n_0} \frac{\partial n}{\partial \omega} \right) \vec{V} + \omega_0 \frac{\partial n}{\partial \omega} \vec{V}_2 \vec{e} \right\} \frac{\vec{k}}{k}. \quad (6.122)$$

Формулы (6.121) и (6.122) обобщают известные результаты [213] на случай движения среды в неинерциальной системе отсчета.

6.7.2. Групповая скорость волны в диспергирующей среде

Групповую скорость распространения волны в непроводящей диспергирующей среде найдем из дисперсионного соотношения (5.72).

Пренебрегая членами вида $G^2, G \frac{V}{c}$ и $\frac{V^2}{c^2}$, что соответствует условиям работы реальных измерительных систем, а также членом с мнимой единицей, это соотношение представим в виде:



$$\vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\eta}{c^2} (\omega^2 - 2\omega\vec{V}\vec{k}) - \frac{2\omega}{c} \vec{G}\vec{k} = 0, \quad (6.123)$$

где $\eta = n^2 - 1$, причем коэффициент преломления, в силу соотношения (6.115), характеризуется частотной и конвективной пространственной дисперсией (пространственной дисперсией в покоящейся среде, согласно сделанному ранее условию, пренебрегаем). Отсюда находим:

$$\vec{V}_\Gamma = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} = c \frac{\vec{k} + \frac{\omega}{c} \left(\eta \frac{\vec{V}}{c} - \vec{G} \right) - \frac{\omega^2 - 2\omega\vec{k}\vec{V}}{2c^3} \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} \frac{\partial \eta}{\partial k}}{\frac{\omega}{c} + \eta \frac{\omega}{c} + \vec{k} \left(\vec{G} - \eta \frac{\vec{V}}{c} \right) + \frac{\omega^2 - 2\omega\vec{k}\vec{V}}{2c^2} \frac{\partial \eta}{\partial k}}. \quad (6.124)$$

Таким образом, групповая скорость имеет четыре слагаемых, одно из которых направлено вдоль волнового вектора $\vec{k} = k\vec{e}$, второе – по вектору скорости среды \vec{V} , третье – по векторному гравитационному потенциалу \vec{G} и четвертое – по градиенту функции η . Можно предположить, что последнее слагаемое будет направлено по выделенным направлениям: \vec{k}, \vec{G} или \vec{V} . Однако точный ответ можно получить лишь в результате анализа градиента $\partial \eta / \partial \vec{k}$.

Особый интерес представляет распространение волн в движущихся средах, коэффициент преломления которых в системе покоя имеет вид:

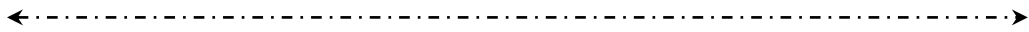
$$n^2 = 1 - \frac{C_a}{\omega^2}, \quad (6.125)$$

где $C_a = const$. Этот коэффициент описывает электрические свойства холодной немагнитной плазмы, каковой является, в частности, ионосфера. Поскольку из выражения (6.125) в результате дифференцирования следует, что

$$\frac{\omega_0}{n_0} \frac{\partial n}{\partial \omega} + \frac{n^2 - 1}{n^2} = 0,$$

из формулы (6.122) получаем:

$$\vec{V}_\Phi = \left[\frac{c\omega}{\sqrt{\omega^2 + C_a}} \left(1 + \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + C_a}} \right) \vec{G}\vec{e} \right] \vec{e} = \frac{c\vec{e}}{n} \left(1 - \frac{\vec{G}\vec{e}}{n} \right). \quad (6.126)$$



Таким образом, в среде с заданным коэффициентом преломления (6.125) фазовая скорость совершенно не зависит от скорости движения среды, однако зависимость от векторного гравитационного потенциала \vec{G} остается.

Отсюда нетрудно найти приближенное выражение для фазового коэффициента преломления ионосферы во вращающейся системе отсчета:

$$n_{\phi}^{**} \approx n \left(1 + \frac{\vec{G} \vec{e}}{n} \right) = n + \vec{G} \vec{e}, \quad (6.127)$$

где n определен соотношением (6.125). Как и следовало ожидать, добавка, определяемая векторным потенциалом гравитационного поля, от преломляющих свойств ионосферы не зависит.

Для вычисления групповой скорости обратимся к дисперсионному соотношению (6.123), где величина $\eta = n^2 - 1 = \frac{C_a}{\omega_V^2}$ должна быть

вычислена через частоту волны в движущейся среде ω_V . Для определения частоты в движущейся диспергирующей среде воспользуемся приближенным соотношением (6.120). Связав начало системы координат с источником волны, когда $V_1 = 0$, положив $\vec{V}_2 = \vec{V}$ (скорость среды), формулу (6.120) получим в виде:

$$\omega_V = \omega - \vec{k} \vec{V},$$

где $\vec{k} \approx \frac{\omega n_0}{c} \vec{e}$. Эта формула известна в электродинамике движущихся сред, она приближена в том смысле, что в ней учтен лишь эффект первого порядка по $1/c$. Подставляя выражение $\eta \approx \frac{C_a}{(\omega - \vec{k} \vec{V})^2}$ в (6.123) и

отбрасывая величины второго порядка по $1/c$, получаем дисперсионное соотношение в виде:

$$\vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{2\omega}{c} \vec{G} \vec{k} = \frac{C_a}{c^2}. \quad (6.127)$$

В результате дифференцирования получаем

$$\vec{V}_\Gamma = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} = \frac{\vec{k} - \frac{\omega}{c} \vec{G}}{\frac{\omega}{c^2} + \frac{\vec{G}\vec{k}}{c}}. \quad (6.128)$$

Выражение для \vec{k} найдем из (6.127):

$$\vec{k}_{1,2} = \frac{\omega}{c} \vec{G} \pm \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 G^2 + \omega^2 + C_a}.$$

Подставляя первое из этих решений в предыдущее выражение и пренебрегая членами, содержащими \vec{G}^2 , получаем:

$$\vec{V}_\Gamma = \frac{c\vec{e}}{\omega} \sqrt{\omega^2 + C_a} - c \frac{\omega^2 + C_a}{\omega^2} \vec{G} = cn\vec{e} (1 - n\vec{G}\vec{e}). \quad (6.129)$$

Таким образом, и у групповой скорости при заданном коэффициенте преломления (6.125) остается зависимость лишь от \vec{G} , а зависимость от скорости среды исчезает.

Отсюда следует выражение для группового коэффициента преломления ионосферы во вращающейся системе отсчета:

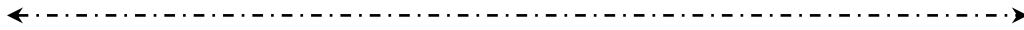
$$n_r^{**} = \frac{1}{n} (1 + n\vec{G}\vec{e}) = \frac{1}{n} + \vec{G}\vec{e},$$

где также нет зависимости релятивистской добавки от свойств среды, что еще раз подчеркивает ее фундаментальные свойства.

Произведение фазовой и групповой скоростей (6.126) и (6.129) выглядит следующим образом:

$$\vec{V}_\Gamma \vec{V}_\Phi = c^2 \left(1 - \frac{\vec{G}\vec{e}}{n} \right) (1 - n\vec{G}\vec{e}) = c^2 \left(1 - \frac{\vec{G}\vec{e}}{n} - n\vec{G}\vec{e} + G^2 \right). \quad (6.130)$$

При $G=0$ отсюда следует известное из теории распространения радиоволн в холодной плазме выражение $\vec{V}_\Gamma \vec{V}_\Phi = c^2$ [227].



6.8. Фаза волны в гравитационном поле

В качестве исходного соотношения используем соотношение (6.3), которое представим в виде:

$$d\Phi = \omega_k dt - \frac{\omega_k}{c} \vec{n}^{**} d\vec{R}, \quad (6.131)$$

где \vec{n}^{**} – обобщенный коэффициент преломления гравитационного поля (6.9).

Переходя далее к собственной частоте приемника ω_{c_2} в соответствии с формулой перехода (6.72), получаем:

$$\Delta\Phi = \omega_2 \Delta\tau_2 - \frac{\omega_{c_2} \theta_2}{c} \int_{\vec{R}_1}^{\vec{R}_2} \vec{n}^{**} d\vec{R}. \quad (6.132)$$

Принимаемое колебание гетеродинирует с опорным колебанием приемника с частотой ω_{c_2} и фазой $\Delta\psi = \omega_{c_2} \Delta\tau_2$. Разность фаз в результате определяется лишь полным фазовым набегом на трассе волны:

$$\Delta\psi = - \frac{\omega_{c_2} \theta_2}{c} \int_{\vec{R}_1}^{\vec{R}_2} \vec{n}^{**} d\vec{R}. \quad (6.133)$$

Полученное соотношение приобретает законченный вид при выборе системы отсчета, вычислении коэффициента преобразования времени θ_2 (6.75), обобщенного коэффициента преломления «гравитационной среды» (6.9) применительно к этой системе, а также при выборе трассы распространения волны.

←----->

6.9. Выводы к разделу 6

Оптическая модель гравитационного поля с заполняющей движущейся сплошной средой характеризуется следующими показателями [229–234]:

1) обобщенным коэффициентом преломления пространства-времени, как оптически плотной среды распространения электромагнитных волн (6.9);

2) показателем релятивистской рефракции, в частности, показателем рефракции во вращающейся системе отсчета (6.47);

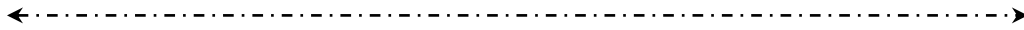
3) показателем градиента угла поворота плоскости поляризации электромагнитной волны в гравитационном поле (6.58);

4) коэффициентом гравитационного преобразования частоты электромагнитной волны, или показателем частотной активности гравитационного поля (6.86).

На основе перечисленных показателей легко определяются практически все релятивистские характеристики процесса распространения электромагнитных волн в гравитационном поле:

- угол рефракции радиолуча;
- время распространения волны;
- частота волны вдоль трассы;
- фаза волны вдоль трассы распространения;
- угол поворота плоскости поляризации;
- фазовая и групповая скорости распространения как в изотропной, так и в анизотропной среде.

Вычисляя показатели оптических свойств гравитационного поля один раз для наперед заданной системы отсчета с известными метрическими свойствами, можно свести задачу исследования параметров любого радио- или оптического луча в этой системе к обычной задаче распространения волн в преломляющей среде. Методы прикладных задач такого типа в настоящее время разработаны достаточно глубоко как для радиоволн, так и для оптических волн.



7. ПАРАМЕТРЫ РАДИОВОЛН В ГЕОЦЕНТРИЧЕСКОЙ ЗЕМНОЙ СИСТЕМЕ ОТЧЕТА ITRS

7.1. Оптические характеристики гравитационного поля и атмосферы в системе ITRS

7.1.1. Показатель преломления заполненного сплошной средой околоземного пространства-времени в ITRS

Как отмечалось в разделе 2.3.1, в качестве возможных реализаций общего класса геоцентрических земных систем отсчета, вращающихся вместе с Землей (GTRS), в практике космической навигации и геодезии используются геодезическая система координат WGS-84, система геодезических параметров «Параметры Земли ПЗ-90.11», а также Международная земная система отсчета ITRS (*International Terrestrial Reference System*). Международным астрономическим союзом последняя из перечисленных систем представляется как предпочтительная GTRS для научных и технических приложений и рекомендуется для определения положения на Земле. Ответственность за реализацию, использование и продвижение системы ITRS возложена на Международную службу вращения Земли и опорных систем отсчета IERS.

Рассмотрим обобщенный коэффициент преломления околоземного пространства-времени в системе ITRS как оптически плотной среды распространения электромагнитных волн для двух случаев:

- при распространении радиоволн в наземно-космических измерительных радиоприемниках, пересекающих сплошную материальную среду – атмосферу. Один конец таких радиоприемников размещен на Земле (передатчик или приемник);
- при распространении оптических волн в глобальных наземных волоконно-оптических измерительных линиях, представляющих радиоприемники, полностью заполненные сплошной преломляющей материальной средой.

В каждом из этих случаев сплошная среда распространения неподвижна, т.е. в последующих формулах полагаем $V_a = 0$.

В связи с изложенным, обобщенный координатный коэффициент преломления, определяемый формулой (6.9), представим в виде:

$$\overset{-**}{n} = \overset{-*}{n} \sqrt{\frac{\gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta}{dx^\alpha dx^\beta}} = \overset{-*}{n} \frac{d\delta}{dl}, \quad (7.1)$$

←----->
 где фазовый коэффициент преломления, определяющий фазовую скорость распространения радиоволн или оптических волн, с учетом сделанного замечания следует из формулы (5.78):

$$\vec{n}^* = \frac{n}{\sqrt{-g_{00}}} \vec{e} + \frac{\vec{G}}{-g_{00}}, \quad (7.2)$$

$$d\delta = \sqrt{\gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta} = \left[1 + \frac{\varphi}{c^2} + \frac{1}{2} (\vec{G}\vec{e})^2 \right] dR \quad (7.3)$$

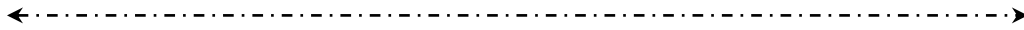
– пространственный элемент длины в выбранной системе отсчета ITRS (3.37), определяемый трехмерным метрическим тензором $\gamma_{\alpha\beta}$;

$dR = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ – координатный элемент длины.

Кстати сказать, в невращающейся геоцентрической небесной системе отсчета ICRS скорость движения атмосферы определяется линейной скоростью вращения Земли и на экваторе $V_a = 465$ м/с.

Для наиболее общего случая неравномерно вращающейся Земли компоненты метрического четырехмерного тензора g_{ik} и трехмерного метрического тензора $\gamma_{\alpha\beta}$, входящие в формулы (7.1) и (7.2), определяются соотношениями (2.97) и (2.99). Поскольку речь идет о времени распространения радиоволн в пределах геостационарной орбиты не более 0,3 секунды, а параметры поля Земли в ITRS из-за неравномерности изменяются мало, то влиянием неравномерности вращения, а именно составляющими скорости вращения Земли, кроме $\Omega_0 = \Omega_z$, можно пренебречь, положив в (2.91) $\Omega_x = \Omega_y = \Delta\Omega_z = 0$. В результате тензоры (2.97) и (2.99) имеют компоненты:

$$\left. \begin{aligned} g_{00} &= - \left(1 - \frac{2\varphi}{c^2} - G_\alpha G^\alpha \right), g_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 + \frac{2\varphi}{c^2}, & \alpha = \beta, \\ 0, & \alpha \neq \beta, \end{cases} \\ g_{0\alpha} &= G_\alpha = \frac{[\vec{\Omega}\vec{R}]_\alpha}{c} \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2} \right), G_1 = -\frac{\Omega_z y}{c} \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2} \right), G_2 = \frac{\Omega_z x}{c} \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2} \right). \end{aligned} \right\}$$



$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2} + G_1^2\right), \quad \gamma_{22} = \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2} + G_2^2\right), \\ \gamma_{33} &= \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right), \quad \gamma_{12} = \gamma_{21} = G_1 G_2, \end{aligned} \quad (7.4)$$

где суммарный скалярный гравитационный потенциал φ , определяемый суммой потенциалов поля Земли φ_e , а также приливными потенциалами Луны $\Delta\varphi_M$ и Солнца $\Delta\varphi_S$, определяется формулой (2.52). Потенциал Земли определяется формулами разложения по сферическим функциям (2.54) – (2.56).

Используя приведенные компоненты метрического тензора и выражение (7.3), коэффициенты (7.2) и (7.1) получаем в виде [229–233]:

$$\vec{n}^* = n_a \left(1 + \frac{\varphi}{c^2} + \frac{G^2}{2}\right) \vec{e} + \vec{G} \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2} + G^2\right), \quad (7.5)$$

$$\vec{n}^{**} = n_a \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2} + \frac{G^2}{2} + \frac{1}{2}(\vec{G}\vec{e})^2\right) \vec{e} + \vec{G} \left(1 + \frac{3\varphi}{c^2} + G^2 + \frac{1}{2}(\vec{G}\vec{e})^2\right). \quad (7.6)$$

Пренебрегая малыми членами, получаем окончательные пригодные для практического применения выражения для фазового коэффициента преломления и обобщенного коэффициента преломления околоземного пространства в системе ITRS:

$$n^* = 1 + \Delta n_a + \left\{ \frac{\varphi}{c^2} + \frac{[\vec{\Omega R}]^2}{2c^2} \right\} + \frac{1}{c} [\vec{\Omega R}] \vec{e}, \quad (7.7)$$

$$n^{**} = 1 + \Delta n_a + \left\{ \frac{2\varphi}{c^2} + \frac{[\vec{\Omega R}]^2}{2c^2} + \frac{1}{2c^2} ([\vec{\Omega R}] \vec{e})^2 \right\} + \frac{1}{c} [\vec{\Omega R}] \vec{e}. \quad (7.8)$$

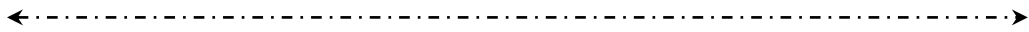
Здесь коэффициент преломления атмосферы Земли или оптического волокна представлен в виде $n_a = 1 + \Delta n_a$, где $\Delta n \ll 1$.

←----->

В полученных формулах члены Δn_a определяют классические преломляющие свойства атмосферы. Для тропосферы $\Delta n_{тр} = 10^{-3} - 10^{-4}$, для ионосферы $\Delta n_{ион} = 10^{-5} - 10^{-6}$. Тропосфера является изотропной неоднородной преломляющей средой, поскольку ее коэффициент изменяется с высотой. По этой причине оптические и радиолучи претерпевают в этой среде рефракцию. Ионосфера в общем случае является средой анизотропной и неоднородной, причем одна и другая характеристика сильно зависят от частоты электромагнитной волны. Радиоволны в ионосфере также претерпевают заметную рефракцию и дополнительную задержку, зависящую от частоты.

Все члены в фигурных скобках обладают неоднородностью и не зависят от частоты. Чисто гравитационная составляющая имеет величину, которая максимальна у поверхности Земли: при $R = 6,4 \cdot 10^6$ м имеем $2\varphi_3/c^2 \approx 1,4 \cdot 10^{-9}$. Составляющие, пропорциональные Ω^2 , растут с расстоянием от центра вращения и вблизи геостационарной орбиты имеют максимальную величину, равную $\sim 0,5 \cdot 10^{-10}$.

Особыми свойствами обладает последний член формул для коэффициентов преломления (7.5) и (7.6) вида $\Delta n_\Omega = \frac{1}{c} [\vec{\Omega} \vec{R}] \vec{e}$, который характеризует свойства «гирогравитационной» среды. Оптическая плотность этой «среды» имеет цилиндрическую симметрию с образующей, параллельной оси вращения Земли. В плоскости экватора Земли величина коэффициента преломления этой среды изменяется от значения $1,55 \cdot 10^{-6}$ на поверхности Земли до значения 10^{-5} на геостационарной орбите, что соизмеримо с характеристиками ионосферы. Эти цифры свидетельствуют о существенной неоднородности рассматриваемой среды и ожидаемом существенном влиянии ее на рефракцию радиоволн и оптических лучей. В протяженных космических радиопутьях влияние этой «гирогравитационной» среды на параметры распространения радиоволн, например, на рефракцию и на задержку, существенно выше, чем в ионосфере. Это объясняется сравнительно коротким ионосферным участком трассы распространения по сравнению, например, с длиной трассы «космос – Земля» навигационного сигнала в системах ГЛОНАСС, GPS и GALILEO. Далее будет показано, что дополнительная «гирогравитационная» задержка навигационного сигнала на трассе «Земля – КА» может достигать десятков наносекунд.



Другим замечательным свойством «гирогравитационной» среды в системе ITRS является ее анизотропность, поскольку произведение $[\vec{\Omega R}] \vec{e}$ зависит от направления волны относительно направления вращения системы. Следствием этого свойства является изменение знака коэффициента Δn_{Ω} для встречных лучей и, соответственно, инверсия задержки и угла рефракции. Встречные оптические лучи в такой среде имеют разную задержку и они распространяются по разным трассам.

Наконец, составляющая Δn_{Ω} принципиально не зависит от показателя преломления обычной атмосферы. Это свойство вращающихся систем применяется в кольцевых гироскопах, использующих гироскопический эффект Саньяка.

7.1.2. Коэффициент гравитационного преобразования частоты в ITRS

В общем виде этот коэффициент для ускоренно вращающейся орбитальной системы отсчета определяется соотношением (6.86), а для стационарного гравитационного поля вращающейся системы ITRS он выражается формулой (6.87). Используя компоненты метрического тензора (7.3), пренебрегая членами вида $(\varphi/c^2)^2$, G^4 и $\varphi[\vec{\Omega R}]^2/c^4$, коэффициент гравитационного преобразования частоты радиоволны в системе ITRS, распространяющейся от точки «Н» (начало трассы) до точки «К» (конец трассы), представим в развернутом виде [229–231]:

$$F = \frac{\sqrt{-g_{00_1}}}{\sqrt{-g_{00_2}}} = \frac{\sqrt{-g_{00_H}}}{\sqrt{-g_{00_K}}} = 1 + \frac{\varphi_{eK} - \varphi_{eH}}{c^2} + \frac{\Delta\varphi_{M_{KH}}}{c^2} + \frac{\Delta\varphi_{S_{KH}}}{c^2} + \frac{1}{2c^2} \left([\vec{\Omega R}_K]^2 - [\vec{\Omega R}_H]^2 \right), \quad (7.9)$$

где φ_e – потенциал Земли, определяемый формулами (2.54) – (2.56), $\Delta\varphi_{M_{12}}$; $\Delta\varphi_{S_{12}}$ – разность приливных потенциалов Луны и Солнца между крайними точками радиолинии – передатчиком и приемником излучения, определяемые соотношением (2.67). Полученная формула является общей для радиотрасс любого направления, поскольку величина коэффициента F не зависит от конфигурации трассы, а определяется лишь разностью потенциалов в конечной и начальной ее точках.

Если две волны распространяются между двумя точками 1 и 2 навстречу друг другу (например, в задаче взаимной синхронизации двух СЧВ), то соотношение (7.9) удобно представить в виде двух связанных между собой коэффициентов преобразования, определяющих преобразование частоты при распространении в направлении от точки 1 к точке 2 (F_{\uparrow}) и обратно от точки 2 к точке 1 (F_{\downarrow}):

$$F_{\uparrow} = \frac{\sqrt{g_{00_{H\uparrow}}}}{\sqrt{g_{00_{K\uparrow}}}} = \frac{\sqrt{g_{00_1}}}{\sqrt{g_{00_2}}} = 1 + \frac{\varphi_{\Sigma 2} - \varphi_{\Sigma 1}}{c^2} = \frac{1}{F_{\downarrow}}, \quad (7.9a)$$

где $\varphi_{\Sigma} = \varphi_e + \varphi_M + \varphi_S + [\vec{\Omega}\vec{R}]^2/2$ – суммарный гравитационный потенциал;

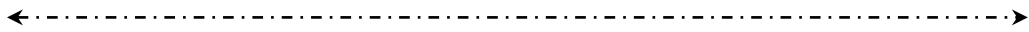
$$F_{\downarrow} = \frac{\sqrt{g_{00_{H\downarrow}}}}{\sqrt{g_{00_{K\downarrow}}}} = \frac{\sqrt{g_{00_2}}}{\sqrt{g_{00_1}}} = 1 - \frac{\varphi_{\Sigma 2} - \varphi_{\Sigma 1}}{c^2} = \frac{1}{F_{\uparrow}}. \quad (7.9б)$$

Из этих соотношений следует, что если для прямой волны $F_{\uparrow} > 1$, то для обратной волны, распространяющейся по тому же пути, $F_{\downarrow} < 1$.

Для оценки величины составляющих коэффициента (7.9) рассмотрим распространение волн в околоземном пространстве в пределах геостационарной орбиты. Возьмем простейший случай распространения волны от точки 1, расположенной на экваторе Земли ($R_1 = \rho_1 = R_e$), к точке 2, расположенной на геостационарной орбите ($R_2 = \rho_2 \approx 4,2 \cdot 10^7$ м). Частоту излучаемой на Земле волны примем равной f_0 . Гравитационное поле Земли для простоты считаем сферически симметричным с потенциалом $\varphi_e = \mu_e/\rho$, где ρ – геоцентрическая высота рассматриваемой точки.

Относительное приращение частоты волны, принимаемой на геостационарной орбите, относительно исходной f_0 , согласно (6.88) и (7.9), составит:

$$\begin{aligned} \frac{f_2 - f_0}{f_0} = F_{\uparrow} - 1 = & + \frac{\varphi_{e2} - \varphi_{e1}}{c^2} + \\ & + \frac{1}{2c^2} \left([\vec{\Omega}\vec{R}_2]^2 - [\vec{\Omega}\vec{R}_1]^2 \right) + \frac{\Delta\varphi_{M_{21}}}{c^2} + \frac{\Delta\varphi_{S_{21}}}{c^2} \approx -(F_{\downarrow} - 1) \end{aligned} \quad (7.10)$$



Оценим величину каждого из слагаемых в правой части этого соотношения. Поскольку потенциал истинного поля Земли с высотой уменьшается, то $\frac{(f_2 - f_0)_\varphi}{f_0} = + \frac{\varphi_{e2} - \varphi_{e1}}{c^2} = -5,88 \cdot 10^{-10}$, т.е. $f_2 < f_0$. Это свидетель-

ствует об уменьшении собственной частоты волны с высотой (гравитационное смещение отрицательное, частота смещается в «красную» сторону спектра). Второе слагаемое, вызванное разностью центробежных потенциалов вида $\Omega^2 R^2$, при тех же расстояниях составляет $\approx +5,09 \cdot 10^{-11}$, т.е. гравитационное «центробежное» смещение частоты с высотой наоборот растет. Для волны обратного направления, согласно (7.9б), гравитационное смещение частоты положительно (частота волны по мере приближения к Земле растет), а «центробежное» смещение – отрицательно.

Согласно оценкам, проведенным в разделе 4.4.2, частотные смещения, вызванные влиянием полей Луны и Солнца, зависят от взаимной ориентации направления распространения и направления на небесное светило и на трассе «Земля – геостационарная орбита» достигают, соответственно, $1,4 \cdot 10^{-15}$ и $0,5 \cdot 10^{-15}$.

Коэффициент F (7.9) определяет частотно-преобразующие свойства околоземной «гравитационной среды» во вращающейся системе отсчета ITRS. Он не зависит от свойств атмосферы и скорости движения источника и приемника радиоволны. Он определяется только разностью гравитационных потенциалов на концах трассы распространения. В зависимости от направления радиолуча он может быть больше или меньше единицы. Его отличие от единицы в пределах геостационарной орбиты достигает почти $\pm 6 \cdot 10^{-9}$, что на 5–6 порядков превышает уровень стабильности современных стандартов частоты и времени. Поэтому при точных геодезических и навигационных измерениях с использованием протяженных радиотрасс его необходимо учитывать с высокой точностью.

7.1.3. Коэффициент связи собственного (измеряемого) и координатного времени в ITRS

Связь между собственным и координатным временем в любой точке пространства-времени устанавливается соотношениями (3.8) и (3.9а), определяющими релятивистский коэффициент преобразования шкалы собственного (измеряемого) времени τ относительно шкалы координатного времени t для хранителя, движущегося в гравитационном поле. Это, в частности, необходимо при измерении времени задержки радиоволны в гравитационном поле, а также при преобразовании скорости движения космических передатчиков или приемников, определяемых в координатном времени, к их скорости, определяемой в собственном времени наземного баллистического Центра.

На этом основании для некоторой i -той точки трассы волны этот коэффициент запишем в виде:

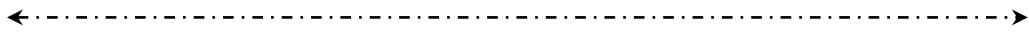
$$\theta_i = \frac{d\tau_i}{dt} \left\{ \left(\sqrt{-g_{00_i}} - \frac{g_{0\alpha_i} V_i^\alpha \theta_0}{c \sqrt{-g_{00_i}}} \right)^2 - \frac{(V_i \theta_0)^2}{c^2} \right\}^{0.5},$$

где $\theta_0 = \sqrt{-g_{00_0}}$ – коэффициент преобразования собственного времени для базовых часов баллистического Центра, который определяется компонентом g_{00} метрического тензора (7.3); баллистический Центр определяет истинные скорости движения космических передатчиков и приемников в шкале собственного (базового) времени τ_0 ; V_i – скорость приемника или передатчика ($i = 1; 2$). Здесь условимся, что значение индекса $i=1$ соответствует точке размещения источника (передатчика) радиоволн, значение $i=2$ соответствует приемнику.

Коэффициент θ_0 для наземных базовых часов, в соответствии с (7.3), определяется соотношением:

$$\theta_0 = 1 - \frac{\mu_e}{R_e c^2} - \frac{1}{2c^2} (\Omega_e R_e \cos \psi_0)^2 - \frac{\Delta\varphi_M}{c^2} - \frac{\Delta\varphi_S}{c^2}, \quad (7.11)$$

где R_e – радиус Земли, ψ_0 – геоцентрическая широта; $\Delta\varphi_M; \Delta\varphi_S$ – разность приливных потенциалов между центром Земли и точкой размещения базовых часов.



Влияние приливных потенциалов на смещения шкалы времени наземных часов исследовано в разделе 4.4.1. Относительное частотное приливное смещение частоты вследствие влияния Луны достигает $\sim 3 \cdot 10^{-17}$, а вследствие влияния Солнца – $\sim 1,4 \cdot 10^{-17}$. Соответствующие смещения шкалы времени составляют несколько пикосекунд в сутки.

Влияние неравномерности вращения Земли исследовано в разделе 4.5. Оценка амплитуды периодических суточных эффектов смещения шкалы времени наземных часов, вызванных различными причинами неравномерного вращения Земли, составляет: из-за нутации – 16,4 пс; из-за отклонения полюсов – 8 пс; из-за прецессии – $1,4 \cdot 10^{-3}$ пс.

При среднем значении девиации модуля угловой Земли $\Delta\Omega_z = -100 \cdot 10^{-10} \text{ с}^{-1}$ эффект суточного линейного смещения шкалы времени составляет около 25 пс. По формулам, приведенным в разделах 4.4.1 и 4.5, эти эффекты достаточно легко рассчитать по данным службы вращения Земли.

В силу малости рассмотренных эффектов влияния приливов и неравномерности вращения Земли для большинства практических задач формулу (7.11) можно существенно упростить:

$$\theta_0 = 1 - \frac{\mu_e}{R_e c^2} - \frac{1}{2c^2} (\Omega_e R_e \cos \psi_0)^2. \quad (7.12)$$

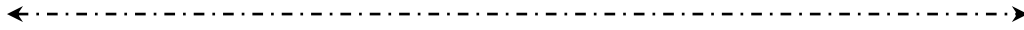
Коэффициент θ_2 для приемника вычислим для двух случаев: при размещении измерительного приемника на Земле (добавим индекс «E») и на борту НКА ГЛОНАСС (добавим индекс «C»). В первом случае для неподвижного наземного приемника ($V_2 = 0$) формула аналогична (7.12):

$$\theta_{2E} = 1 - \frac{\mu_e}{R_e c^2} - \frac{1}{2c^2} (\Omega_e R_e \cos \psi_2)^2, \quad (7.13)$$

где ψ_2 – геоцентрическая широта наземного приемника. Гравитационными потенциалами Луны и Солнца, а также влиянием неравномерности вращения Земли здесь также можно пренебречь.

Для экваториальных часов второе слагаемое составляет $\sim 0,69 \cdot 10^{-9}$, третье достигает значения $\sim 1,2 \cdot 10^{-13}$.

Для случая орбитального размещения коэффициент (7.10) преобразуем к виду (членами вида $(c^{-1} g_{0\alpha} V^\alpha)^2$ пренебрегаем в силу их малости):



$$\begin{aligned} \theta_{2c} &\approx \sqrt{\left(-g_{00}^\alpha\right) - \frac{2}{c} g_{0\alpha}^s V_s^\alpha - \frac{V_a^2}{c^2}} \approx \\ &\approx 1 - \frac{\mu_e}{\rho_c c^2} - \frac{1}{2} \left(G^2 + \frac{2GV}{c} + \frac{V^2}{c^2} \right) \end{aligned} \quad (7.14)$$

Учитывая, что $\vec{G} \approx \frac{1}{c} [\vec{\Omega} \vec{R}]$; $([\vec{\Omega} \vec{R}] + \vec{V})^2 = V_{orb}^2$, где V_{orb}^2 – орбитальная скорость НКА в невращающейся геоцентрической системе, а также связь $V_{orb}^2 = \frac{\mu_e}{\rho_s}$, окончательно получаем:

$$\theta_{2c} = 1 - \frac{3\mu_e}{2\rho_c c^2}. \quad (7.15)$$

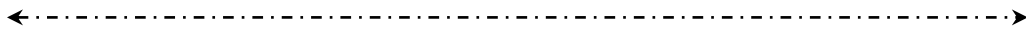
7.2. Релятивистские параметры радиоволн в односторонней космической измерительной радиолнии в системе ITRS

7.2.1. Время распространения

Определим время распространения радиоволны в односторонней радиолнии «Земля – КА», «высокий КА – Земля» и «низкий КА – высокий КА» [234]. Для упрощения формул при вычислении ограничимся учетом задержек на трассе, превышающих 0,01 нс (10 пс). В качестве исходной используем формулу (6.66):

$$\tau_{12} = \frac{\theta_2 R'}{c} + \frac{\theta_2}{c} \int_{R_1}^{R_2} (n^{**} - 1) \vec{e} d\vec{R} + \frac{\vec{V}_2 \vec{R}'}{c^2} + \frac{R'^2}{2c^3} \vec{a}_2 \vec{e}, \quad (7.16)$$

где коэффициент θ_2 определяется, в зависимости от места проведения измерений, формулами (7.13) и (7.15); расстояние «источник – приемник» на момент излучения R' определяется формулой (6.65); обобщенный коэффициент преломления применительно к системе ITRS определяется формулой (7.8), которую, пренебрегая слабым влиянием полей Луны и Солнца и параметрами неравномерности вращения Земли на задержку радиоволн, представим в виде:



$$n^{**} = 1 + \Delta n_a(R) + \left\{ \frac{2\varphi_e}{c^2} + \frac{[\vec{\Omega R}]^2}{2c^2} + \frac{1}{2c^2} \left([\vec{\Omega R}] \vec{e} \right)^2 \right\} + \frac{1}{c} [\vec{\Omega R}] \vec{e}, \quad (7.17)$$

где $1 + \Delta n_a(R) = n_a(R)$ – показатель преломления атмосферы, изменяющийся вдоль длины трассы R .

На основе этих формул из выражения (7.16) получаем (значки $\downarrow \uparrow$ указывают направление радиолуча):

1) радиолиния «КА – Земля» (\downarrow). Измерения выполняются на Земле, θ_{2E} определяется формулой (7.13), измерительный приемник неподвижен ($V_2 = a_2 = 0$), индекс E в обозначении времени указывает точку проведения измерений:

$$\begin{aligned} \tau_{\downarrow}^E &= \frac{R'}{c} \left[1 - \frac{\mu_e}{R_e c^2} - \frac{1}{2c^2} (\Omega_e R_e \cos \psi_{2E})^2 \right] + \tau_{ГР} + \tau_{\Omega \downarrow} + \tau_{\downarrow 2}^a \approx \\ &\approx \frac{R'}{c} \left(1 - \frac{\mu_e}{R_e c^2} \right) + \tau_{ГР} + \tau_{\Omega \downarrow} + \tau_{\downarrow 2}^a \end{aligned}, \quad (7.18)$$

где

$$\tau_{\downarrow 2}^a \approx t_{\downarrow 2}^a = \frac{1}{c} \int_{\tau_2 - \Delta \tau_a}^{\tau_2} \Delta n_a(R) dR, \quad (7.19)$$

– дополнительная задержка, вызванная влиянием атмосферы (тропосферы и ионосферы). Нижние индексы обозначают направление волны и момент времени, вблизи которого волна проходит атмосферу: в данном случае вблизи момента приема τ_2 . Это объясняется нестационарностью атмосферы и, в силу большого времени распространения в космических радиолиниях (до 0,1 секунды), разными преломляющими свойствами атмосферы в момент излучения τ_1 и в момент приема τ_2 . Пределы интегрирования определяют интервал прохождения волны $\Delta \tau_a$ вблизи момента приема волны τ_2 ;

$$\tau_{\Omega \downarrow} \approx t_{\Omega \downarrow} = \frac{1}{c} \int_{R_c}^{R_E} [\vec{\Omega R}] d\vec{R} \quad (7.20)$$

– гироскопическая задержка на трассе «вниз»;

$$\tau_{ГР} \approx t_{ГР} = \frac{2\mu_e}{c^3} \int_{R_c}^{R_e} \frac{dR}{\rho} + \frac{1}{2c^2} \int_{R_c}^{R_e} \left\{ \left[\overline{\Omega R} \right]^2 + \left(\left[\overline{\Omega R} \right] \vec{e} \right)^2 \right\} dR \quad (7.21)$$

– гравитационная задержка в поле Земли;

2) радиолиния «Земля – высокий КА» (\uparrow). Измерения выполняются на высокоорбитальном КА (например, на НКА ГЛОНАСС), θ_{2c} определяется формулой (7.15), индекс « $вс$ » обозначает точку проведения измерений на борту высокого спутника:

$$\tau_{\uparrow}^{вс} = \frac{R'}{c} \left(1 - \frac{3\mu_e}{2\rho_{вс}c^2} \right) + \tau_{ГР} + \tau_{\Omega\uparrow} + \tau_{\uparrow 1}^a + \frac{\overline{V_{вс} R'}}{c^2} + \frac{R'^2}{2c^3} \vec{a}_{вс} \vec{e}, \quad (7.22)$$

где

$$\tau_{\uparrow 1}^a \approx t_{\downarrow 1}^a = \frac{1}{c} \int_{\tau_1}^{\tau_1 + \Delta\tau_a} \Delta n_a(R) dR, \quad (7.23)$$

обозначения составляющих те же, что и в формулах (7.18) и (6.66), однако изменились пределы интегрирования;

3) радиолиния «высокий КА – низкий КА» (\downarrow). Измерения выполняются на низкоорбитальном КА (например, на геодезическом КА относительно НКА ГЛОНАСС), θ_{2E} определяется формулой (7.15), индекс « $нс$ » обозначает точку проведения измерений на борту низкого спутника:

$$\tau_{\downarrow}^{нс} = \frac{R'}{c} \left(1 - \frac{3\mu_e}{2\rho_{нс}c^2} \right) + \tau_{ГР} + \tau_{\Omega\downarrow} + \tau_{\downarrow 2}^a + \frac{\overline{V_{нс} R'}}{c^2} + \frac{R'^2}{2c^3} \vec{a}_{нс} \vec{e}, \quad (7.24)$$

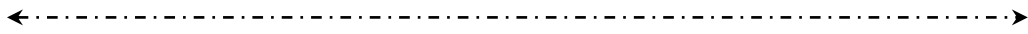
где обозначения аналогичны предыдущим. Задержка в атмосфере в данном случае объясняется влиянием ионосферы.

Входящие в формулы (7.18), (7.22) и (7.24) релятивистские добавки вида

$$\delta\tau_{p\uparrow}^{вс} = -\frac{R}{c} \cdot \frac{3\mu_e}{2\rho_{вс}c^2}; \quad \delta\tau_{p\downarrow}^{нс} = -\frac{R}{c} \cdot \frac{3\mu_e}{2\rho_{нс}c^2}; \quad (7.25)$$

$$\delta\tau_{p\downarrow}^E = -\frac{R}{c} \cdot \frac{\mu_e}{R_e c^2} \quad (7.26)$$

определяются различием темпа шкал собственного времени орбитальных (ρ_c) и наземных (R_e) измерительных часов. При $\rho_{вс} = 2,55 \cdot 10^7$ м, $\rho_{нс} = 6,8 \cdot 10^6$ м, $R_e = 6,4 \cdot 10^6$ м, длине радиолинии около $2 \cdot 10^7$ м получаем соответственно: $\delta\tau_{p\uparrow}^{вс} \approx -16$ пс, $\delta\tau_{p\downarrow}^{нс} \approx -60$ пс, $\delta\tau_{p\downarrow}^E \approx -42$ пс.



Составляющая задержки τ_Ω вида (7.20) определяет гироскопическую задержку во вращающейся системе ITRS (эффект Саньяка). Этот эффект не зависит от преломляющих свойств атмосферы и изменяет знак при изменении направления луча на обратный. При координатах точек на концах трассы $A_1(x_1, y_1, z_1)$ и $A_2(x_2, y_2, z_2)$ эта задержка не зависит от координат по оси OZ :

$$\tau_\Omega \approx t_\Omega = \frac{1}{c^2} \int_{\vec{R}_1}^{\vec{R}_2} [\vec{\Omega} \vec{R}] d\vec{R} = \frac{2\Omega S_\nabla}{c^2} = \frac{\Omega}{c^2} (x_1 y_2 - x_2 y_1), \quad (7.27)$$

где S_∇ – площадь проекции треугольника «излучатель – приемник – центр Земли» на плоскость экватора.

При $x_1 \approx +2,5 \cdot 10^7$ м, $x_2 \approx 0$; $y_1 = y_2 = 6,4 \cdot 10^6$ м (надгоризонтная радиолиния «НКА ГЛОНАСС – Земля») имеем $\tau_\Omega \approx +120$ нс. При $x_1 = -2,55 \cdot 10^7$ м знак задержки изменяется на противоположный.

Ещё одно замечательное свойство задержки (7.27) заключается в том, что интегрирование по замкнутому контуру не равно нулю. При этом два радиолуча, движущиеся по замкнутому контуру во встречных направлениях, в соответствии с теоремой Стокса имеют относительную разность времени обхода

$$\tau_\Omega = \frac{4\vec{\Omega} \vec{S}}{c^2},$$

где \vec{S} – площадь оббегаемого контура.

В частности, если радиоимпульс запустить по цепи геостационарных спутников связи во встречных направлениях, то разность времени обхода составит около 20 мкс.

Гравитационная задержка (7.21) зависит от направления волны и объясняется уменьшением фазовой скорости и удлинением геометрического пути волны в гравитационном поле вращающейся системы отсчета ITRS. Однако гравитационная задержка, вызываемая только истинным полем Земли не зависит от направления распространения волны и, согласно (1.66), определяется соотношением [28, 67, 70]:

$$\tau_{GP} \approx t_{GP} = \frac{2\mu}{c^3} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{\rho} = \frac{2\mu}{c^3} \ln \frac{R_1 + R_2 + R}{R_1 + R_2 - R}, \quad (7.28)$$

где \vec{R}_1, \vec{R}_2 – радиус-векторы передатчика и приемника в выбранной системе отсчета; $R = (\vec{R}_2 - \vec{R}_1) \vec{e}$ – расстояние между передатчиком и приемником.

←----->

Для радиолинии «Земля – НКА ГЛОНАСС», ориентированной в зенит, эта задержка составляет около 37 пс, а для надгоризонтной радиолинии она достигает 62 пс.

Составляющие задержки, вызванные влиянием радиальной скорости и радиального ускорения приемника, наиболее заметны в радиолинии «высокий КА – низкий КА». Согласно (7.24), эти задержки составляют:

$$\delta\tau_v = \frac{\vec{V}_{nc} \vec{R}}{c^2}, \quad \delta\tau_g = \frac{R'^2}{2c^3} \vec{g}_{nc} \vec{e}, \quad (7.29)$$

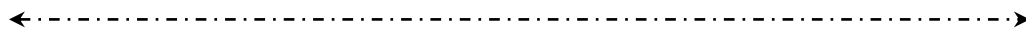
где $\vec{a}_{nc} = \vec{g}_{nc}$ – гравитационное ускорение низкоорбитального спутника.

При радиусе круговой орбиты $\rho_{nc} = 6,8 \cdot 10^6$ м орбитальная скорость и гравитационное ускорение спутника составляют, соответственно, $V_{kp} = 7,66 \cdot 10^3$ м/с, $g = 8,6$ м/с². В результате максимальные значения задержек (7.29) достигают следующих значений: для надгоризонтной радиолинии $(\delta\tau_v)_{\max} \approx 2$ мкс; $\delta\tau_g = 0$, а для зенитной радиолинии $\delta\tau_v = 0$; $(\delta\tau_g)_{\max} \approx 50$ пс.

7.2.2. Частота радиоволны

Частота принимаемой радиоволны в земной вращающейся системе отсчёта ITRS находится из общих соотношений (6.82) или (6.88) с учётом выражения для обобщённого координатного коэффициента преломления (7.8), формулы для коэффициента преобразования времени θ_0 (7.12), а также формул (6.86) и (6.87).

Формулы для частоты в радиолиниях «Земля – космос» и «космос – Земля» отличаются положением интервала прохождения атмосферы относительно моментов излучения и приема: в первой радиолинии (↑) этот интервал размещен вблизи момента излучения, во второй (↓) – вблизи момента приема. Свяжем частоту ω_1 с наземным генератором и приемником, а частоту ω_2 – с генератором и приемником, размещенным на спутнике. Тогда для радиолинии «вверх» (↑) при неподвижном наземном генераторе ($V_1 = 0$) частота волны, принимаемой на спутнике, составит:



$$\omega_{2\uparrow} = F_{12\uparrow} \omega_1 \frac{1}{\left\{ \left(1 - \frac{g_{0\alpha_2} V_2^\alpha \theta_0}{-g_{00_2} c} \right)^2 - \frac{(V_2 \theta_0)^2}{-g_{00_2} c^2} \right\}^{0.5}} \cdot \frac{1 - \frac{\vec{n}^{**}(\vec{R}_2)}{c} \theta_0 \vec{V}_2 \vec{e}_\uparrow}{\tau_1 + \Delta\tau_a}}{1 + \theta_0 \int_{\tau_1}^{\tau_1 + \Delta\tau_a} \Delta \dot{\vec{n}}_a(\tau) d\tau}. \quad (7.30)$$

Соответственно, для частоты волны, принимаемой на Земле в радиоприемнике «вниз» (\downarrow), получаем:

$$\omega_{1\downarrow} = \frac{\omega_2}{F_{12\uparrow}} \left\{ \left(1 - \frac{g_{0\alpha_2} V_2^\alpha \theta_0}{-g_{00_2} c} \right)^2 - \frac{(V_2 \theta_0)^2}{-g_{00_2} c^2} \right\}^{0.5} \cdot \frac{1 + \theta_0 \int_{\tau_1 - \Delta\tau_a}^{\tau_1} \Delta \dot{\vec{n}}_a(\tau) d\tau}{1 + \frac{\vec{n}^{**}(\vec{R}_2)}{c} \theta_0 \vec{V}_2 \vec{e}_\downarrow}, \quad (7.31)$$

где учтено, что $\vec{e}_\downarrow = -\vec{e}_\uparrow$; $\vec{V}_2 = \vec{V}_2' + \frac{\vec{a}_2 \vec{e}R}{c}$; \vec{V}_2' ; \vec{a}_2 – скорость и ускорение приемника.

7.2.3. Фаза радиоволны

Приращение фазы волны найдем из общего соотношения (6.3):

$$d\Phi = \omega_k dt - \vec{k} d\vec{R}, \quad (7.32)$$

где ω_k – координатная частота, не зависящая от характеристик гравитационного поля, а потому постоянная вдоль трассы; \vec{k} – волновой вектор, определяемый коэффициентом преломления гравитационной среды \vec{n}^{**} (7.8):

$$\vec{k} = \frac{\omega_k}{c} \vec{n}^{**}. \quad (7.33)$$

Переходя с помощью коэффициента (7.10) к собственной частоте приемника ω_2 и его собственному времени τ_2 , приращение фазы получим в виде:

$$d\Phi = \omega_2 d\tau_2 - \frac{\omega_2 \theta_2}{c} \vec{n}^{**} d\vec{R}. \quad (7.34)$$

←----->

Принимаемое колебание гетеродинирует с опорным колебанием приемника с фазой $d\Phi = \omega_2 d\tau_2$, и в результате фаза разностного колебания определяется лишь задержкой сигнала на трассе:

$$d\Phi_{12} = \frac{\omega_2 \theta_2}{c} \vec{n}^{**} \overline{dR}. \quad (7.35)$$

Полный фазовый набег на трассе радиоволны составит:

$$\Delta\Phi_{12} = \frac{\omega_2 \theta_2}{c} \int_{\vec{R}_1}^{\vec{R}_2} \vec{n}^{**} \overline{dR}. \quad (7.36)$$

Это соотношение приобретает законченный вид при расчете собственного времени запаздывания и использовании коэффициентов преобразования времени θ_2 для конкретно выбранной радиолинии.

В частности, для радиолинии «КА – Земля» на основе (7.18) в первом приближении имеем:

$$\Delta\Phi_{\downarrow}^E = \frac{\omega_2 \theta_{2E}}{c} \int_{\vec{R}_1}^{\vec{R}_2} \vec{n}^{**} \overline{dR} \approx \omega_2 \tau_{\downarrow}^E, \quad (7.37)$$

где время запаздывания τ_{\downarrow}^E определяется формулой (7.18).

Для радиолинии «Земля – высокий КА» аналогично получаем:

$$\Delta\Phi_{\uparrow}^{6c} = \frac{\omega_2 \theta_{2C}}{c} \int_{\vec{R}_1}^{\vec{R}_2} \vec{n}^{**} \overline{dR} \approx \omega_2 \tau_{\uparrow}^{6c}, \quad (7.38)$$

где τ_{\uparrow}^{6c} определяется формулой (7.22).

7.2.4. Рефракция и абберация волны

Угол релятивистской рефракции во вращающейся системе отсчета определяется формулами (6.47) и (6.48). Отрицательное значение этого угла свидетельствует о том, что луч отклоняется в сторону, противоположную вектору $[\vec{\Omega} \vec{R}]$.

Угол рефракции для радиального луча (\uparrow) находится также из (6.46) на основе (6.41). В результате имеем:

$$\alpha_{\Omega\uparrow} = -\frac{\Omega R}{c}. \quad (7.39)$$

Для радиального, но обратного по направлению луча в (6.48) полагаем $\vec{e} = -\vec{R}^0$. В результате

$$\alpha_{\Omega\downarrow} = +\frac{\Omega R}{c}, \quad (7.40)$$

←----->
 т.е. отклонение луча от зенитного направления совпадает с направлением вектора $[\vec{\Omega R}]$.

Угол скоростной абберации вертикального радиального луча, как известно [9], составляет:

$$\alpha_{a\sigma\uparrow} = -\frac{V_{\Omega}}{c}, \quad (7.41)$$

где V_{Ω} – скорость космического аппарата в системе ITRS.

При этом суммарный угол отклонения зенитного луча от вертикали

$$\alpha_{\Sigma\uparrow} = \alpha_{\Omega\uparrow} + \alpha_{a\sigma\uparrow}. \quad (7.42)$$

В частности, для радиального луча геостационарный объект в гринвичской системе неподвижен, поэтому $\alpha_{a\sigma} = 0$. Отклонение луча в этом случае имеет чисто гироскопическое происхождение, определяется по формуле (7.39) и составляет 10^{-5} рад (2").

7.2.5. Поворот плоскости поляризации волны

Угол поворота плоскости поляризации в гиротропной среде вращающейся системы ITRS найдём из соотношения (6.57) с использованием выражения (5.75) при $V=0$.

Пренебрегая кручением, для угла поворота плоскости поляризации получаем:

$$\phi_{II} = \frac{1}{2} \int_{R_1}^{R_2} (\text{rot} \vec{e}) d\vec{R}. \quad (7.43)$$

Оставляя лишь члены первого порядка по l/c и учитывая, что

$$\text{rot} [\vec{\Omega R}] = 2(\Omega_x \vec{x}^0 + \Omega_y \vec{y}^0 + \Omega_z \vec{z}^0),$$

$$\text{rot} \vec{k} = 0,$$

$$\Omega_x = \Omega_y = 0,$$

находим, что ненулевой угол поворота будет лишь при распространении луча вдоль оси OZ:

$$\phi_{IIz} = \frac{\Omega_z}{c} (z_2 - z_1). \quad (7.44)$$

При $z_2 - z_1 \approx 19,1 \cdot 10^6$ м (высота орбиты ГНСС «ГЛОНАСС») получаем $\phi_{IIz} \approx 5 \cdot 10^{-6}$ рад = 1 угл.с.

7.3. Релятивистские параметры радиоволн
в двусторонней (запросной) космической радиолинии в системе ITRS

7.3.1. Время распространения в запросной радиолинии

Собственное время распространения радиоволны в запросной радиолинии рассчитаем применительно к радиолинии «Земля – высокий КА». Для этого воспользуемся выражениями для собственного времени распространения (7.16) и (7.22), в которых расстояние R' между источником и приемником на момент излучения t_1 определяется соотношением (6.65). Измерение времени запаздывания в запросной радиолинии производится наземными часами, поэтому коэффициент преобразования собственного (измеряемого) времени в формуле (7.16) $\theta_2 = \theta_{2E}$ определяется соотношением (7.13). В результате, пренебрегая малыми членами, не превышающими 10 пикосекунд, для радиолинии «вверх» получаем:

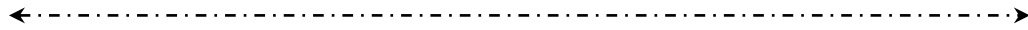
$$\tau_{\uparrow}^{ec} = \frac{R'}{c} \left[1 - \frac{\mu_e}{R_e c^2} \right] + \tau_{GP} + \tau_{\Omega\uparrow} + \tau_{\uparrow 1}^a + \frac{\vec{V}_{ec} \vec{R}'}{c^2} + \frac{R'^2}{2c^3} \vec{a}_{ec} \vec{e}, \quad (7.45)$$

где $\tau_{GP}, \tau_{\Omega}, \tau_{\uparrow 1}^a$ определяются соотношениями (7.21), (7.20) и (7.23) соответственно; $\vec{V}_{ec}, \vec{a}_{ec}$ – векторы скорости и ускорения спутника.

Запросный радиолуч в радиоответчике спутника претерпевает целый ряд операций (приём, несколько каскадов усиления, преобразование частоты и т.д.). В результате переизлучение запросного сигнала происходит с задержкой $\tau_3 \ll R/c$. За это достаточно малое время спутник перемещается в точку с радиус-вектором

$$R'' = R' + \vec{V}_{ec} e \tau_3 + \frac{1}{2} \vec{a}_{ec} \tau_3^2. \quad (7.46)$$

При ширине полосы пропускания бортового ретранслятора не менее 1 МГц время задержки не превышает 1 мкс. Как отмечалось при рассмотрении релятивистской рефракции, ретранслированная волна в первом приближении распространяется по тому же пути. Поэтому, пренебрегая в (7.46) влиянием радиального ускорения на интервале задержки и ограничиваясь допустимыми погрешностями в 10 пс, время распространения в радиолинии «вниз» на основе (7.45) представляем соотношением:



$$\tau_{\downarrow}^{ec} = \frac{R'}{c} \left[1 - \frac{\mu_e}{R_e c^2} \right] + \frac{\vec{V}_{ec} \vec{e}}{c} \tau_3 + \tau_{ГР} - \tau_{\Omega\downarrow} + \tau_{\downarrow 2}^a + \frac{\overrightarrow{V_{ec} R'}}{c^2} + \frac{R'^2}{2c^3} \vec{a}_{ec} \vec{e}, \quad (7.47)$$

где атмосферная задержка $\tau_{\downarrow 2}^a$ у Земли определяется соотношением (7.19).

В результате полное время задержки запросного радиолуча, ретранслированного на борту КА, определяется суммой задержек (7.45) и (7.47):

$$\tau_{\uparrow\downarrow}^{ec} = \frac{2R'}{c} \left[1 - \frac{\mu_e}{R_e c^2} \right] + \frac{\vec{V}_{ec} \vec{e}}{c} \tau_3 + 2\tau_{ГР} + \tau_{\uparrow 1}^a + \tau_{\downarrow 2}^a + \frac{2\overrightarrow{V_{ec} R'}}{c^2} + \frac{R'^2}{c^3} \vec{a}_{ec} \vec{e}, \quad (7.48)$$

где задержки $\tau_{ГР}, \tau_{\uparrow 1}^a, \tau_{\downarrow 2}^a$ определяются, соответственно, формулами (7.28), (7.23), (7.19).

Для лазерной запросной линии с уголковым отражателем на борту спутника ($\tau_3 = 0$) формула (7.48) упрощается:

$$\tau_{\uparrow\downarrow}^{ec} = \frac{2R'}{c} \left[1 - \frac{\mu_e}{R_e c^2} \right] + 2\tau_{ГР} + \tau_{\uparrow 1}^{mp} + \tau_{\downarrow 2}^{mp} + \frac{2\overrightarrow{V_{ec} R'}}{c^2} + \frac{R'^2}{c^3} \vec{a}_{ec} \vec{e}, \quad (7.49)$$

где $\tau_{\uparrow 1}^{mp}, \tau_{\downarrow 2}^{mp}$ определяют задержку лазерного луча в тропосфере.

7.3.2. Частота волны в запросной радиолинии

Частоту электромагнитной волны определим применительно к запросной радиолинии «Земля – высокий КА» и вычислим ее на основе формул для частоты в односторонних радиолиниях «Земля – спутник» и «спутник-Земля» (7.30) и (7.31).

Условимся, что частота наземного источника колебаний составляет ω_1 (индекс собственного времени «с» далее опускаем). Источник неподвижен в выбранной системе, поэтому $V_1 = 0$. Пусть с Земли на спутник посылается запросный радиосигнал с частотой ω_1 . В соответствии с формулой (7.30), частота сигнала, принимаемого на борту спутника, составит:

$$\omega_{2\uparrow} = (F_{12})_S \omega_1 \frac{1}{\left\{ \left(1 - \frac{g_{0\alpha_2} V_2^\alpha \theta_0}{-g_{00_2} c} \right)^2 - \frac{(V_2 \theta_0)^2}{-g_{00_2} c^2} \right\}_S^{0,5}} \cdot \frac{\left[1 - \frac{\vec{n}^{**}(\vec{R}_2)}{c} \theta_0 \vec{V}_2 \vec{e}_{\uparrow} \right]_S}{1 + \theta_0 \int_{\tau_1}^{\tau_1 + \Delta\tau_a} \Delta \dot{\vec{n}}_a(\tau) d\tau}, \quad (7.50)$$

где индекс «s» указывает на принадлежность отмеченных физических величин моменту приема сигнала на борту спутника τ_s ; \vec{e}_\uparrow – орт радиолуча, распространяющегося «вверх».

Сигнал, принятый на спутнике с частотой $\omega_{2\uparrow}$ (7.50), ретранслируется на Землю с некоторой задержкой τ_3 . За это время спутник переместится в другую точку пространства, вследствие чего изменятся параметры относительного движения спутника и наземной станции. Для разнесения по частоте запросной и ответной радиоволн частота ответной волны преобразуется в K_f раз, где $K_f \ll 1$ – дробный коэффициент преобразования частоты.

Используя соотношение (7.31), частоту ретранслированной радиоволны, принимаемой на Земле, представим в виде:

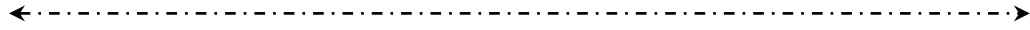
$$\omega_{2\uparrow\downarrow} = \frac{K_f \omega_{2\uparrow}}{(F_{12\uparrow})_3} \left\{ \left(1 - \frac{g_{0a_2} V_2^\alpha \theta_0}{-g_{00_2} c} \right)^2 - \frac{(V_2 \theta_0)^2}{-g_{00_2} c^2} \right\}_3^{0.5} \frac{1 + \theta_0 \int_{\tau_2 - \Delta\tau_a}^{\tau_2} \Delta \dot{n}_a(\tau) d\tau}{\left[1 - \frac{\vec{n}^{**}(\vec{R}_2)}{c} \theta_0 \vec{V}_2 \vec{e}_\downarrow \right]_3}, \quad (7.51)$$

где индексом «3» отмечены значения физических величин на момент излучения с борта с задержкой τ_3 ; \vec{e}_\downarrow – орт радиолуча, распространяющегося «вниз».

Подставляя сюда выражение для частоты $\omega_{2\uparrow}$ (7.50) и учитывая, что первые два сомножителя за малое время бортовой задержки изменяются пренебрежимо мало, выражение для частоты ретранслированной волны получаем в виде:

$$\omega_{\uparrow\downarrow} = \omega_1 K_f \frac{\left[1 - \frac{\vec{n}^{**}(\vec{R}_2)}{c} \theta_0 \vec{V}_2 \vec{e}_\uparrow \right]_s}{\left[1 - \frac{\vec{n}^{**}(\vec{R}_2)}{c} \theta_0 \vec{V}_2 \vec{e}_\downarrow \right]_3} \frac{1 + \theta_0 \int_{\tau_2 - \Delta\tau_a}^{\tau_2} \Delta \dot{n}_a(\tau) d\tau}{1 + \theta_0 \int_{\tau_1}^{\tau_1 + \Delta\tau_a} \Delta \dot{n}_a(\tau) d\tau}. \quad (7.52)$$

Упростим это соотношение, учитывая, что вблизи спутника отсутствует атмосфера ($\Delta n_a = 0$). При этом условии коэффициент преломления «гравитационной среды» вблизи спутника, согласно (7.8), определяется выражением:



$$n^{**}(\bar{R}_2) = n_2^{**} = 1 + \left\{ \frac{2\varphi_2}{c^2} + \frac{[\bar{\Omega}\bar{R}_2]^2}{2c^2} + \frac{1}{2c^2}([\bar{\Omega}\bar{R}_2]\bar{e})^2 \right\} + \frac{1}{c}[\bar{\Omega}\bar{R}_2]\bar{e}. \quad (7.53)$$

Второй и третий члены этой формулы существенно меньше единицы. Поэтому их изменения за время задержки в ретрансляторе можно считать несущественными. На этом основании формулу (7.52) представляем в виде:

$$\omega_{\uparrow\downarrow} = \omega_1 K_f \frac{1 - \frac{\theta_0}{c}(\bar{V}_2\bar{e}_{\uparrow})_s - \frac{\bar{n}_2^{**} - 1}{c}\theta_0\bar{V}_2\bar{e}_{\uparrow}}{1 - \frac{\theta_0}{c}(\bar{V}_2\bar{e}_{\downarrow})_3 - \frac{\bar{n}_2^{**} - 1}{c}\theta_0\bar{V}_2\bar{e}_{\downarrow}} \times \frac{1 + K_{\downarrow 2}^a}{1 + K_{\uparrow 1}^a}, \quad (7.54)$$

где

$$K_{\uparrow 1}^a = \theta_0 \int_{\tau_1}^{\tau_1 + \Delta\tau_a} \Delta\dot{n}_a(\tau) d\tau, \quad (7.55)$$

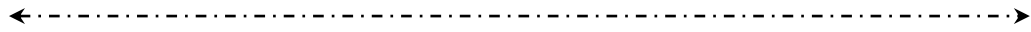
$$K_{\downarrow 2}^a = \theta_0 \int_{\tau_2 + \Delta\tau_a}^{\tau_2} \Delta\dot{n}_a(\tau) d\tau \quad (7.56)$$

– величины, характеризующие производные по времени от коэффициента преломления атмосферы в разные моменты времени: соответственно вблизи момента излучения с Земли τ_1 (направление «вверх») и вблизи момента приема волны на Земле τ_2 (направление волны «вниз»). Эти величины отличаются друг от друга, поскольку атмосфера является средой нестационарной.

В полученном соотношении (7.54) величины $(\bar{V}_2\bar{e}_{\uparrow})_s$ и $(\bar{V}_2\bar{e}_{\downarrow})_3$ отличаются друг от друга, поскольку соответствуют разным моментам времени, отстоящим один от другого на время задержки в бортовом ретрансляторе. Их целесообразно привести к одному моменту времени $t_s + \tau_3$.

Выражение $(\bar{V}_2\bar{e}_{\uparrow})_s$ представим через $(\bar{V}_2\bar{e}_{\downarrow})_3$ следующим образом (индекс 2 для упрощения расчетов пока опускаем):

$$\begin{aligned} -\bar{V}_{\uparrow s} &= -(\bar{V}_3 - \Delta\bar{V})(\bar{e}_{\uparrow 3} - \Delta\bar{e}_{\uparrow}) = -\bar{V}_3\bar{e}_{\uparrow 3} + \Delta\bar{V}\bar{e}_{\uparrow 3} + \bar{V}_3\Delta\bar{e}_{\uparrow} - \Delta\bar{V}\Delta\bar{e}_{\uparrow} = \\ &= -\bar{V}_3\bar{R}^0 + \Delta\bar{V}\bar{e}_{\uparrow 3} - \bar{V}_3\Delta\bar{e}_{\downarrow} + \Delta\bar{V}\Delta\bar{e}_{\downarrow}, \end{aligned} \quad (7.57)$$



где учтено, что $\Delta \vec{e}_\downarrow = -\Delta \vec{e}_\uparrow$; $\vec{R}^0 = \vec{e}_\uparrow$ – единичный вектор в направлении визирования ретранслятора с наземного измерителя на момент ретрансляции $t_s + \tau_3$.

Разлагая приращение вектора скорости $\Delta \vec{V} \vec{e}_\uparrow$ в ряд по малому параметру τ_3 и удерживая лишь первый член разложения, находим:

$$\Delta \vec{V} \vec{e}_\uparrow \approx \dot{\vec{V}} \vec{e}_\uparrow \tau_3 = \ddot{\vec{R}} \tau_3, \quad (7.58)$$

где $\ddot{\vec{R}} = \dot{\vec{V}} \vec{e}_\uparrow$ – радиальное ускорение ретранслятора относительно наземной станции.

Член $-\vec{V}_3 \Delta \vec{e}_\downarrow$ представим в форме:

$$-\vec{V}_3 \Delta \vec{e}_\downarrow = \vec{V}_3 \vec{R}^0 \frac{\Delta \vec{R}^0}{\vec{R}^0} = \dot{R} \Delta \alpha, \quad (7.59)$$

где $\dot{R} = \vec{V}_3 \vec{R}^0$ – радиальная скорость ретранслятора; $\Delta \alpha$ – угол между единичными векторами векторами \vec{R}_3^0 и \vec{R}_S^0 , который определяется формулой:

$$\Delta \alpha = \frac{\Delta R}{R} = \frac{V_\perp \tau_3}{R}, \quad (7.60)$$

причем V_\perp – поперечная скорость ретранслятора. Отсюда следует:

$$-\vec{V}_3 \Delta \vec{e}_\downarrow = \frac{V_\perp \dot{R} \tau_3}{R}. \quad (7.61)$$

На основе предыдущих соотношений находим также:

$$\Delta \vec{V} \Delta \vec{e}_\downarrow = \frac{\ddot{R} V_\perp \tau_3^2}{R}. \quad (7.62)$$

Подставляя полученные выражения в (7.57), получаем:

$$-(\vec{V}_2 \vec{e}_\uparrow)_s = -(\vec{V}_2 \vec{e}_\uparrow)_3 + \delta V_2, \quad (7.63)$$

где



$$\delta V_2 = \ddot{R}\tau_3 + \frac{V_\perp \dot{R}\tau_3}{R} + \frac{\ddot{R}V_\perp \tau_3^2}{R} \quad (7.64)$$

На основании полученного выражения релятивистская формула для частоты в запросной радиолинии (7.54) принимает окончательный вид:

$$\omega_{\uparrow\downarrow} = \omega_1 K_f \frac{1 - \frac{\theta_0}{c} (\vec{V}_2 \vec{e}_\uparrow)_3 + \frac{\delta V_2}{c} - \frac{\vec{n}_2^{**} - 1}{c} \theta_0 \vec{V}_2 \vec{e}_\uparrow}{1 - \frac{\theta_0}{c} (\vec{V}_2 \vec{e}_\downarrow)_3 - \frac{\vec{n}_2^{**} - 1}{c} \theta_0 \vec{V}_2 \vec{e}_\downarrow} \times \frac{1 + K_{\downarrow 2}^a}{1 + K_{\uparrow 1}^a}, \quad (7.65)$$

где n_2^{**} определяется формулой (7.53), $K_{\uparrow 1}^a$ и $K_{\downarrow 2}^a$ определяются формулами (7.55) и (7.56), δV_2 – формулой (7.64).

7.3.3. Фаза волны, угол релятивистской рефракции и поворот плоскости поляризации в запросной радиолинии

Приращение фазы радиоволны в запросной радиолинии «Земля – КА – Земля» определяется, как и в беззапросной радиолинии, соотношением (7.34).

Принимаемое на Земле ретранслированное с борта КА колебание гетеродинирует с опорным колебанием наземного приемника, имеющего собственную частоту ω_1 и фазу $d\Phi = \omega_1 d\tau_1$. В результате измеряемая разность фаз принимаемого и опорного колебаний определяется, в соответствии с (7.36), лишь эйконалом $\Delta\psi_{\uparrow\downarrow}$ на трассе «вверх – вниз»:

$$\Delta\Phi_{\uparrow\downarrow} = \frac{\omega_1 \theta_{1E}}{c} \Delta\psi_{\uparrow\downarrow} = \frac{\omega_1 \theta_{1E}}{c} \int_{R_{\uparrow\downarrow}} \vec{n}^{**} d\vec{R} = \omega_1 \tau_{\uparrow\downarrow}, \quad (7.66)$$

где обобщенный коэффициент преломления среды вдоль трассы распространения \vec{n}^{**} определяется формулой (7.8) или (7.17), коэффициент преобразования времени θ_{1E} при измерениях, выполняемых на неподвижном наземном приемнике, определяется соотношением вида (7.13):

$$\theta_{1E} = 1 - \frac{\mu_e}{R_e c^2} - \frac{1}{2c^2} (\Omega_e R_e \cos \psi_{1E})^2, \quad (7.67)$$

а время $\tau_{\uparrow\downarrow}$ представляет собой собственное время запаздывания радиоволн в запросной радиолинии.

←----->

В частности, для запросной радиолинии «Земля – высокий КА – Земля» время распространения $\tau_{\uparrow\downarrow}$ определяется приближенными соотношениями (7.48) (с учетом задержки в ретрансляторе) и (7.49) (с отражением от уголкового ретранслятора).

Поэтому для случая с задержкой при ретрансляции волны на борту высокого спутника фазовый набег на трассе на основе (7.48) и (7.66) получаем в виде:

$$(\Delta\Phi_{\uparrow\downarrow}^{ec})_R = \omega_1 \left[\frac{2R'}{c} \left(1 - \frac{\mu_e}{R_e c^2} \right) + \frac{\vec{V}_{ec} \vec{e}}{c} \tau_3 + \right. \\ \left. + 2\tau_{GP} + \tau_{\uparrow 1}^a + \tau_{\downarrow 2}^a + \frac{2\vec{V}_{ec} \vec{R}'}{c^2} + \frac{2R'^2}{2c^3} \vec{a}_{ec} \vec{e} \right]. \quad (7.68)$$

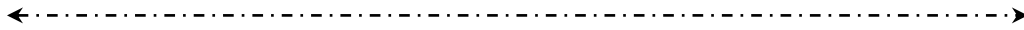
Для лазерной запросной линии с отражением от уголкового отражателя и задержкой в тропосфере на основе (7.49) аналогично получаем:

$$(\Delta\Phi_{\uparrow\downarrow}^{ec})_L = \omega_1 \left[\frac{2R'}{c} \left(1 - \frac{\mu_e}{R_e c^2} \right) + 2\tau_{GP} + \tau_{\uparrow 1}^{mp} + \tau_{\downarrow 2}^{mp} + \frac{2\vec{V}_{ec} \vec{R}'}{c^2} + \frac{2R'^2}{2c^3} \vec{a}_{ec} \vec{e} \right]. \quad (7.69)$$

Приближенность этих формул состоит в том, что в них не учтены задержки, вызванные влиянием членов вида $G^2, (\vec{G}\vec{e})^2$ и потенциалы полей Луны и Солнца в формулах для коэффициента преломления n^{**} (7.8), (7.17).

Как уже отмечалось в разделе 6.2, релятивистская рефракция в системе ITRS может достигать заметных значений. В гиротропной преломляющей среде земной вращающейся системы отсчета электромагнитные встречные лучи между корреспондентами распространяются по разным траекториям, охватывая некоторый контур. В системах оптической локации с уголковыми отражателями на борту КА ответный луч в исходную точку не возвращается. Согласно формуле (6.51), пространственное смещение лазерного луча, отраженного от средневысотного или геостационарного спутника, на поверхности Земли достигает сотен метров.

Плоскость поляризации радиоволны в запросной радиолинии в точке приема поворота не испытывает, поскольку, в силу анизотропности гиротропной среды в ITRS, в обратном радиолуче эффект поворота плоскости поляризации имеет обратный знак.



7.4. Релятивистские параметры оптических волн в глобальных волоконно-оптических линиях связи

7.4.1. Основные показатели условий распространения в волокне

Современные волоконно-оптические линии связи (ВОЛС) имеют протяженность в сотни и тысячи километров. Кроме передачи информации они могут использоваться для высокоточной синхронизации разнесенных стандартов частоты и времени, а также в целях контроля параметров гравитационного поля Земли.

Для определения релятивистских параметров распространения в глобальных ВОЛС как неподвижных электромагнитных системах наилучшим образом подходит развитый выше релятивистский аппарат распространения электромагнитных волн в ITRS.

Определим преломляющие свойства одномодового оптического волокна в виде:

$$n(R, t) = n_0(R, t) + \frac{\partial n(R, t)}{\partial \omega} \Delta \omega = 1 + \Delta n_0(R, t) + \frac{\partial n(R, t)}{\partial \omega} \Delta \omega, \quad (7.70)$$

где $n_0(R, t)$; $\frac{\partial n}{\partial \omega}(R, t)$ – среднее значение коэффициента преломления волокна и коэффициент дисперсии материала волокна, которые изменяются вдоль длины волокна и переменны во времени; $\Delta \omega$ – отклонение оптической частоты от средней.

Будем считать, что материал волокна в общем случае обладает неодинаковыми преломляющими свойствами для встречных волн (невозвратностью): n_{\uparrow} ; n_{\downarrow} . Преломляющие свойства волокна изменяются во времени t из-за температурных, переменных механических и других воздействий.

При этих условиях обобщенный коэффициент преломления волокна в системе ITRS (7.8) приобретает вид:

$$n^{**} = 1 + \Delta n_0(t) + \frac{\partial n(t)}{\partial \omega} \Delta \omega + \left\{ \frac{2\varphi}{c^2} + \frac{[\vec{\Omega R}]^2}{2c^2} + \frac{1}{2c^2} \left([\vec{\Omega R}] \vec{e} \right)^2 \right\} + \frac{1}{c} [\vec{\Omega R}] \vec{e}, \quad (7.71)$$

где $\varphi = \varphi_e + \Delta \varphi_M + \Delta \varphi_S$; φ_e – потенциал Земли, определяемый формулами (2.54) – (2.56), $\Delta \varphi_M$; $\Delta \varphi_S$ – приливные потенциалы Луны и Солнца.

←----->

Коэффициент гравитационного преобразования частоты в волокне F_{12} определяется соотношением (7.9). Релятивистский коэффициент преобразования шкалы собственного (измеряемого) времени относительно шкалы координатного времени θ_{2E} для наземных измерительных часов, покоящихся в гравитационном поле, определяется формулой (7.13).

7.4.2. Параметры волны в односторонней оптической линии

Время распространения оптической волны между источником и приемником, жестко связанными с входом и выходом волокна (направление «туда» (\uparrow)), определяется соотношением (7.16) при условии $V_2 = a_2 = 0; R = R'$:

$$\tau_{\uparrow} = \frac{\theta_{2E} R}{c} + \frac{\theta_{2E}}{c} \int_{R_1}^{\overline{R_2}} (\vec{n}^{**} - \vec{e}) d\vec{R}.$$

Используя выражения для коэффициента преломления (7.70) и коэффициента θ_{2E} и пренебрегая заведомо малыми составляющими, это выражение получаем в развернутом виде:

$$\tau_{\uparrow}^E = \frac{R}{c} \left[1 - \frac{\mu_e}{R_e c^2} - \frac{1}{2c^2} (\Omega_e R_e \cos \psi_{2E})^2 \right] + \tau_{GP} + \tau_{\uparrow}^{\Omega} + \tau_{\uparrow}^{\Delta n}, \quad (7.72)$$

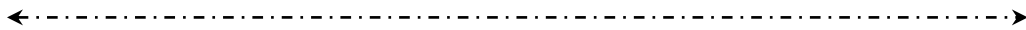
где

$$\tau_{GP} = \frac{2}{c^3} \int_{R_C}^{R_E} \left(\frac{\mu_e}{\rho} + \Delta\varphi_M + \Delta\varphi_S \right) dR \quad (7.73)$$

– гравитационная задержка в поле Земли, Луны и Солнца;

$$\tau_{\uparrow}^{\Omega} = \frac{\theta_{2E}}{c} \int_{R_1}^{R_2} \left\{ \left[\overline{\Omega R} \right] + \frac{\left[\overline{\Omega R} \right]^2}{2c^2} + \frac{1}{2c^2} \left(\left[\overline{\Omega R} \right] \vec{e} \right)^2 \right\} d\vec{R} \quad (7.74)$$

– гироскопическая задержка, которая в частном случае сводится к формуле (7.20). Здесь важно отметить, что гироскопическая задержка (7.20) принципиально не зависит от преломляющих свойств материала волокна. Это важное обстоятельство используется в волоконно-оптических гироскопах [79–80];



$$\tau_{\uparrow}^{\Delta n} = \frac{\theta_{2E}}{c} \int_{R_1}^{R_2} \left[\Delta n_{0\uparrow}(R, t) + \frac{\partial n_{\uparrow}(R, t)}{\partial \omega} \Delta \omega \right] dR \quad (7.75)$$

– задержка на всей длине волокна, вызванная его преломляющими свойствами и дисперсией.

Собственную частоту излучения на приемном конце световода определим из соотношений (6.88) и (7.30) при скорости приемника $V_2 = 0$:

$$\omega_{2\uparrow} = F_{12\uparrow} \omega_1 \frac{1}{1 + \theta_{2E} \int_{R_1}^{R_2} \left[\Delta \dot{n}_0 + \frac{\partial \dot{n}(R, t)}{\partial \omega} \Delta \omega \right] dR}, \quad (7.76)$$

где $\Delta \dot{n}_0 = \frac{d(\Delta n_0)}{dt}$; $\frac{\partial \dot{n}}{\partial \omega} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial n}{\partial \omega} \right)$ – производные по времени. Используя соотношение (7.9), это выражение получаем в развернутом виде:

$$\omega_{2\uparrow} = \omega_1 \frac{1 - \frac{\varphi_{e1} - \varphi_{e2}}{c^2} - \frac{\Delta \varphi_{M_{12}}}{c^2} - \frac{\Delta \varphi_{S_{12}}}{c^2} - \frac{1}{2c^2} \left([\overline{\Omega R_1}]^2 - [\overline{\Omega R_2}]^2 \right)}{1 + \theta_{2E} \int_{R_1}^{R_2} \left[\Delta \dot{n}_0 + \frac{\partial \dot{n}(R, t)}{\partial \omega} \Delta \omega \right] dR}. \quad (7.77)$$

Отсюда следует, что частота принимаемого сигнала определяется разностью гравитационных потенциалов между точками приема и излучения, а также скоростью изменения преломляющих свойств волокна во времени.

Фаза оптической волны на трассе распространения в направлении «туда» $\Delta \Phi_{\uparrow}^E$ определим, согласно разделу 7.2.3, по формуле (7.37):

$$\Delta \Phi_{\uparrow}^E = \frac{\omega_2 \theta_{2E}}{c} \int_{\bar{R}_1}^{\bar{R}_2} \vec{n}^{**} \overline{dR} \approx \omega_2 \tau_{\uparrow}^E. \quad (7.78)$$

Используя выражение для времени распространения τ_{\uparrow}^E (7.72), получаем окончательно:

$$\Delta \Phi_{\uparrow}^E = \omega_2 \left\{ \frac{R}{c} \left[1 - \frac{\mu_e}{R_e c^2} - \frac{1}{2c^2} (\Omega_e R_e \cos \psi_{2E})^2 \right] + \tau_{GP} + \tau_{12}^{\Omega} + \tau_{12}^{\Delta n} \right\}. \quad (7.79)$$

Релятивистский угол поворота плоскости поляризации в волокне определяется, согласно (7.44), только разностью координат источника и приемника волны по оси OZ и в пределах Земли не превышает 1 угл. с.

7.4.3. Параметры волны в запросной оптической линии

Рассмотрим распространение оптической волны в ВОЛС от излучателя «1» в направлении «туда и обратно» ($\uparrow\downarrow$) с отражением от торца противоположного конца световода и приемом снова в точке «1». Время задержки прямой волны в направлении «туда» (\uparrow) определится из соотношения (7.72) при условии, что измерения будут выполняться в точке 1:

$$\tau_{\uparrow}^E = \frac{R}{c} \left[1 - \frac{\mu_e}{R_e c^2} - \frac{1}{2c^2} (\Omega_e R_e \cos \psi_{1E})^2 \right] + \tau_{ГП} + \tau_{\uparrow}^{\Omega} + \tau_{\uparrow}^{\Delta n}. \quad (7.80)$$

Время распространения обратного луча (\downarrow) без задержки на отражение определится формулой, подобной (7.80):

$$\tau_{\downarrow}^E = \frac{R}{c} \left[1 - \frac{\mu_e}{R_e c^2} - \frac{1}{2c^2} (\Omega_e R_e \cos \psi_{1E})^2 \right] + \tau_{ГП} + \tau_{\downarrow}^{\Omega} + \tau_{\downarrow}^{\Delta n}, \quad (7.81)$$

где гравитационная задержка $\tau_{ГП}$, в силу изотропности свойств гравитационного поля, определится формулой (7.73);

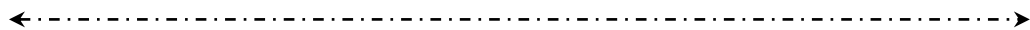
$$\tau_{\downarrow}^{\Omega} = \frac{\theta_{1E}}{c} \int_{R_2}^{R_1} \left\{ -[\vec{\Omega R}] + \frac{[\vec{\Omega R}]^2}{2c^2} + \frac{1}{2c^2} ([\vec{\Omega R}] \vec{e})^2 \right\} d\vec{R}, \quad (7.82)$$

$$\tau_{\downarrow}^{\Delta n} = \frac{\theta_{1E}}{c} \int_{R_1}^{R_2} \left[\Delta n_{0\downarrow}(R, t) + \frac{\partial n_{\downarrow}(R, t)}{\partial \omega} \Delta \omega \right] dR. \quad (7.83)$$

Полное время запаздывания запросной оптической волны определяется суммой задержек (7.40) и (7.41):

$$\begin{aligned} \tau_{\uparrow\downarrow}^E &= \frac{2R}{c} \left[1 - \frac{\mu_e}{R_e c^2} - \frac{1}{2c^2} (\Omega_e R_e \cos \psi_{1E})^2 \right] + 2\tau_{ГП} + \\ &+ \frac{\theta_{1E}}{c} \int_{R_2}^{R_1} \left\{ \frac{[\vec{\Omega R}]^2}{2c^2} + \frac{1}{2c^2} ([\vec{\Omega R}] \vec{e})^2 \right\} d\vec{R} + (\tau_{\uparrow}^{\Delta n} + \tau_{\downarrow}^{\Delta n}), \end{aligned} \quad (7.84)$$

где гироскопическая задержка (эффект Саньяка) компенсируется.



Если пренебречь гироскопическими эффектами второго порядка и невзаимностью материала волокна, получаем:

$$\tau_{\uparrow\downarrow}^E = \frac{2R}{c} \left[1 - \frac{\mu_e}{R_e c^2} \right] + 2\tau_{GP} + \frac{2}{c} \int_{R_1}^{R_2} \left[\Delta n_0(R, t) + \frac{\partial n(R, t)}{\partial \omega} \Delta \omega \right] dR. \quad (7.85)$$

Частоту волны найдем на основе соотношений (7.65) и (7.76):

$$\omega_{\uparrow\downarrow} = \omega_1 \frac{1 + \theta_{1E} \int_{R_2}^{R_1} \left[\Delta \dot{n}_{0\downarrow} + \frac{\partial \dot{n}_{\downarrow}(R, t)}{\partial \omega} \Delta \omega \right] dR}{1 + \theta_{1E} \int_{R_1}^{R_2} \left[\Delta \dot{n}_{0\uparrow} + \frac{\partial \dot{n}_{\uparrow}(R, t)}{\partial \omega} \Delta \omega \right] dR}, \quad (7.86)$$

откуда следует, что в запросной оптической линии релятивистское смещение полностью компенсируется.

Фазу волны найдем по аналогии с формулами (7.66) и (7.69) для свободного пространства. Используя (7.84), получаем:

$$\Delta \Phi_{\uparrow\downarrow} = \omega_1 \left\{ \frac{2R}{c} \left[1 - \frac{\mu_e}{R_e c^2} - \frac{1}{2c^2} (\Omega_e R_e \cos \psi_{1E})^2 \right] + \right. \\ \left. + 2\tau_{GP} + (\tau_{\uparrow}^{\Omega} + \tau_{\downarrow}^{\Omega}) + (\tau_{\uparrow}^{\Delta n} + \tau_{\downarrow}^{\Delta n}) \right\}. \quad (7.87)$$

Пренебрегая эффектами второго порядка малости, на основе (7.85) находим приближенную формулу:

$$\Delta \Phi_{\uparrow\downarrow} = \omega_1 \left\{ \frac{2R}{c} \left[1 - \frac{\mu_e}{R_e c^2} \right] + 2\tau_{GP} + \right. \\ \left. + \frac{2}{c} \int_{R_1}^{R_2} \left[\Delta n_0(R, t) + \frac{\partial n(R, t)}{\partial \omega} \Delta \omega \right] dR \right\}. \quad (7.88)$$

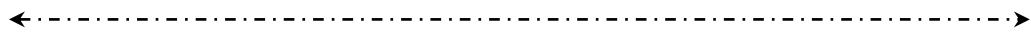
7.5. Выводы к разделу 7

1. Околосреднее пространство-время в ITRS можно представить как оптически плотную «гравитационную среду», учитывающую влияние потенциалов статических гравитационных полей Земли, Луны и Солнца, гравитационных потенциалов полей центробежных сил инерции, а также влияние атмосферы. С точки зрения космической релятивистской метрологии эта среда обладает следующими свойствами:

- изотропностью преломляющих свойств статических гравитационных полей Земли и ближайших небесных тел;
- анизотропностью преломляющих свойств вследствие вращения системы отсчета по причине их существенной зависимости от направления распространения волны. Это свойство вызывает инверсию параметров распространения встречных электромагнитных волн;
- неоднородностью преломляющих свойств вдоль радиус-вектора, что вызывает рефракцию радиоволн;
- свойством вращения плоскости поляризации (по аналогии с оптикой – оптической активностью);
- свойством гравитационного преобразования собственной частоты электромагнитного излучения вдоль трассы распространения. Коэффициент преобразования частоты не зависит от свойств атмосферы, от скорости движения источника и приемника радиоволны и определяется только разностью гравитационных потенциалов на концах трассы распространения;
- свойством изменения масштаба собственного времени в зависимости от статического и векторного гравитационных потенциалов в точках размещения измерительных стандартов частоты и времени, а также от скорости их движения в системе ITRS.

2. Распространение радиоволн в наземно-космической радиолинии характеризуется следующими релятивистскими эффектами:

- релятивистским запаздыванием, которое определяется гравитационной задержкой в поле Земли, Луны и Солнца, а также гироскопической задержкой, принципиально не зависящей от преломляющих свойств атмосферы;
- релятивистским эффектом запаздывания вследствие изменения масштаба собственного времени в точке измерений, причем масштаб времени для наземных и космических измерителей на разных орбитах существенно различны;



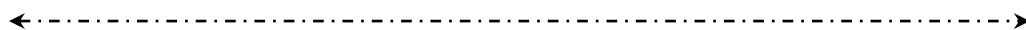
- релятивистским эффектом изменения частоты волны, который зависит от разности гравитационных потенциалов на концах трассы и разности квадратов скоростей движения излучателя и приемника волны;
- эффектом релятивистской рефракции, который в системе ITRS суммируется с классическим эффектом скоростной аберрации;
- релятивистским эффектом поворота плоскости поляризации, который определяется разностью координат излучателя и приемника по оси OZ системы ITRS.

В запросной наземно-космической радиолинии гироскопический эффект и эффект поворота плоскости поляризации компенсируются, другие рассмотренные эффекты удваиваются.

3. Распространение оптических волн в глобальных ВОЛС характеризуется следующими релятивистскими эффектами:

- релятивистским запаздыванием оптической волны в ВОЛС, которое определяется масштабом собственного времени наземных измерительных часов, гравитационной задержкой в поле Земли, Луны и Солнца, а также гироскопической задержкой, которая принципиально не зависит от преломляющих свойств материала волокна;
- релятивистским смещением частоты принимаемого сигнала в ВОЛС, которое определяется только разностью гравитационных потенциалов между точками приема и излучения;
- релятивистский поворотом плоскости поляризации в волокне, который определяется только разностью координат источника и приемника волны по оси OZ .

В запросной оптической линии эффект поворота плоскости поляризации и гироскопический эффект компенсируются, остальные рассмотренные эффекты удваиваются.



ЧАСТЬ IV. ПРИКЛАДНАЯ РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕТРОЛОГИЯ ОКОЛОЗЕМНОГО ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

8. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕТРОЛОГИЯ ВРЕМЕНИ И ЧАСТОТЫ В ГЛОБАЛЬНЫХ НАВИГАЦИОННЫХ СПУТНИКОВЫХ СИСТЕМАХ

8.1. Исходные соотношения, определяющие взаимные релятивистские смещения частоты и времени спутниковых часов и Центрального синхронизатора в системе ГЛОНАСС

В качестве шкалы базового системного времени ГЛОНАСС принята непрерывная шкала времени, формируемая на основе шкалы времени Центрального синхронизатора системы, который оснащен водородными стандартами частоты с суточной нестабильностью $2 \cdot 10^{-15}$ и суточным уходом шкалы времени примерно 170 пс [235]. Нестабильность шкалы времени Центрального синхронизатора в период до 2020 г. предполагается повысить до значения $2 \cdot 10^{-16}$ [236], что соответствует суточному уходу наземной шкалы времени около 17 пс.

Навигационные КА «Глонасс-М» системы ГЛОНАСС в настоящее время оснащены высокостабильными стандартами частоты, суточная нестабильность которых составляет $(1-0,5) \cdot 10^{-13}$ [237]. В перспективе предполагается размещение на борту навигационных КА «Глонасс-К2» стандартов частоты с нестабильностью $(1-0,5) \cdot 10^{-15}$ и суточным уходом бортовой шкалы времени около 0,1 нс.

Бортовые рубидиевые стандарты частоты и времени навигационных спутников ГНСС GPS имеют нестабильность порядка $(1-3) \cdot 10^{-14}$ с суточным уходом шкалы $(1-3)$ нс, а бортовые водородные стандарты частоты и времени системы GALILEO имеют нестабильность $1 \cdot 10^{-14}$ (суточный уход шкалы примерно 1 нс).

Для исключения влияния релятивистских явлений на шкалу наземного синхронизатора их необходимо вычислить и скомпенсировать с относительной погрешностью, которая примерно на порядок меньше значения относительной нестабильности. Кроме того, в реестр учитываемых релятивистских смещений необходимо включить те из них, максимальная величина которых примерно на порядок меньше величины нестабильности.

Поэтому для современного Центрального синхронизатора допустимая относительная ошибка учета и компенсации релятивистского смещения частоты и времени составляет около 10^{-16} (суточный уход шкалы порядка 10 пс), а для перспективного хроноизатора -10^{-17} , что соответствует допустимому смещению шкалы за сутки около 1 пс. Перечень релятивистских эффектов, которые необходимо учитывать, установим на основе исследований, проведенных в разделах 3 и 4.

Для спутниковых бортовых стандартов с нестабильностью порядка $1 \cdot 10^{-14}$ также необходимо учесть релятивистские смещения с относительной величиной примерно на порядок меньше, т.е. превышающие величину $1 \cdot 10^{-15}$. Это соответствует допустимому релятивистскому смещению около 0,1 нс. Предыдущие исследования, проведенные в разделе 4, позволяют сделать вывод, что наиболее значимыми для орбитальных часов являются орбитальное смещение частоты и времени, определяемое высотой орбиты, эффект, вызванный эллиптичностью орбиты спутника, а также эффект влияния второй зональной гармоники гравитационного потенциала. Эффекты влияния приливных потенциалов Луны и Солнца на средневисотных орбитах ГНСС при существующей стабильности бортовых СЧВ можно считать незначительными. Вопрос об учете смещений, вызванных другими причинами, будет рассмотрен ниже. В известных публикациях [28, 190, 238, 239] точность учета релятивистских эффектов в ГНСС недостаточна.

В связи с изложенным, в качестве основных формул для расчета взаимных релятивистских смещений наземных и орбитальных атомных часов ГНСС примем формулы (4.13) и (4.14). С учетом замечания о незначительности влияния высших гармоник потенциала на бортовые часы в этих формулах вводим замены $\Delta\tau_C^n = \Delta\tau_C^{n2}$, $\Delta f_C^n = \Delta f_C^{n2}$, а с учетом незначительности лунно-солнечного влияния – условие $\Delta\tau_{MS}^C = \Delta f_{MS}^C = 0$. Учитывая формулы (4.26) и (4.32), которыми определяется основной релятивистский сдвиг $\Delta\tau_P^{ocn}$ в формуле (4.13), искомое релятивистское расхождение спутниковых и наземных часов получаем в виде:

$$\Delta\tau_P = \tau_c - \tau = \int_{\tau_H}^{\tau} \frac{\Delta f_P}{f_0} d\tau = \frac{1}{c^2} \left(\Phi_0 - \frac{3\mu_e}{2a_0} + \frac{3\mu_e \Delta a}{2a_0^2} \right) (\tau - \tau_H) + \Delta\tau_P^{2n} + \Delta\tau_c^{n2} - \Delta\tau_{MS}^0 - \Delta\tau_0^\Omega, \quad (8.1)$$

←.....→
 где $a_0 = a - \Delta a$ – среднее значение большой полуоси для всех спутников системы; a – фактическое значение большой полуоси орбиты спутника, причем, $\Delta a \ll a_0$; Δf_p – релятивистское смещение частоты в виде (4.14) с учетом сделанных замечаний; τ – текущее время по базовой наземной шкале (индекс «0» для упрощения записи опускаем); τ_H – начальный момент интегрирования по базовому времени (момент синхронизации); $\Delta \tau_p^{rel}$ – «эллиптическая» составляющая релятивистского смещения времени, которая определяется формулами (4.27), (4.34), (4.35); $\delta \tau_p^{n2}$ – смещение, вызванное влиянием второй зональной гармоникой через потенциал и через искажение орбиты, которое определяется в виде (4.73); $\Delta \tau_{MS}^0$ – приливное Лунно-Солнечное смещение шкалы времени наземного хронизатора, определяемое формулами (4.78)-(4.81); $\Delta \tau_0^\Omega$ – смещение шкалы времени хронизатора вследствие неравномерности вращения Земли, определяемое формулами (4.88)-(4.94).

Значение Φ_0 в формуле (8.1), в соответствии с формулой (4.16), определяется в виде:

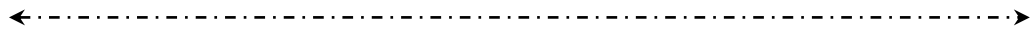
$$\Phi_0 = \varphi_e^0 + \frac{1}{2} \Omega_e^2 \rho_0^2 \cos^2 \psi_0, \quad (8.2)$$

где ψ_0 – геоцентрическая широта места наземных часов Центрального синхронизатора. Входящий в эту формулу потенциал ГПЗ в точке стояния часов хронизатора φ_e^0 определяется в общем случае соотношениями (2.54) – (2.56) при $\rho = \rho_0$, $\psi = \psi_0$, $\lambda = \lambda_0$:

$$\varphi_e^0 = \frac{\mu_e}{\rho_0} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n P_n(\sin \psi_0) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n (C_{nm} \cos m\lambda_0 + S_{nm} \sin m\lambda_0) P_{nm}(\sin \psi_0) \right], \quad (8.3)$$

где

$$P_2^0 = \frac{3}{2} \sin^2 \psi_0 - \frac{1}{2}; \quad (a) \quad P_3^0 = \frac{5}{2} \sin^3 \psi_0 - \frac{3}{2} \sin \psi_0 \quad (б) \quad (8.4)$$



– значения полиномов Лежандра второго и третьего порядка для точки стояния Центрального синхронизатора, определяемые формулами (4.10) и (4.11). Высокая точность расчета потенциала в соответствии с рядом разложения по сферическим функциям (8.3) предполагает учет значительного числа членов этого ряда. Действительно, нетрудно подсчитать, что только коэффициент при третьей зональной гармонике $J_3 = -2,532 \cdot 10^{-6}$ на суточном интервале дает вклад, составляющий 0,15 нс, что превышает установленный выше уровень допустимых ошибок расчета. Последующие зональные, секториальные и тессеральные гармоники имеют такой же порядок величины, который достаточно медленно падает с ростом степени и порядка членов разложения.

В этой связи рассмотрим альтернативный путь расчета величины суммы (8.2). Рассмотренная сумма, вычисленная нами в невращающейся системе отсчета ICRS, представляет собой сумму гравитационных потенциалов во вращающейся системе отсчета: потенциала истинного гравитационного поля и потенциала центробежного поля, вызванного вращением Земли. Действительно, согласно определению метрического тензора для вращающейся земной системы ITRS в виде (2.97), его пространственно-временной компонент можно представить в виде:

$$g_{00} = -\left(1 - \frac{2\varphi_e}{c^2} - G_e^2\right) = -\left(1 - \frac{2\varphi_e}{c^2} - \left[\overline{\Omega R_e}\right]^2\right) = -\left(1 - \frac{2\Phi_e}{c^2}\right), \quad (8.5)$$

откуда для точки стояния наземных часов, обозначаемой индексом «0», следует определение (8.2).

Как отмечалось в разделе 3.3.1, на вращающейся Земле есть поверхность, которая называется поверхностью равного потенциала, или эквипотенциальной поверхностью, с потенциалом $\varphi_G = const$ вне зависимости от сферических координат ψ_0, λ_0 . Это поверхность геоида, для которой

$$\varphi_G = \varphi_{eG} + \frac{1}{2} \left[\overline{\Omega R_{eG}}\right]^2 = const, \quad (8.6)$$

причем индекс «G» указывает на принадлежность соответствующих величин точкам этой поверхности.

←----->

Наземные базовые часы Центрального синхронизатора в общем случае располагаются не на поверхности геоида, а на некоторой высоте над ним. В связи с этим гравитационный потенциал Φ_0 (8.2) в точке размещения наземных часов представим через потенциал на поверхности геоида φ_G в виде:

$$\Phi_0 = \varphi_G + \int_0^{H_{opt}} \frac{\partial \Phi_e}{\partial H} dH = \varphi_G - \int_0^{H_{opt}} g(H) dH \approx \varphi_G - g_0 H_{opt}, \quad (8.7)$$

где H_{opt} – ортометрическая высота рассматриваемой точки размещения часов, отсчитываемая от поверхности геоида, находящегося в теле Земли; g_0 – среднее значение ускорения свободного падения вдоль ортометрической высоты, соответствующей точке размещения часов. Это соотношение справедливо для небольших высот, когда выполняется условие $\Delta H_{opt} \ll R_e$.

Входящий в эту формулу потенциал геоида (8.6) наиболее просто вычисляется для точки на экваторе, когда геоцентрическая высота $\rho = R_e$, а геоцентрическая широта $\psi = 0$. Используя соотношения (8.3) и (8.4), находим [159]:

$$\varphi_G \approx \frac{\mu_e}{R_e} \left(1 + \frac{J_2}{2} \right) + \frac{\Omega_e^2 R_e^2}{2} = 6,26368534 \cdot 10^7 \text{ м}^2 / \text{с}^2 = const. \quad (8.8)$$

Учитывая выражения (8.7) и (8.8), соотношение (8.1) приводим к виду:

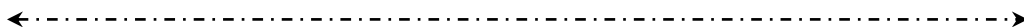
$$\Delta \tau_p = \frac{\Delta f_p^{осн}}{f_0} (\tau - \tau_H) + \Delta \tau_p^{эл} + \Delta \tau_c^{n^2} - \Delta \tau_{MS}^0 - \Delta \tau_0^\Omega, \quad (8.9)$$

где

$$\frac{\Delta f_p^{осн}}{f_0} = \frac{f_C - f_0}{f_0} = \left(\frac{\varphi_G}{c^2} - \frac{3\mu_e}{2c^2 a_0} \right) - \frac{g_0 H_{opt}}{c^2} + \frac{3\mu_e}{2c^2 a_0^2} \Delta a \quad (8.10)$$

– основная составляющая релятивистского сдвига частот задающих генераторов спутника f_C и Центрального синхронизатора f_0 .

Оценим величину составляющих, входящих в формулу (8.9), для различных ГНСС.



8.2. Оценка величины релятивистских смещений бортового времени и частоты в ГНСС ГЛОНАСС

В формуле (8.9) первый член описывает основную, линейную составляющую релятивистского расхождения бортовой и наземной шкалы времени. При этом относительное релятивистское смещение частоты, определяемое выражением (8.10), – величина постоянная, поскольку определяется местоположением наземных стационарных часов и неизменными характеристиками круговой орбиты спутника.

Величина первого члена в скобке в этом соотношении определяется известным значением потенциала геоида (8.8). Нетрудно подсчитать, что при $a_0 = 25,495600 \cdot 10^6$ м, когда среднее значение высоты спутника над экватором равно 19117,464 км, величина выражения в скобке составляет:

$$\frac{(\Delta f_p^{очн})_1}{f_0} = \frac{(f_c - f_0)_{Pl}^{очн}}{f_0} = \frac{\varphi_G}{c^2} - \frac{3\mu_e}{2c^2 a_0} = +4,36 \cdot 10^{-10}, \quad (8.11)$$

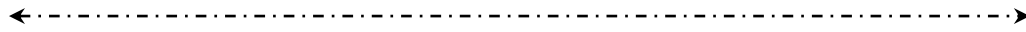
т.е., как и следовало ожидать, спутниковые часы идут быстрее наземных.

Величина релятивистского частотного смещения, определяемого вторым членом формулы (8.10), для точки размещения Центрального синхронизатора ГНСС ГЛОНАСС (г. Щелково Московской области, $H \approx 170$ м, $g_0 \approx 9,81$ мс⁻²) составляет:

$$\frac{(\Delta f_p^{очн})_2}{f_0} = -\frac{g_0 H_{opt}}{c^2} \approx -1,86 \cdot 10^{-14}, \quad (8.12)$$

что соответствует сдвигу времени 1,6 нс в сутки. Для другого синхронизатора системы, размещенного на другой высоте, например, для резервного, смещение частоты (8.12) и, соответственно, смещение времени будут другими. Следует отметить, что из-за изменчивости высоты геоида, например, по причине приливных явлений, величина смещения, определяемого формулой (8.12), является усредненной.

Для оценки величины последнего члена формулы (8.10) обратимся к сводке параметров орбит спутников ГЛОНАСС по данным альманаха системы ГЛОНАСС на 11.06.2016 г. [237]. Выделим для анализа из списка данных для 24 КА ГЛОНАСС данные по двум спутникам – с максимальным и минимальным периодами обращения:



КА № 12:

- период обращения по орбите: $T_{12} = 40545,6$ с (максимальный период);
- размер большой полуоси орбиты $a_{12} = 25,508710 \cdot 10^6$ м;
- эксцентриситет орбиты $e_{12} = 0,0036$;
- $\Delta a_{12} = a_{12} - a_0 = 13110$ м;
- наклонение орбиты $64,85$ град.

КА № 15:

- период обращения по орбите: $T_{15} = 40543,61$ с (минимальный период);
- размер большой полуоси орбиты $a_{15} = 25,507875 \cdot 10^6$ м;
- эксцентриситет орбиты $e_{15} = 0,00207$;
- $\Delta a_{15} = a_{15} - a_0 = 12275$ м;
- наклонение орбиты $65,6$ град.

Нетрудно видеть, что размеры больших полуосей орбит этих КА различаются на 835 м.

Используя эти данные, получаем оценки величины добавочных частотных релятивистских сдвигов, определяемых различием размеров орбит спутников №12 и №15 в соответствии с последним членом формулы (8.10):

$$\begin{aligned} \frac{(\Delta f_p^{очн})_{12}}{f_0} &= + \frac{3\mu_e}{2c^2 a_0^2} \Delta a_{12} = +1,34 \cdot 10^{-13}, \\ \frac{(\Delta f_p^{очн})_{15}}{f_0} &= + \frac{3\mu_e}{2c^2 a_0^2} \Delta a_{15} = +1,26 \cdot 10^{-13}, \end{aligned} \quad (8.13)$$

причем разность между этими смещениями, определяемая разностью размеров полуосей орбит, составляет $0,8 \cdot 10^{-14}$. Для остальных КА ГЛОНАСС эта разность меньше.

В соответствии с формулой (8.9) и оценками частотных смещений (8.13), добавочные суточные релятивистские смещения бортового времени НКА ГЛОНАСС вследствие различия высот их орбит находятся, в зависимости от номера КА, в интервале $\Delta \tau_p^{\Delta a} = (11,58 - 10,88)$ нс = 0,3 нс.

Из трех рассмотренных выше форм представления релятивистского смещения τ_p^{2i} в формуле (8.1), вызванного эллиптичностью орбиты КА ГЛОНАСС, а именно: (4.27), (4.34) и (4.35), для проведения оценок наиболее удобна форма (4.27).

Поскольку орбиты навигационных спутников близки к круговым, то, ограничиваясь второй степенью эксцентриситета, для функций Бесселя (4.25), входящих в это соотношение, получаем: $J_1(e) = e/2$, $J_2(2e) = e^2/2$. В результате формула (4.27) принимает вид:

$$\begin{aligned} \Delta\tau_p^{2i} = & -\frac{2\sqrt{\mu_e a}}{c^2} e \left[\sin \Omega_c (\tau - \tau_{II}) - \sin \Omega_c (\tau_H - \tau_{II}) \right] - \\ & -\frac{\sqrt{\mu_e a}}{c^2} e^2 \left[\sin 2\Omega_c (\tau - \tau_{II}) - \sin 2\Omega_c (\tau_H - \tau_{II}) \right]. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Отсюда для спутника № 12 на основе приведенных выше данных получаем значения амплитуд первой и второй гармоники колебания релятивистского смещения бортового времени, соответственно :

$$\tau_{1\Omega}^{2i} \approx 8,08 \cdot 10^{-9} \text{ с} = 8,08 \text{ нс}, \quad \tau_{2\Omega}^{2i} \approx 15 \cdot 10^{-12} \text{ с} = 15 \text{ пс}. \quad (8.15)$$

Для спутника № 15 аналогично получаем:

$$\tau_{1\Omega}^{2i} \approx 4,48 \cdot 10^{-9} \text{ с} = 4,48 \text{ нс}, \quad \tau_{2\Omega}^{2i} \approx 4,5 \cdot 10^{-12} \text{ с} = 4,5 \text{ пс}. \quad (8.16)$$

Таким образом, для околокруговых орбит КА ГЛОНАСС при существующем уровне стабильности бортовых стандартов частоты учет второй гармоники «эллиптического» релятивистского колебания бортовой шкалы времени нецелесообразен.

Выражение (4.73) для релятивистского смещения бортового времени КА ГЛОНАСС, вызванного влиянием второй зональной гармоники потенциала ГПЗ, с учетом соотношения (4.55) представим в виде:

$$\begin{aligned} \delta\tau_c^{n2} = & -\frac{7\mu_e R_e^2 J_2}{2c^2 a^3} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) (\tau - \tau_H) \\ & -\frac{J_2 \sqrt{\mu_e a}}{2c^2} \left(\frac{R_e}{a} \right)^2 \sin^2 i \left[\sin 2\Omega_c (\tau - \tau_{II}) - \sin 2\Omega_c (\tau_H - \tau_{II}) \right], \end{aligned} \quad (8.17)$$

где первый член определяет линейный набег времени, а второй – периодический набег с периодом около 6 часов.

При исходных данных для орбиты спутника № 12 из этой формулы получаем постоянное относительное релятивистское смещение частоты (коэффициент при первом члене), равное $8,4 \cdot 10^{-15}$. На суточном интервале времени $\tau - \tau_H$ это постоянное смещение частоты приводит к линейному релятивистскому набегу времени около 0,73 нс. При тех же исходных данных амплитуда колебания релятивистского смещения времени (коэффициент при втором члене) составляет 29 пс.

Два последних члена выражения (8.1) по величине существенно меньше предыдущих (см. раздел 4.4.1): это частотные лунно-солнечные смещения, которые достигают величины порядка 10^{-17} и имеют составляющие длиннопериодические (полугодовые и полумесячные), а также короткопериодические (суточные и полусуточные). Как отмечалось, длиннопериодические смещения наземной шкалы времени за 40 суток достигают 0,04 нс. Поэтому для современного Центрального синхронизатора учет этих эффектов пока необязателен.

Из эффектов неравномерности вращения Земли (см. раздел 4.5) достаточно значительным является эффект нутации оси вращения Земли, который вызывает релятивистское частотное смещение наземного генератора с суточным периодом и амплитудой порядка $1,2 \cdot 10^{-16}$. Это приводит к суточным колебаниям шкалы времени Центрального синхронизатора с амплитудой около 16 пс. Эффект девиации угловой скорости Земли имеет годовой период и вызывает релятивистское отклонение частоты наземного стандарта в пределах $(1-6) \cdot 10^{-16}$. Как отмечалось, в течение 100 суток смещение шкалы времени Центрального синхронизатора по этой причине может достигать 2,5 нс, однако на суточном интервале синхронизации в системе ГЛОНАСС это смещение не превышает 0,03 нс.

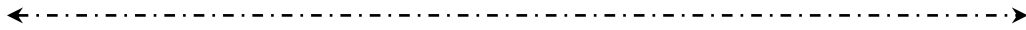
Учитывая предыдущие оценки и ограничиваясь учетом эффектов, превышающих 0,1 нс в сутки, формулу для расчета релятивистских смещений в ГНСС ГЛОНАСС (8.9) приводим к виду:

$$\Delta \tau_P^{ГЛ} = \tau_C - \tau = \frac{\Delta f_P^{осн}}{f_0} (\tau - \tau_H) + \Delta \tau_c^- + \Delta \tau_c^{\approx} , \quad (8.18)$$

где

$$\left(\frac{\Delta f_P^{осн}}{f_0} \right)_{ГЛОН} = \frac{f_C - f_0}{f_0} = \left(\frac{\varphi_G}{c^2} - \frac{3\mu_e}{2c^2 a_0} \right) = +4,36 \cdot 10^{-10} \quad (8.19)$$

– основная составляющая частотного смещения в системе часов «спутник – Земля»;



$$\Delta\tau_c^- = \left[\frac{3\mu_e}{2c^2 a_0^2} \Delta a - \frac{g_0 H_{opt}}{c^2} - \frac{7\mu_e R_e^2 J_2}{2c^2 a^3} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \right] (\tau - \tau_H) \quad (8.20)$$

– линейный набег релятивистского смещения бортовой шкалы времени;

$$\Delta\tau_c^\approx = -\frac{2\sqrt{\mu_e a}}{c^2} e \left[\sin \Omega_C (\tau - \tau_{II}) - \sin \Omega_C (\tau_H - \tau_{II}) \right] \quad (8.21)$$

– периодический сдвиг бортовой шкалы времени, имеющий частоту обращения спутника по орбите (τ_H, τ_{II} – соответственно момент начала интегрирования и время прохождения перигея).

Пренебрегая в формуле (8.18) линейными сдвигами времени вида (8.20), приходим к формуле, принятой в настоящее время для описания релятивистских эффектов при существующем уровне точности в системе ГЛОНАСС [189]:

$$\begin{aligned} \Delta\tau_p = & \left(\frac{\varphi_G}{c^2} - \frac{3\mu_e}{2c^2 a_0} \right) (\tau - \tau_H) - \\ & - \frac{2\sqrt{\mu_e a}}{c^2} e \left[\sin \Omega_C (\tau - \tau_{II}) - \sin \Omega_C (\tau_H - \tau_{II}) \right] \end{aligned} \quad (8.22)$$

8.3. Методы релятивистской синхронизации бортовых и наземных шкал времени в системе ГЛОНАСС

8.3.1. Комбинированный аналогово-цифровой метод

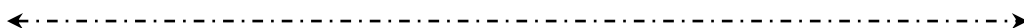
Из перечня рассмотренных в разделе 3 методов релятивистской синхронизации в данном случае наиболее приемлем комбинированный метод, при котором одновременно используется частотная (аналоговая) коррекция и временная цифровая (расчетная) коррекция.

Поэтому, вводя в эту формулу (8.18) постоянную корректирующую поправку по частоте для задающего генератора бортовых часов Δf_p^{kr} (аналоговая коррекция) и корректирующую расчетную поправку в бортовую шкалу времени $\Delta\tau_p^{kr}$ (расчетная цифровая коррекция), получаем:

$$\Delta\tau_p = \tau_c - \tau = \frac{\Delta f_p^{очн} + \Delta f_p^{kor}}{f_0} (\tau - \tau_H) + \Delta\tau_c^- + \Delta\tau_c^\approx + \Delta\tau_c^{kor}, \quad (8.23)$$

где основные составляющие релятивистских смещений определены формулами (8.19)–(8.21).

Отсюда при выполнении условий:



$$\frac{\Delta f_P^{kor}}{f_0} = -\frac{\Delta f_P^{осн}}{f_0} = -\left(\frac{\varphi_G}{c^2} - \frac{3\mu_e}{2c^2 a_0}\right) = -4,36 \cdot 10^{-10}, \quad (8.24)$$

$$\Delta \tau_c^{kor} = -(\Delta \tau_c^- + \Delta \tau_c^{\approx}) \quad (8.25)$$

из формулы (8.23) получаем результат полной компенсации релятивистских смещений времени в виде $\Delta \tau_P = 0$, откуда следует релятивистская синхронизация спутниковой и наземной шкал времени: $\tau_C = \tau$.

В настоящее время в системе ГЛОНАСС с целью исключения линейных релятивистских набегов времени частота бортовых стандартов навигационных спутников смещена в соответствии с условием (8.24), а коррекция переменной составляющей релятивистского расхождения выполняется путем введения в соответствии с (8.25) корректирующей цифровой поправки в бортовую шкалу времени. При условии пренебрежения линейным набегом, т.е. при $\Delta \tau_c^- = 0$, корректирующая расчетная цифровая поправка имеет вид:

$$\Delta \tau_c^{kor} = -\Delta \tau_c^{\approx} = \frac{2\sqrt{\mu_e a}}{c^2} e \left[\sin \Omega_C (\tau - \tau_{II}) - \sin \Omega_C (\tau_H - \tau_{II}) \right], \quad (8.26)$$

где второй член является величиной постоянной.

8.3.2. Альтернативный метод релятивистской синхронизации на основе численного интегрирования

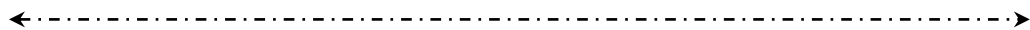
Другой метод релятивистской синхронизации возможен на основе формулы (4.102), основанной на численном интегрировании релятивистских смещений бортового спутникового времени по результатам измерений текущего радиус-вектора и скорости спутника. Используя соотношение (8.7), а также связь $a = a_0 + \Delta a$, где $\Delta a \ll a, a_0$, эту формулу приводим к виду:

$$\Delta \tau_P = \frac{1}{c^2} \left(\varphi_G - \frac{3\mu_e}{2a_0} \right) (\tau - \tau_H) + \frac{1}{c^2} \int_{\tau_H}^{\tau} \left(\frac{3\mu_e}{2a_0} - g_0 H_{opt} - \frac{\mu_e}{\rho_c} - \frac{V_c^2}{2} \right) d\tau + \Delta \tau_P^w, \quad (8.27)$$

где

$$\Delta \tau_P^w = \sum_{i=2}^{\infty} \Delta \tau_P^{ni} + \Delta \tau_{MS}^c - \Delta \tau_{MS}^0 - \Delta \tau_0^{\Omega} \quad (8.28)$$

– смещение времени, вызванное только возмущающими гравитационными потенциалами: зональными и другими гармониками потенциала ГПЗ ($\Delta \tau_P^{ni}$), влиянием приливных потенциалов Луны и Солнца на шкалу



времени спутника ($\Delta\tau_{MS}^c$) и наземного хронизатора ($\Delta\tau_{MS}^0$), а также изменением центробежного потенциала вследствие неравномерности вращения Земли ($\Delta\tau_0^\Omega$).

Выше мы ограничились учетом только тех релятивистских смещений времени в системе ГЛОНАСС, которые превышают 0,1 нс. Поэтому на основе предыдущих оценок последними тремя смещениями из четырех перечисленных пренебрегаем. Из возмущающих потенциалов гармоник ГПЗ по той же причине оставляем лишь эффект влияния потенциала второй зональной гармоники в виде (4.57), где второй периодический член также пренебрежимо мал. В результате этих упрощений имеем:

$$\Delta\tau_P^W = \delta\tau_{P\varphi}^{n2} = -\frac{\mu_e R_e^2 J_2}{2c^2 a_0^3} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i\right) (\tau - \tau_H). \quad (8.29)$$

В результате формула (8.27) приобретает окончательный вид:

$$\begin{aligned} \Delta\tau_P = \tau_C - \tau = & \frac{1}{c^2} \left(\varphi_G - \frac{3\mu_e}{2a_0} \right) (\tau - \tau_H) - \\ & - \frac{1}{c^2} \left[g_0 H_{opt} + \frac{\mu_e R_e^2 J_2}{2a_0^2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i\right) \right] (\tau - \tau_H) + \\ & + \frac{1}{c^2} \int_{\tau_H}^{\tau} \left(\frac{3\mu_e}{2a_0} - \frac{\mu_e}{\rho_c} - \frac{V_c^2}{2} \right) d\tau, \end{aligned} \quad (8.30)$$

где ρ_c, V_c – текущий радиус-вектор и скорость спутника в невращающейся системе отсчета, которые могут быть получены на основе эфемеридной информации, передаваемой со спутника.

Вводя корректирующий частотный сдвиг $\frac{\Delta f_P^{kor}}{f_0}$ и поправку на смещение шкалы времени $\Delta\tau_P^{kor}$, получаем:

$$\begin{aligned} \Delta\tau_P = \tau_C - \tau = & \left(\frac{\varphi_G}{c^2} - \frac{3\mu_e}{2a_0 c^2} - \frac{\Delta f_P^{kor}}{f_0} \right) (\tau - \tau_H) - \\ & - \frac{1}{c^2} \left[g_0 H_{opt} + \frac{\mu_e R_e^2 J_2}{2a_0^2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i\right) \right] (\tau - \tau_H) + \\ & + \frac{1}{c^2} \int_{\tau_H}^{\tau} \left(\frac{3\mu_e}{2a_0} - \frac{\mu_e}{\rho_c} - \frac{V_c^2}{2} \right) d\tau + \Delta\tau_P^{kor}. \end{aligned} \quad (8.31)$$

←----->

При выполнении условия коррекции значения частоты бортового стандарта (8.24), а также при условии коррекции бортовой шкалы времени

$$\Delta\tau_P^{kor} = \frac{1}{c^2} \left[g_0 H_{opt} + \frac{\mu_e R_e^2 J_2}{2a_0^2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \right] (\tau - \tau_H) - \frac{1}{c^2} \int_{\tau_H}^{\tau} \left(\frac{3\mu_e}{2a_0} - \frac{\mu_e}{\rho_c} - \frac{V_c^2}{2} \right) d\tau \quad (8.32)$$

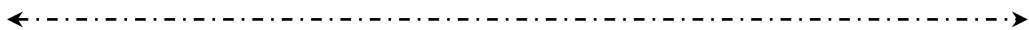
достигается условие релятивистской синхронизации Центрального синхронизатора и бортовых часов спутника ГЛОНАСС: $\tau_c = \tau$.

Важная особенность рассмотренного варианта синхронизации заключается в том, что член в последней скобке формулы (8.32), определяемый текущим радиус-вектором и скоростью спутника, учитывает все возможные искажения орбиты, возникающие по разным причинам.

Согласно таблице 4.1 (раздел 4.6), наиболее существенное влияние на орбиту и, соответственно, на величину основного релятивистского сдвига оказывает вторая зональная гармоника, которая вызывает изменение высоты орбиты до 2000 м. Эффект имеет полусуточный период. Здесь важно напомнить замечание, сделанное в результате анализа формулы (4.73) и (4.74): влияние искажений орбиты на величину линейной составляющей релятивистского эффекта, вызванное второй зональной гармоникой, в 6 раз больше, нежели непосредственное влияние потенциала этой же гармоники. Другими словами, линейный эффект смещения времени (8.29) в 6 раз меньше эффекта, учитываемого последним членом в формуле (8.30).

Следующим по значимости фактором, влияющим на орбиту средне-высотных КА типа ГЛОНАСС, согласно таблице 4.1, является влияние гравитационного поля Луны: полусуточные изменения высоты орбиты по этой причине достигают $\Delta a = 300 - 400$ м. Относительное релятивистское смещение частоты по этой причине, согласно (8.13), составляет $(3 - 4) \cdot 10^{-15}$ и этот эффект учитывается формулой (8.30). Здесь же следует заметить, что эффект смещения частоты, вызванный только влиянием приливного потенциала Луны на шкалу бортового времени (см. разд. 4.4.2), составляет $0,5 \cdot 10^{-15}$, что, как и в предыдущем случае, более чем в 6 раз меньше.

Аналогичным образом учитывается влияние поля Солнца, вследствие которого изменение высоты орбиты с полусуточным периодом достигает $\Delta a = 100 - 200$ м. Соответствующее изменение основного релятивистского смещения частоты, согласно (8.13), составляет $(1 - 2) \cdot 10^{-15}$, что также существенно больше эффекта непосредственного воздействия приливного потенциала ($1,7 \cdot 10^{-16}$, см. раздел 4.4.2).



Наконец, рассмотренный способ учитывает изменение высоты орбиты, вызванное влиянием солнечного давления. Этот эффект также имеет полусуточный период, и его амплитуда изменяется примерно на 100 м в сутки, что соответствует изменению амплитуды колебания частоты $1 \cdot 10^{-15}$ в сутки.

8.4. Релятивистские смещения бортового времени для других навигационных систем и методы их компенсации

8.4.1. Релятивистские смещения времени в системе GPS

Для оценки величины релятивистских эффектов в ГНСС GPS обратимся к сводке параметров орбит 32 спутников этой системы по данным альманаха на 12.06.2016 г. [31]. Среднее значение большой полуоси орбиты для этой системы составляет: $a_0 = 26,5613 \cdot 10^6$ м. Выделим из сводки данные альманаха по следующим спутникам:

КА № 09:

- размер большой полуоси орбиты $a_{09} = 26,558668 \cdot 10^6$ м (минимальное значение из списка);
- эксцентриситет орбиты $e_{09} = 0,00054$;
- $\Delta a_{09} = a_{09} - a_0 = -2632$ м;
- наклонение орбиты $i_{09} = 54,72544$ град.

КА № 14:

- размер большой полуоси орбиты $a_{14} = 25,563429 \cdot 10^6$ м (максимальное значение из списка);
- эксцентриситет орбиты $e_{14} = 0,00874$;
- $\Delta a_{14} = a_{14} - a_0 = +2129$ м; $\Delta a_{\max} = \Delta a_{14} - \Delta a_{09} = 4761$ м;
- наклонение орбиты $i_{14} = 54,23665$ град.

КА № 21:

- размер большой полуоси орбиты $a_{21} = 26,558995 \cdot 10^6$ м;
- эксцентриситет орбиты $e_{21} = 0,02336$;
- $\Delta a_{21} = a_{21} - a_0 = -2305$ м;
- наклонение орбиты $i_{21} = 54,66423$ град.

Учитывая предыдущие оценки для ГНСС ГЛОНАСС и ограничиваясь учетом эффектов, превышающих 0,1 нс в сутки, для расчета релятивистских эффектов в ГНСС GPS принимаем формулу (8.18), которую в этом случае представляем в виде:

$$\Delta\tau_P^{GPS} = \tau_C - \tau = \frac{\Delta f_P^{очн}}{f_0} (\tau - \tau_H) + \Delta\tau_c^- + \Delta\tau_c^{\approx}, \quad (8.33)$$

где

$$\left(\frac{\Delta f_P^{очн}}{f_0} \right)_{GPS} = \frac{f_C - f_0}{f_0} = \left(\frac{\varphi_G}{c^2} - \frac{3\mu_e}{2c^2 a_0} \right) = +4,4647 \cdot 10^{-10} \quad (8.34)$$

– основная составляющая частотного смещения в системе часов «спутник GPS – Земля»;

$$\Delta\tau_c^- = \left[\frac{3\mu_e}{2c^2 a_0^2} \Delta a - \frac{g_0 H_{опм}}{c^2} - \frac{7\mu_e R_e^2 J_2}{2c^2 a^3} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \right] (\tau - \tau_H) \quad (8.35)$$

– линейный набег релятивистского смещения бортовой шкалы времени;

$$\Delta\tau_c^{\approx} = \Delta\tau_P^{\approx 3} = -\frac{2\sqrt{\mu_e a}}{c^2} e \sin E = -\frac{2\overline{R_c \vec{V}_c}}{c^2} = -\frac{2}{c^2} (XV_x + YV_y + ZV_z)_c, \quad (8.36)$$

– периодический «эллиптический» сдвиг бортовой шкалы времени, определяемый формулой (4.35) и имеющий частоту обращения спутника по орбите. Здесь (XYZ) и $(V_x V_y V_z)$ – текущие прямоугольные координаты и составляющие скорости спутника по осям невращающейся системы отсчета.

Оценим величину постоянных относительных релятивистских смещений частот бортовых генераторов спутников, определяемых составляющими в квадратных скобках (8.35). Величина относительного частотного смещения, определяемая ортометрической высотой хронизатора над поверхностью геоида, составляет, согласно (8.12), $\approx 1,1 \cdot 10^{-14}$ на каждые 100 м высоты. Соответствующий сдвиг времени достигает 0,95 нс в сутки.

Для спутников № 09 и № 14 расхождения релятивистских смещений их бортовых генераторов, вызванные отличием полуосей их орбит $\Delta a_{14}; \Delta a_{09}$ от среднего значения a_0 , составляют соответственно $-2,5 \cdot 10^{-14}$ и $2,0 \cdot 10^{-14}$. Разность между этими относительными смещениями достигает $\approx 4,5 \cdot 10^{-14}$. На суточном интервале это расхождение частот приводит к максимальному релятивистскому расхождению шкал около 3,89 нс. Расхождения шкал других спутников находятся внутри этого интервала.

Последний член в квадратных скобках существенно зависит от наклона орбиты. Принимая среднее наклонение орбит спутников GPS равным 55 град, находим, что его значение не превышает $2 \cdot 10^{-16}$, что в рассматриваемом случае несущественно.

Переменный «эллиптический» сдвиг времени (8.21) зависит в основном от эксцентриситета орбиты, и для спутника № 21 его амплитуда составляет 53 нс. Для других спутников эта величина меньше.

С учетом проведенного анализа для достижения релятивистской синхронизации системы GPS в формулу (8.18) необходимо ввести корректирующие поправки по частоте Δf_P^{kor} и времени $\Delta \tau_P^{kor-}$ и $\Delta \tau_P^{kor\approx}$. В результате остаточные релятивистские смещения определяются в виде:

$$\begin{aligned} \Delta \tau_P^{GPS} = \tau_C - \tau = & \left(\frac{\Delta f_{P_{GPS}}^{очн}}{f_0} + \frac{\Delta f_P^{kor}}{f_0} \right) (\tau - \tau_H) + \\ & + \left[\left(\frac{3\mu_e}{2c^2 a_0^2} \Delta a - \frac{g_0 H_{опм}}{c^2} \right) (\tau - \tau_H) + \Delta \tau_P^{kor-} \right] + \\ & + \left[\Delta \tau_P^{kor\approx} - \frac{2}{c^2} (XV_x + YV_y + ZV_z)_c \right], \end{aligned} \quad (8.37)$$

где условиями релятивистской синхронизации являются следующие:

$$1) \quad \frac{\Delta f_P^{kor}}{f_0} = -\frac{\Delta f_{P_{GPS}}^{очн}}{f_0} = -4,4647 \cdot 10^{-10}. \text{ Операция понижения частоты}$$

бортового стандарта на величину корректирующей поправки реализуется в системе перед запуском навигационных спутников;

$$2) \quad \Delta \tau_P^{kor\approx} = -\frac{2}{c^2} (XV_x + YV_y + ZV_z)_c. \text{ Эта операция реализуется в нави-}$$

гационных приемниках по текущим координатам и скоростям спутников;

$$3) \quad \Delta \tau_P^{kor-} = -\left(\frac{3\mu_e}{2c^2 a_0^2} \Delta a - \frac{g_0 H_{опм}}{c^2} \right) (\tau - \tau_H), \text{ где } \tau_H \text{ — момент начала}$$

интегрирования (момент начальной синхронизации). Эта операция может выполняться как на борту спутника путем коррекции бортовой шкалы, так и в навигационном приемнике, поскольку требует минимальное количество данных.

8.4.2. Релятивистские смещения в системе GALILEO

Параметры орбит навигационных спутников средневысотной системы GALILEO несколько отличаются от параметров орбит систем ГЛОНАСС и GPS: размер полуоси $a_0 = 29,6 \cdot 10^6$ м, эксцентриситет не превышает 0,2, а наклонение орбит составляет около 56 град. Поэтому релятивистский сдвиг времени в этой системе, согласно (8.18) и с учетом предыдущих вычислений, составит:

$$\Delta\tau_P^{GAL} = \tau_C - \tau = \frac{\Delta f_P^{очн}}{f_0} (\tau - \tau_H) + \Delta\tau_c^- + \Delta\tau_c^{\approx}, \quad (8.38)$$

где

$$\left(\frac{\Delta f_P^{очн}}{f_0} \right)_{GAL} = \frac{f_C - f_0}{f_0} = \left(\frac{\varphi_G}{c^2} - \frac{3\mu_e}{2c^2 a_0} \right) = +4,7218 \cdot 10^{-10} \quad (8.39)$$

– основная составляющая частотного смещения в системе часов «спутник GALILEO -Земля»;

$$\Delta\tau_c^- = \left[\frac{3\mu_e}{2c^2 a_0^2} \Delta a - \frac{g_0 H_{опт}}{c^2} \right] (\tau - \tau_H) \quad (8.40)$$

– линейный набег релятивистского смещения бортовой шкалы времени. Влияние второй зональной гармоники, в отличие от формулы (8.21), здесь пренебрежимо мало, поскольку величина составляющей в скобке

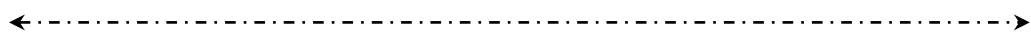
$$\left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 56^\circ \right) \approx 0,03;$$

$$\Delta\tau_c^{\approx} = \Delta\tau_P^{\approx 3} = -\frac{2\sqrt{\mu_e a}}{c^2} e \sin E = -\frac{2\vec{R}_c \vec{V}_c}{c^2} = -\frac{2}{c^2} (XV_x + YV_y + ZV_z)_c \quad (8.41)$$

– периодический «эллиптический» сдвиг бортовой шкалы времени.

В результате релятивистской синхронизации остаточные релятивистские смещения определяются формулой, подобной (8.37):

$$\begin{aligned} \Delta\tau_P^{GAL} = \tau_C - \tau = & \left(\frac{\Delta f_{P_{GAL}}^{очн}}{f_0} + \frac{\Delta f_{P_{GAL}}^{кор}}{f_0} \right) (\tau - \tau_H) + \\ & + \left[\left(\frac{3\mu_e}{2c^2 a_0^2} \Delta a - \frac{g_0 H_{опт}}{c^2} \right) (\tau - \tau_H) + \Delta\tau_P^{кор-} \right] + \\ & + \left[\Delta\tau_P^{кор\approx} - \frac{2}{c^2} (XV_x + YV_y + ZV_z)_c \right], \end{aligned} \quad (8.42)$$



где условием релятивистской синхронизации является равенство:

$$\frac{\Delta f_{P_{GAL}}^{kor}}{f_0} = -\frac{\Delta f_{P_{GAL}}^{осн}}{f_0} = -4,7218 \cdot 10^{-10}.$$

Операция понижения частоты бортового стандарта, как и в других ГНСС, реализуется в системе перед запуском навигационных спутников. Другие операции компенсации аналогичны тем, которые рассмотрены выше для GPS.

Рассмотренный метод компенсации релятивистских эффектов, как и в системе ГЛОНАСС, не учитывает влияния множества других факторов, кроме второй зональной гармоники, искажающих орбиту навигационного спутника и, как следствие, изменяющих основной релятивистский сдвиг бортового времени.

В этой связи для определения релятивистских смещений необходимо воспользоваться формулой (8.27) для рассмотренного выше альтернативного метода релятивистской синхронизации. Поскольку влияние второй зональной гармоники, согласно (8.29), для рассматриваемых орбит с наклоном 55–56 градусов пренебрежимо мало, то формула для релятивистского смещения (8.30) приобретает вид:

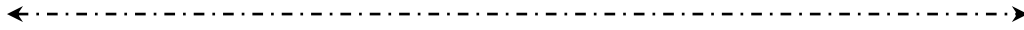
$$\begin{aligned} \Delta \tau_p^i = \tau_{Ci} - \tau = & \frac{1}{c^2} \left(\varphi_G - \frac{3\mu_e}{2a_{0i}} \right) (\tau - \tau_H) - \\ & - \frac{g_0 H_{opt}}{c^2} (\tau - \tau_H) + \frac{1}{c^2} \int_{\tau_H}^{\tau} \left(\frac{3\mu_e}{2a_{0i}} - \frac{\mu_e}{\rho_{ci}} - \frac{V_{ci}^2}{2} \right) d\tau, \end{aligned} \quad (8.43)$$

где $i = GPS; GAL$; ρ_C, V_C – текущий радиус-вектор и скорость спутника в невращающейся системе отсчета. Вводя корректирующий частотный

сдвиг $\frac{\Delta f_{Pi}^{kor}}{f_0}$ и поправку на смещение шкалы времени $\Delta \tau_{Pi}^{kor}$, получаем:

$$\begin{aligned} \Delta \tau_p^i = \tau_{Ci} - \tau = & \left(\frac{\varphi_G}{c^2} - \frac{3\mu_e}{2a_{0i}c^2} + \frac{\Delta f_{Pi}^{kor}}{f_0} \right) (\tau - \tau_H) - \\ & - \frac{g_0 H_{opt}}{c^2} (\tau - \tau_H) + \frac{1}{c^2} \int_{\tau_H}^{\tau} \left(\frac{3\mu_e}{2a_0} - \frac{\mu_e}{\rho_{ci}} - \frac{V_{ci}^2}{2} \right) d\tau + \Delta \tau_p^{kor}. \end{aligned} \quad (8.44)$$

При выполнении условия коррекции значения частоты бортового стандарта $\frac{\Delta f_{Pi}^{kor}}{f_0} = -\left(\frac{\varphi_G}{c^2} - \frac{3\mu_e}{2a_{0i}c^2} \right)$, а также при условии коррекции бортовой шкалы времени



$$\Delta\tau_{Pi}^{kor} = \frac{g_0 H_{opt}}{c^2} (\tau - \tau_H) - \frac{1}{c^2} \int_{\tau_H}^{\tau} \left(\frac{3\mu_e}{2a_{0i}} - \frac{\mu_e}{\rho_{ci}} - \frac{V_{ci}^2}{2} \right) d\tau \quad (8.45)$$

достигается условие релятивистской синхронизации Центрального синхронизатора и бортовых часов навигационных спутников: $\tau_{Ci} = \tau$. Рассмотренный метод успешно компенсирует релятивистские смещения, вызванные эллиптичностью орбиты, влиянием полей Луны и Солнца, а также влиянием солнечного давления.

8.4.3. Релятивистские смещения в системе BeiDou

Система BeiDou включает навигационные КА на трех разных орбитах [239]:

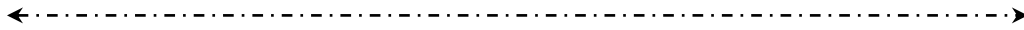
- 27 НКА на средневысотных орбитах типа ГЛОНАСС/GPS/GALILEO с размером полуоси $a_{0BD1} = 27,6 \cdot 10^6$ м, эксцентриситетом $e_{BD1} \leq 0,02$ и наклоном $i = 55^\circ$;
- 3 НКА на наклонных геосинхронных орбитах высотой $35,787 \cdot 10^6$ м ($a_{0BD2} \approx 42,165 \cdot 10^6$ м), эксцентриситетом $e_{BD2} \leq 0,003$ и наклоном $i = 55^\circ$;
- 5 НКА на геостационарных орбитах высотой $35,787 \cdot 10^6$ м ($a_{0BD2} \approx 42,165 \cdot 10^6$ м).

Две первые орбиты имеют одинаковое наклонение: 55 градусов. Поэтому, как и для систем GPS и GALILEO, влияние второй зональной гармоники здесь также пренебрежимо мало, поскольку в формуле (8.20) величина составляющей в скобке незначительна: $\left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 55^\circ\right) < 0,007$.

Релятивистский сдвиг времени в системе средневысотных НКА BeiDou определяется по формулам (8.38), (8.40) и (8.41), где основное релятивистское частотное смещение определяется выражением:

$$\left(\frac{\Delta f_P^{очн}}{f_0} \right)_{BD1} = \frac{f_C - f_0}{f_0} = \left(\frac{\varphi_G}{c^2} - \frac{3\mu_e}{2c^2 a_{0BD1}} \right) = +4,559 \cdot 10^{-10}, \quad (8.46)$$

линейный набег релятивистского смещения бортовой шкалы времени определяется формулой, подобной (8.40):



$$\Delta\tau_{c_{BD1}}^- = \left[\frac{3\mu_e}{2c^2 a_{0_{BD1}}^2} \Delta a_{BD1} - \frac{g_0 H_{opt}}{c^2} \right] (\tau - \tau_H), \quad (8.47)$$

а периодический «эллиптический» сдвиг бортовой шкалы времени – формулой, подобной (8.41):

$$\begin{aligned} \Delta\tau_{C_{BD1}}^{\approx} &= \Delta\tau_{P_{BD1}}^{\approx} = -\frac{2\sqrt{\mu_e a_{BD1}}}{c^2} e_{BD1} \sin E_{BD1} = \\ &= -\left(\frac{2\vec{R}_c \vec{V}_c}{c^2} \right)_{BD1} = -\frac{2}{c^2} (XV_x + YV_y + ZV_z)_{c_{BD1}}. \end{aligned} \quad (8.48)$$

Отсюда следует, что амплитуда полусуточного колебания эллиптического сдвига времени для средневысотных спутников BeiDou не превышает 47 нс.

Релятивистский сдвиг времени в системе геосинхронных наклонных орбит НКА BeiDou определяется по формулам, аналогичным (8.38), (8.46), (8.47) и (8.48):

$$\left(\frac{\Delta f_P^{очн}}{f_0} \right)_{BD2} = \left(\frac{\varphi_G}{c^2} - \frac{3\mu_e}{2c^2 a_{0_{BD2}}} \right) = +5,3916 \cdot 10^{-10}, \quad (8.49)$$

$$\Delta\tau_{c_{BD2}}^- = \left[\frac{3\mu_e}{2c^2 a_{0_{BD2}}^2} \Delta a_{BD2} - \frac{g_0 H_{opt}}{c^2} \right] (\tau - \tau_H), \quad (8.50)$$

$$\begin{aligned} \Delta\tau_{C_{BD2}}^{\approx} &= \Delta\tau_{P_{BD2}}^{\approx} = -\frac{2\sqrt{\mu_e a_{BD2}}}{c^2} e_{BD2} \sin E_{BD2} = \\ &= -\left(\frac{2\vec{R}_c \vec{V}_c}{c^2} \right)_{BD2} = -\frac{2}{c^2} (XV_x + YV_y + ZV_z)_{c_{BD2}}, \end{aligned} \quad (8.51)$$

откуда следует, что релятивистский сдвиг времени вследствие эллиптичности геосинхронной орбиты не превышает по амплитуде 8,7 нс при периоде колебания в одни сутки.

Релятивистское смещение бортовой шкалы времени в системе геостационарных спутников, имеющих весьма малый эксцентриситет орбиты, по аналогии с геосинхронными спутниками определяется формулами (8.38), (8.50) и (8.51). Эффект эллиптичности пренебрежимо мал.

Релятивистская синхронизация системы BeiDou, как и для других систем, может быть выполнена двумя рассмотренными выше способами. В первом из них в результате релятивистской синхронизации остаточные релятивистские смещения определяются формулой, подобной (8.42):

$$\begin{aligned} \Delta\tau_P^{BD} = \tau_{C_{BD}} - \tau = & \left(\frac{\Delta f_{P_{BD}}^{осн}}{f_0} + \frac{\Delta f_{P_{BD}}^{kor}}{f_0} \right) (\tau - \tau_H) + \\ & + \left[\left(\frac{3\mu_e}{2c^2 a_{0_{BD}}^2} \Delta a - \frac{g_0 H_{опм}}{c^2} \right) (\tau - \tau_H) + \Delta\tau_{P_{BD}}^{kor-} \right] + \\ & + \left[\Delta\tau_{P_{BD}}^{kor\approx} - \frac{2}{c^2} (XV_x + YV_y + ZV_z)_{c_{BD}} \right], \end{aligned} \quad (8.52)$$

где условиями компенсации постоянных частотных релятивистских сдвигов в системе средневысотных, геосинхронных и гестационарных спутников, в соответствии с (8.46) и (8.49), являются, соответственно:

$$\frac{\Delta f_{P_{BD1}}^{kor}}{f_0} = -\frac{\Delta f_{P_{BD1}}^{осн}}{f_0} = -4,559 \cdot 10^{-10}, \quad (8.53)$$

$$\frac{\Delta f_{P_{BD2}}^{kor}}{f_0} = -\frac{\Delta f_{P_{BD2}}^{осн}}{f_0} = -5,3916 \cdot 10^{-10}. \quad (8.54)$$

Как и в предыдущих случаях, равенство нулю второго и третьего членов формулы (8.52) достигается соответствующим выбором корректирующих временных поправок $\Delta\tau_{P_{BD}}^{kor-}$ и $\Delta\tau_{P_{BD}}^{kor\approx}$.

Метод альтернативной релятивистской синхронизации, как установлено выше, учитывает влияние множества факторов, искажающих орбиту навигационного спутника и, как следствие, изменяющих основной релятивистский сдвиг бортового времени. Формула компенсации релятивистских смещений для системы BeiDou аналогична (8.44):

$$\begin{aligned} \Delta\tau_P^{BDi} = \tau_{C_{BDi}} - \tau = & \left(\frac{\varphi_G}{c^2} - \frac{3\mu_e}{2a_{0_{BDi}} c^2} + \frac{\Delta f_{P_{BDi}}^{kor}}{f_0} \right) (\tau - \tau_H) - \\ & - \frac{g_0 H_{опм}}{c^2} (\tau - \tau_H) + \frac{1}{c^2} \int_{\tau_H}^{\tau} \left(\frac{3\mu_e}{2a_0} - \frac{\mu_e}{\rho_{c_{BDi}}} - \frac{V_{c_{BDi}}^2}{2} \right) d\tau + \Delta\tau_{P_{BDi}}^{kor}, \end{aligned} \quad (8.55)$$

где $i=1; 2$; а частотные корректирующие поправки определяются соотношениями (8.53), (8.54). Поправки к шкале времени определяются по формуле, аналогичной (8.45):

$$\Delta\tau_{P_{BDi}}^{kor} = \frac{g_0 H_{опм}}{c^2} (\tau - \tau_H) - \frac{1}{c^2} \int_{\tau_H}^{\tau} \left(\frac{3\mu_e}{2a_{0_{BDi}}} - \frac{\mu_e}{\rho_{c_{BDi}}} - \frac{V_{c_{BDi}}^2}{2} \right) d\tau. \quad (8.56)$$

8.5. Межспутниковая релятивистская синхронизация ГНСС

Возможность межспутниковой синхронизации рассматривалась применительно к системе GPS [28], а также применительно к системе ГЛОНАСС на основе идеи использования лазерных методов взаимной синхронизации соседних спутников («Лазерный ГЛОНАСС») [240].

Рассмотрим разностные релятивистские эффекты времени для двух соседних спутников ГЛОНАСС НКА1 и НКА2, входящих в одно и то же кольцо спутников. Вычисления будем вести во вращающейся системе отсчета ITRS с началом в центре Земли, поскольку эфемеридная информация с борта спутников выдается именно в этой системе. Влияние межзвездной среды на условия распространения считаем пренебрежимо малым. На борту каждого НКА ГЛОНАСС располагаются высокостабильные стандарты частоты и времени, шкалы времени которых обозначим соответственно τ_1 и τ_2 . Искомое расхождение временных шкал обозначим $\Delta\tau_{12} = \tau_1 - \tau_2$.

Межспутниковая лазерная синхронизация в ГНСС ГЛОНАСС выполняется с помощью двух лазерных сигналов, посылаемых с двух соседних НКА навстречу друг другу вдоль орбиты (\rightleftarrows). Расчет будем вести в соответствии с формулой (7.22), определяющей время распространения сигнала между двумя спутниками при условии, что атмосфера на высоте НКА отсутствует. В этом случае запаздывание принимаемой одной и той же N -й секундной метки, измеренное на борту каждого из спутников относительно такой же метки своей бортовой шкалы, составит:

$$\begin{aligned} \tau_{1\rightarrow}^{изм} &= \tau_1^N - \tau_2^N = \tau_{1\rightarrow}^{6c} - \Delta\tau_{12} + \Delta\tau_p + \sigma_\tau = \\ &= \left[\frac{R'}{c} \left(1 - \frac{3\mu_e}{2\rho_{6c}c^2} \right) + \tau_{ГР} - \tau_\Omega + \frac{\vec{V}_{16c}\vec{R}'}{c^2} + \frac{R'^2}{2c^3} \vec{a}_{16c}\vec{e} \right] - \Delta\tau_{12} + \Delta\tau_p^{(1)} + \sigma_\tau, \end{aligned} \quad (8.57)$$

$$\begin{aligned} \tau_{2\leftarrow}^{изм} &= \tau_2^N - \tau_1^N = \tau_{2\leftarrow}^{6c} + \Delta\tau_{12} + \Delta\tau_p + \sigma_\tau = \\ &= \left[\frac{R'}{c} \left(1 - \frac{3\mu_e}{2\rho_{6c}c^2} \right) + \tau_{ГР} + \tau_\Omega + \frac{\vec{V}_{26c}\vec{R}'}{c^2} + \frac{R'^2}{2c^3} \vec{a}_{26c}\vec{e} \right] - \Delta\tau_{12} + \Delta\tau_p^{(2)} + \sigma_\tau, \end{aligned} \quad (8.58)$$

где в квадратные скобки для удобства анализа помещены составляющие времени распространения; R' – расстояние между спутниками на момент излучения встречных сигналов; $\vec{V}_{1c}, \vec{V}_{2c}$ – скорости спутников в системе ITRS; $\delta\tau_{ГР}$ – релятивистская изотропная задержка лазерного луча (7.21),

←----->
 вызванная гравитационным полем Земли; τ_{Ω} – гироскопическая задержка во вращающейся системе отсчета, которая определяется формулой (7.20) и зависит от направления радиолуча; $\Delta\tau_P^{(1)}, \Delta\tau_P^{(2)}$ – релятивистские смещения бортовых спутниковых шкал времени относительно шкалы наземного эталона; σ_{τ} – инструментальная ошибка измерений.

Из этих формул по результатам измерений находится искомое расхождение шкал времени спутников:

$$\Delta\tau_{12} = \frac{\tau_{2\leftarrow}^{изм} - \tau_{1\rightarrow}^{изм}}{2} - \frac{(\vec{V}_{2вс} - \vec{V}_{1вс}) \vec{R}}{2c^2} - \frac{4\vec{\Omega} \vec{S}_{\nabla}}{c^2} - \frac{\Delta\tau_P^{(2)} - \Delta\tau_P^{(1)}}{2} + \frac{\sqrt{2}\sigma_{\tau}}{2}, \quad (8.59)$$

где S_{∇} – площадь проекции треугольника «КА1 – КА2 – Центр Земли» на плоскость экватора. Второе и третье слагаемые легко рассчитываются по траекторным данным каждого спутника.

Для вычисления разности релятивистских смещений бортового времени обоих спутников ($j=1; 2$) воспользуемся формулами (8.9), (8.10), (8.14) и (8.17):

$$\Delta\tau_P^j = \frac{\Delta f_{Pj}^{очн}}{f_0} (\tau - \tau_H) + \Delta\tau_{Pj}^{эл} + \Delta\tau_{cj}^{n2} - \Delta\tau_{MS}^0 - \Delta\tau_0^{\Omega}, \quad (8.60)$$

где

$$\frac{\Delta f_{Pj}^{очн}}{f_0} = \frac{f_{Ci} - f_0}{f_0} = \left(\frac{\varphi_G}{c^2} - \frac{3\mu_e}{2c^2 a_0} \right) - \frac{g_0 H_{опт}}{c^2} + \frac{3\mu_e}{2c^2 a_0^2} \Delta a_j \quad (8.61)$$

– основной орбитальный эффект смещения частоты;

$$\begin{aligned} \Delta\tau_{Pj}^{эл} = & -\frac{2\sqrt{\mu_e a}}{c^2} e_j \left[\sin \Omega_c (\tau - \tau_{Пj}) - \sin \Omega_c (\tau_H - \tau_{Пj}) \right] - \\ & - \frac{\sqrt{\mu_e a}}{c^2} e_j^2 \left[\sin 2\Omega_c (\tau - \tau_{Пj}) - \sin 2\Omega_c (\tau_H - \tau_{Пj}) \right] \end{aligned} \quad (8.62)$$

– эффект, вызванный эллиптичностью орбиты НКА;

$$\begin{aligned} \Delta\tau_{cj}^{n2} = & -\frac{7\mu_e R_e^2 J_2}{2c^2 a^3} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) (\tau - \tau_H) \\ & - \frac{J_2 \sqrt{\mu_e a}}{2c^2} \left(\frac{R_e}{a} \right)^2 \sin^2 i \left[\sin 2\Omega_c (\tau - \tau_{Пj}) - \sin 2\Omega_c (\tau_H - \tau_{Пj}) \right]. \end{aligned} \quad (8.63)$$

←.....→

– эффект, вызванный влиянием второй зональной гармоники; $\Delta\tau_{MS}^0, \Delta\tau_0^\Omega$
– эффекты влияния Луны и Солнца, а также влияния неравномерности вращения Земли соответственно.

Поскольку производится взаимная синхронизация двух соседних спутников на очень близких орбитах, то $\tau_{H1} = \tau_{H2} = \tau_H$, $\Omega_{C1} = \Omega_{C2} = \Omega_C$.

Если пренебречь малыми эффектами влияния полей Луны и Солнца, а также эффектами неравномерности вращения Земли, то разность смещений (8.60) для двух спутников определяется, в силу разных эксцентриситетов спутников и разного времени прохождения перигея, следующим выражением:

$$\Delta\tau_P^{12} = \frac{3\mu_e}{2c^2 a_0^2} \Delta a_{12} + (\Delta\tau_{P1}^{31} - \Delta\tau_{P2}^{31}) + (\Delta\tau_{C1}^{n2} - \Delta\tau_{C2}^{n2}), \quad (8.64)$$

где $\Delta a_{12} = a_1 - a_2$;

$$\begin{aligned} (\Delta\tau_{C1}^{n2} - \Delta\tau_{C2}^{n2}) = & -\frac{J_2 \sqrt{\mu_e a}}{2c^2} \left(\frac{R_e}{a}\right)^2 \cdot \\ & \cdot \sin^2 i \left\{ \left[\sin 2\Omega_c (\tau - \tau_{П1}) - \sin 2\Omega_c (\tau_H - \tau_{П1}) \right] - \right. \\ & \left. - \left[\sin 2\Omega_c (\tau - \tau_{П2}) - \sin 2\Omega_c (\tau_H - \tau_{П2}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (8.65)$$

В формуле (8.62) величина эффекта, пропорционального e^2 , достаточно мала (см. анализ формулы (8.14)) – он составляет единицы пикосекунд. Кроме того, величина эффекта (8.65), согласно результатам анализа формулы (8.17), также не превышает 60 пс.

Пренебрегая этими смещениями, формулу (8.64) получаем в более простом виде:

$$\begin{aligned} \Delta\tau_P^{12} = & \frac{3\mu_e}{2c^2 a_0^2} \Delta a_{12} (\tau - \tau_H) - \\ & - \frac{2\sqrt{\mu_e a_0}}{c^2} \left\{ e_1 \left[\sin \Omega_C (\tau - \tau_{П1}) - \sin \Omega_C (\tau_H - \tau_{П1}) \right] - \right. \\ & \left. - e_2 \left[\sin \Omega_C (\tau - \tau_{П2}) - \sin \Omega_C (\tau_H - \tau_{П2}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (8.66)$$

Таким образом, разностное релятивистское смещение двух соседних спутников содержит линейную и периодическую составляющие. Величина линейного смещения зависит от различия больших полуосей орбит. При разности больших полуосей в 400 м этот эффект достигает 0,3 нс в сутки. Амплитуда колебания смещения времени за счет эллиптичности орбиты при $e = 0,0036$ достигает 8 нс. При диаметральной размещении точек перигеев двух рассматриваемых орбит эффекты эллиптичности складываются.

←----->

Рассмотренная выше формула (8.64) не учитывает «тонкие» эффекты, связанные с искажениями орбит спутников, вызванными влиянием полей Луны и Солнца, влиянием солнечного давления и др. Поэтому для учета этих эффектов целесообразно использовать универсальную формулу (8.30), которая применительно к данному случаю приобретает вид:

$$\begin{aligned} \Delta \tau_P^j = \tau_{Cj} - \tau = & \frac{1}{c^2} \left(\varphi_G - \frac{3\mu_e}{2a_0} \right) (\tau - \tau_H) - \\ & - \frac{1}{c^2} \left[g_0 H_{opt} + \frac{\mu_e R_e^2 J_2}{2a_0^2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \right] (\tau - \tau_H) + \\ & + \frac{1}{c^2} \int_{\tau_H}^{\tau} \left(\frac{3\mu_e}{2a_0} - \frac{\mu_e}{\rho_{cj}} - \frac{V_{cj}^2}{2} \right) d\tau. \end{aligned} \quad (8.67)$$

Поскольку в этой формуле два первые члена для всех спутников системы ГЛОНАСС одинаковы, то формула для разностного релятивистского смещения времени приобретает достаточно простой вид:

$$\Delta \tau_P^{12} = \tau_{C1} - \tau_{C2} = \frac{\mu_e}{c^2} \int_{\tau_H}^{\tau} \left(\frac{1}{\rho_{C2}} - \frac{1}{\rho_{C1}} \right) d\tau + \frac{1}{2c^2} \int_{\tau_H}^{\tau} (V_{C2}^2 - V_{C1}^2) d\tau, \quad (8.68)$$

где $\rho_{Cj} = \rho_{Cj}(\tau)$; $V_{Cj} = V_{Cj}(\tau)$.

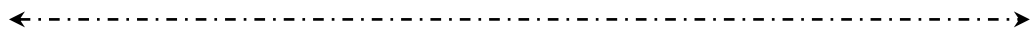
На основе текущих значений ρ_{cj} , V_{cj} полученная формула, кроме «тонких» эффектов, учитывает также и разность «эллиптических» эффектов для двух орбит. Ошибка расчета не превышает 10 пс.

8.6. Выводы к разделу 8

1. В общем списке взаимных релятивистских смещений шкал времени навигационных КА (НКА) средневысотных ГНСС (ГЛОНАСС, GPS, GALILEO и BeiDou) относительно шкал наземных Централных синхронизаторов перечисленных систем наиболее значимыми являются следующие:

– основная линейно изменяющаяся составляющая смещения, определяемая гравитационным потенциалом геоида и средней высотой орбиты НКА ГНСС;

– переменная «эллиптическая» составляющая, определяемая эксцентриситетом орбиты НКА и положением спутника на орбите относительно точки перигея. Для существующих ГНСС амплитуда «эллиптической» составляющей изменяется с периодом обращения спутника по орбите и имеет величину, в зависимости от ГНСС, от единиц до 53 наносекунд;



– смещение, вызванное влиянием 2-й зональной гармоники, содержащее линейную и переменную составляющую с периодом 6 часов. Для ГЛОНАСС на суточном интервале времени линейный релятивистскому набег времени составляет 0,73 нс, а амплитуда колебания релятивистского смещения времени достигает 29 пс.

Приливные лунно-солнечные смещения, смещения вследствие неравномерности вращения Земли, смещения вследствие влияния высших гармоник потенциала Земли, а также вследствие высших степеней эксцентриситета существенно меньше смещений бортовой шкалы, вызванных нестабильностью реальных бортовых СЧВ ГНСС. По этой причине перечисленные релятивистские смещения пока учитывать нецелесообразно.

2. Основной линейный релятивистский уход бортовой шкалы времени относительно наземной включает три составляющие:

- линейную составляющую, вызванную превышением высоты точки размещения Центрального синхронизатора над поверхностью геоида. Величина релятивистского набега по этой причине для всех исследуемых ГНСС составляет около 0,9 нс в сутки. Из-за изменения положения поверхности геоида, например, по причине влияния полей Луны и Солнца, эта величина является усредненной;

- линейную составляющую, вызванную отличием полуоси орбиты конкретного спутника относительно принятого среднего значения полуоси орбиты для спутников данной ГНСС. Например, для GPS на суточном интервале максимальное релятивистское расхождение шкал по этой причине достигает 3–4 нс. Для ГЛОНАСС оно находится в пределах 0,3 нс в сутки;

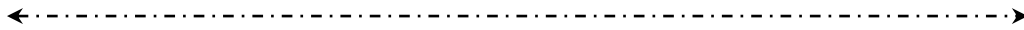
- линейную составляющую, вызванную релятивистской постоянной относительной разностью частот бортовых и наземных часов Центрального синхронизатора. Для исследуемых ГНСС эти величины составляют:

а) для ГЛОНАСС: $\left(\frac{\Delta f_P^{очн}}{f_0}\right)_{ГЛОН} = +4,36 \cdot 10^{-10}$ (знак + означает, что

бортовая шкала опережает наземную);

б) для GPS: $\left(\frac{\Delta f_P^{очн}}{f_0}\right)_{GPS} = +4,4647 \cdot 10^{-10}$;

в) для GALILEO: $\left(\frac{\Delta f_P^{очн}}{f_0}\right)_{GAL} = +4,7218 \cdot 10^{-10}$;



г) для средневысотных НКА BeiDou: $\left(\frac{\Delta f_P^{ocн}}{f_0}\right)_{BD1} = +4,559 \cdot 10^{-10}$;

д) для геостационарных НКА BeiDou: $\left(\frac{\Delta f_P^{ocн}}{f_0}\right)_{BD2} = +5,3916 \cdot 10^{-10}$.

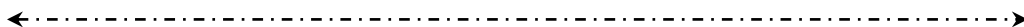
3. Компенсация релятивистских смещений бортовых шкал времени НКА ГНСС (релятивистская синхронизация бортовых СЧВ) может выполняться следующими способами:

– для компенсации основной составляющей линейных уходов бортовой шкалы целесообразно скорректировать частоту бортового СЧВ, введя относительный сдвиг частоты, обратный приведенным выше. Этот метод уже используется в ГНСС. Другие рассмотренные выше линейные смещения можно скомпенсировать путем коррекции текущих значений шкалы времени;

– коррекцию переменных релятивистских смещений можно выполнять в соответствии с вычислениями по приведенным выше формулам для всех составляющих. Однако для повышения точности релятивистской синхронизации целесообразно использовать метод численного интегрирования по текущим значениям радиус-вектора и скорости спутника. Этот метод учитывает все возможные искажения орбиты относительно круговой, в том числе, трудно поддающиеся аналитическому описанию.

4. При межспутниковой синхронизации ГНСС разностное релятивистское смещение шкал времени двух соседних спутников содержит линейную и периодическую составляющие. Величина линейного смещения зависит от различия больших полуосей орбит. При разности больших полуосей в 400 м этот эффект достигает 0,3 нс в сутки. Амплитуда колебания смещения времени за счет эллиптичности орбиты при $e = 0,0036$ (ГЛОНАСС) достигает 8 нс. При диаметральной размещении точек перигеев двух рассматриваемых орбит эффекты «эллиптичности» складываются. Эффекты, вызванные другими причинами, существенно меньше.

Наилучшим методом компенсации релятивистских уходов шкал при межспутниковой синхронизации соседних спутников является метод численного интегрирования уходов по текущим значениям радиус-вектора и скорости спутника, передаваемых в эфемеридной информации. Этот метод учитывает разность «эллиптических» эффектов для двух орбит, а также «тонкие» эффекты, например, трудно поддающиеся расчетам приливные эффекты и др. Ошибка расчета не превышает 10 пс.



9. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕТРОЛОГИЯ НАЗЕМНЫХ И КОСМИЧЕСКИХ РАДИОЛИНИЙ СИНХРОНИЗАЦИИ

9.1. Релятивистские эффекты в наземно-космических радиополосах синхронизации

Проблему взаимной синхронизации наземных и космических хранителей времени и частоты с помощью космических радиополос удобнее всего рассматривать в земной вращающейся системе ITRS, в которой наземные часы неподвижны. При этом снимается целый ряд проблем, связанных с учётом перемещения часов за время распространения синхросигналов. Основными радиополосами, на основе которых строится система сверки времени, являются беззапросная (односторонняя), комплексная запросно-беззапросная, а также дуплексная, использующая две встречных беззапросных радиополосы. При этом они могут быть реализованы в оптическом или СВЧ-диапазоне волн, оснащаться бортовыми ответчиками и бортовыми уголковыми отражателями. Наконец, радиополоса синхронизации может устанавливать связь между хранителями времени и частоты не только напрямую, но и через промежуточный космический ретранслятор, как это реализовано в известной наземно-космической системе «Дуплекс» [240–243]. Во всех этих случаях необходимо строго учесть гравитационные и релятивистские эффекты с установленным ранее уровнем точности порядка единиц пикосекунд. Ниже на основе соотношений, полученных в разделах 4 и 7, рассмотрены радиополосы синхронизации «Земля – КА».

9.1.1. Релятивистские эффекты в запросно-беззапросных радиополосах синхронизации с компенсацией задержки на трассе «Земля – космос»

9.1.1.1. СВЧ-радиополоса с измерениями задержек на Земле

Условимся, что с борта КА, обладающего бортовой шкалой времени τ_C , на наземную измерительную станцию с эталонной шкалой времени τ передаётся N -я метка времени по беззапросной радиополосе (рис. 9.1).

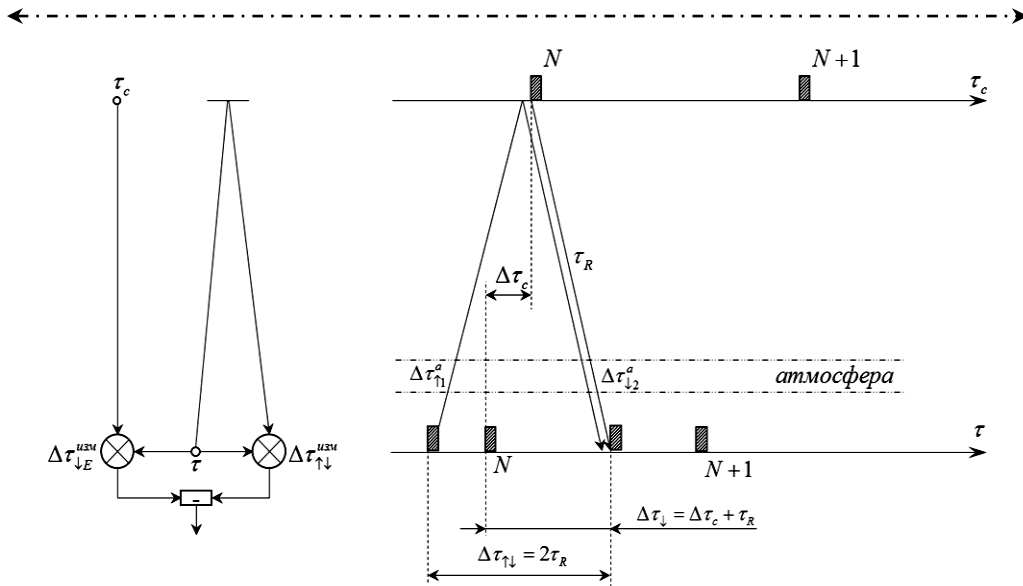


Рис. 9.1. К расчету релятивистских эффектов в запросно-беззапросной радиолинии синхронизации

Расхождение бортовой и наземной шкал времени на момент излучения синхронизирующего сигнала как функция базового времени τ в соответствии с соотношением (3.26) составляет:

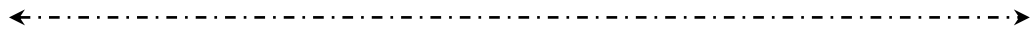
$$\Delta\tau_c = \tau_c - \tau = \Delta\tau_T + \Delta\tau_p, \quad (9.1)$$

где $\Delta\tau_p$ – текущее релятивистское расхождение бортовой спутниковой и наземной шкал времени, определяемое в соответствии с формулами (4.13), (4.14), (8.1) или (8.9);

$$\Delta\tau_T = (\tau - \tau_0)_T + C_1(\tau - \tau_0) + C_2(\tau - \tau_0)^2 \quad (9.2)$$

– техническое расхождение шкал времени, вызванное начальным относительным рассогласованием частот C_1 задающих генераторов бортовых и наземных часов, а также их относительной нестабильностью C_2 ; τ_0 – начальный момент базового времени, соответствующий моменту синхронизации.

Задача синхронизации состоит в измерении $\Delta\tau_c$, вычислении релятивистских эффектов $\Delta\tau_p$ по формулам (4.13), (4.14), (8.1) или (8.9), в последующей компенсации вычисленных релятивистских эффектов и, в конечном счете, в определении коэффициентов ряда (9.2), необходимых для точного прогнозирования хода бортовых атомных часов.



Если же бортовые часы достаточно совершенны и их стабильность настолько высока, что можно считать $\Delta\tau_T \ll \Delta\tau_P$, то соотношение (9.1) принимает вид:

$$\Delta\tau_C = \tau_C - \tau = \Delta\tau_P. \quad (9.2a)$$

В этом случае с помощью высокостабильных бортовых СЧВ решается задача повышения точности измерения релятивистских эффектов, в частности, уточнения величины гравитационного потенциала в точке размещения наземных измерительных часов. Решение такой задачи запланировано, например, в эксперименте Европейского космического агентства ACES, в котором, как уже упоминалось, предполагается использование бортового СЧВ PHARAO с нестабильностью 10^{-16} – 10^{-17} [38, 66]. Для измерения релятивистских эффектов смещения времени между Землей и бортом предполагается использование лазерных запросно-беззапросных измерительных линий.

Измеренная на Земле задержка бортовой метки времени $\Delta\tau_{\downarrow изм}^E$ относительно одноименной метки времени на земной шкале определяется, в соответствии с формулой (7.18), соотношением:

$$\begin{aligned} \Delta\tau_{\downarrow E}^{изм} &= \Delta\tau_C + \tau_{\downarrow}^E = \\ &= \Delta\tau_C + \frac{R'}{c} \left[1 - \frac{\mu_e}{R_e c^2} - \frac{1}{2c^2} (\Omega_e R_e \cos\psi_{2E})^2 \right] + \tau_{ГП} + \tau_{\Omega\downarrow} + \tau_{\downarrow 2}^a + \sigma_{\tau}, \end{aligned} \quad (9.3)$$

где σ_{τ} – случайная погрешность измерений; R' – длина трассы радиосигнала на момент излучения, определяемая формулой (6.65).

На наземной станции формируется запросный сигнал, который посылается на борт НКА. В бортовом ответчике формируется ответный сигнал, который возвращается на наземную станцию по той же трассе, претерпевая в ответчике задержку на время τ_3 . Согласно (7.48), измеренное полное время задержки ретранслированного сигнала на трассе составит:

$$\begin{aligned} \tau_{\uparrow\downarrow}^{изм} &= \frac{2R'}{c} \left[1 - \frac{\mu_e}{R_e c^2} - \frac{1}{2c^2} (\Omega_e R_e \cos\psi_{2E})^2 \right] + \\ &+ \frac{\vec{V}_{вс}\vec{e}}{c} \tau_3 + 2\tau_{ГП} + \tau_{\uparrow 1}^a + \tau_{\downarrow 2}^a + \frac{2\dot{R}_{вс}R}{c^2} + \frac{\ddot{R}R'^2}{c^3} + \sigma_{\tau}, \end{aligned} \quad (9.4)$$

где задержки $\tau_{ГП}$, $\tau_{\uparrow 1}^a$, $\tau_{\downarrow 2}^a$ определяются, соответственно, формулами (7.28), (7.23), (7.19); \dot{R} – радиальная скорость высокого спутника; $\ddot{R} = \vec{a}_{вс}\vec{e}$ – радиальное ускорение спутника.

Если прием ретранслированного и беззапросного сигналов происходит в близкие моменты времени, то на основе результатов измерений (9.3) и (9.4) находим искомое расхождение шкал времени бортовых и наземных часов:

$$\Delta\tau_c = \frac{1}{2}(2\tau_{\downarrow}^{изм} - \tau_{\uparrow}^{изм}) - \frac{\Omega_e}{c^2}(x_c y_e - x_e y_c) + \frac{\dot{R}_{6c} \tau_3}{c} + \frac{\dot{R}_{6c} R}{c^2} + \frac{\ddot{R} R'^2}{2c^3} - \frac{1}{2}(\tau_{\downarrow 2}^a - \tau_{\uparrow 1}^a) + \sqrt{2}\sigma_\tau, \quad (9.5)$$

где $\{x_e, y_e\}, \{x_c, y_c\}$ – соответственно, координаты наземной станции и спутника на момент синхронизации.

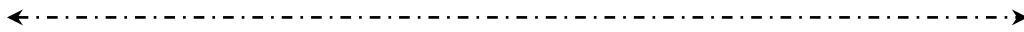
Отсюда по результатам измерений $\Delta\tau_c$ и на основе вычисления членов правой части решаются две альтернативные задачи:

– на основе расчета текущего релятивистского расхождения спутниковой и наземной шкал времени $\Delta\tau_p$ по формулам, представленным в 4 и 8 разделах, из соотношения (9.1) находится техническое расхождение этих шкал $\Delta\tau_T$;

– при высокой стабильности бортового СЧВ на основе соотношения (9.2а) уточняется значение гравитационного смещения бортового времени.

Члены в правой части выражения (9.5) ограничивают точность определения искомого рассогласования $\Delta\tau_c$. Вместе с тем, член, определяемый задержкой в ответчике, будет, как уже отмечалось, пренебрежимо малым при ширине полосы ответчика 1 МГц. Гироскопическая задержка, а также составляющие, определяемые скоростью и ускорением спутника, легко рассчитывается по известным параметрам движения НКА и наземной станции.

Сложнее дело обстоит с учётом задержек в атмосфере, поскольку они зависят от частоты радиосигнала (особенно в ионосфере), от направления луча, а также от момента прохождения луча через слои нестационарной атмосферы. Дело в том, что моменты прохождения атмосферы в запросном и беззапросном лучах отличаются в ГНСС примерно на 0,2 секунды, за которые показатель преломления нестационарной атмосферы может существенно изменяться. Именно это обстоятельство ограничивает точность синхронизации НКА ГЛОНАСС рассмотренным методом величиной до нескольких наносекунд.



9.1.1.2. Лазерная радиолиния с измерениями задержек на Земле и на борту КА

Развитием предыдущей схемы синхронизации является лазерный вариант радиолинии, в котором используется только запросный канал. При этом на борту КА установлен приемник лазерного луча и уголкового отражателя (рис. 9.2). На борту на выходе фотоприемника ФП измеряется запаздывание принимаемой метки времени относительно одноименной бортовой метки времени, формируемой бортовыми часами. Измерение выполняется в шкале собственного бортового времени и определяется с помощью соответствующего данному случаю соотношения (7.22):

$$\tau_{\uparrow}^{изм} = \frac{R'}{c} \left(1 - \frac{3\mu_e}{2\rho_{ac}c^2} \right) + \tau_{ГР} - \tau_{\Omega\uparrow} + \tau_{\uparrow 1}^{mp} + \frac{\dot{R}R'}{c^2} + \frac{\ddot{R}R'^2}{2c^3} - \Delta\tau_C + \sigma_{\tau}, \quad (9.6)$$

где $\tau_{\uparrow 1}^{mp}$ – задержка в тропосфере вблизи момента излучения «1»; $\Delta\tau_C$ – расхождение бортовой и наземной шкал (9.1); остальные обозначения сохранены. Результаты измерений задержки (9.6) передаются на Землю по телеметрическому каналу (ТЛМ).

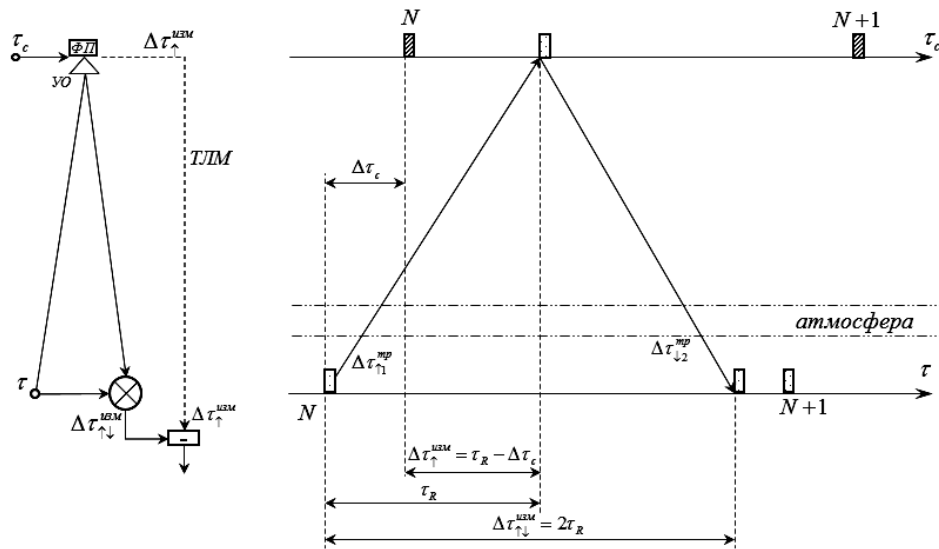


Рис. 9.2. К расчету релятивистских эффектов в лазерной линии синхронизации

С помощью углового отражателя УО запросный сигнал ретранслируется на Землю. Задержка ответного оптического сигнала, измеряемая на Земле по собственной шкале времени, определяется соотношением, подобным (7.49):

$$\tau_{\uparrow\downarrow}^{uzm} = \frac{2R'}{c} \left[1 - \frac{\mu_e}{R_e c^2} \right] + 2\tau_{ГР} + \tau_{\uparrow 1}^{mp} + \tau_{\downarrow 2}^{mp} + \frac{2\dot{R}R'}{c^2} + \frac{\dot{R}R'^2}{c^3} + \sigma_\tau. \quad (9.7)$$

На основе результатов измерений задержек (9.6) и (9.7) определяется искомое расхождение бортовой и наземной шкал времени:

$$\Delta\tau_c = \frac{1}{2}(\tau_{\uparrow\downarrow}^{uzm} - 2\tau_{\uparrow}^{uzm}) - \frac{R\mu_e}{c^3} \left(\frac{3}{2\rho_{ac}} - \frac{1}{R_e} \right) + \frac{\Omega_e}{c^2}(x_c y_e - x_e y_c) + \frac{1}{2}(\tau_{\downarrow 2}^{mp} - \tau_{\uparrow 1}^{mp}) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_\tau, \quad (9.8)$$

где обозначения те же, что и в формуле (9.5), однако знаки последних двух слагаемых изменились на обратные.

Как и в предыдущем случае, основную неопределенность в измерении вносит нестационарная тропосфера, поскольку для высоких спутников моменты прохождения лучей через этот участок радиолинии разнесены примерно на 0,2 секунды.

9.1.2. Релятивистские эффекты в дуплексной системе синхронизации «Земля – космос» с компенсацией задержки на трассе

9.1.2.1. Дуплексная прямая радиолиния

Суть этого метода (рис. 9.3) состоит в радиообмене одинаковыми метками времени между бортовыми и наземными часами по прямым беззапросным радиолиниям без ратрансляции. Как и в предыдущих случаях, считаем, что показания часов по бортовой шкале обгоняют показания наземных часов в соответствии с соотношением (9.1).

При этом выполняются два измерения запаздывания: на Земле и на борту КА. На Земле измеряется запаздывание бортовой метки по отношению к одноимённой наземной. Эта задержка определяется соотношением (9.3):

$$\tau_{\downarrow E}^{uzm} = \Delta\tau_c + \frac{R'}{c} \left[1 - \frac{\mu_e}{R_e c^2} - \frac{1}{2c^2} (\Omega_e R_e \cos \psi_{2E})^2 \right] + \tau_{ГР} + \tau_{\Omega\downarrow} + \tau_{\downarrow 2}^a + \sigma_\tau. \quad (9.9a)$$

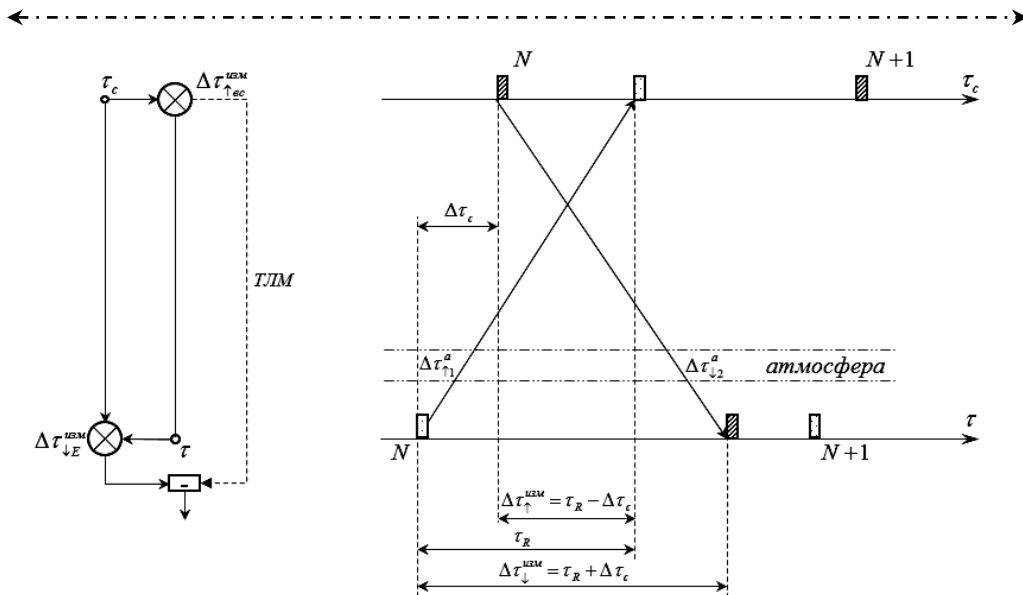


Рис. 9.3. К расчету релятивистских эффектов в дуплексной радиолинии синхронизации

Измерение задержки на борту КА выполняется в шкале собственного бортового времени и определяется с помощью соотношений (7.22) и (9.6):

$$\tau_{\uparrow ec}^{изм} = \frac{R'}{c} \left(1 - \frac{3\mu_e}{2\rho_{ec}c^2} \right) + \tau_{ГР} - \tau_{\Omega\uparrow} + \tau_{\uparrow 1}^a + \frac{\dot{R}R'}{c^2} + \frac{\ddot{R}R'^2}{2c^3} - \Delta\tau_c + \sigma_\tau, \quad (9.9б)$$

где обозначения сохранены. Результаты измерений задержки (9.9б) передаются на Землю по телеметрическому каналу (ТЛМ).

На наземной станции на основе измерений (9.9а) и (9.9б) определяется искомое расхождение шкал времени:

$$\begin{aligned} \Delta\tau_c = \frac{1}{2}(\tau_{\downarrow}^{изм} - \tau_{\uparrow}^{изм}) = \frac{R}{c^3} \left(\frac{3\mu_e}{2\rho_{ec}} - \frac{\mu_e}{R_e} - \frac{1}{2}\Omega_e^2 R_e^2 \cos^2 \psi_E \right) - \\ - \frac{\Omega_e}{c^2}(x_c y_e - x_e y_c) - \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{R}R'}{c^2} + \frac{\ddot{R}R'^2}{2c^3} \right) + \frac{1}{2}(\tau_{\downarrow 2}^a - \tau_{\uparrow 1}^a) + \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_\tau, \end{aligned} \quad (9.10)$$

где \dot{R} , \ddot{R} – соответственно радиальная скорость и ускорение спутника относительно наземной станции.

←----->

Вычисление на этой основе в соответствии с формулой (9.2) технического расхождения шкал времени бортового и наземного стандартов времени $\Delta\tau_T$ возможно после вычисления релятивистских эффектов расхождения шкал времени $\Delta\tau_p$ по формулам (4.13), (4.14), (8.1) или (8.9). Ограничения точности измерений, как и в предыдущих случаях, определяются влиянием нестационарной атмосферы. Вместе с тем, в дуплексном методе это влияние меньше, поскольку интервал между моментами прохождения слоя атмосферы для высоких спутников в два раза меньше – около 0,1 секунды.

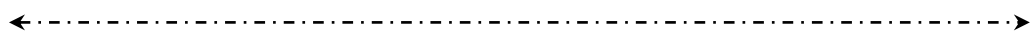
В полученных выше формулах синхронизации учтены релятивистские эффекты при распространении радио- и оптических волн с методической погрешностью в единицы пикосекунд.

9.1.2.2. Дуплексная радиолиния с ретрансляцией через геостационарный спутник

Особым случаем использования дуплексного метода синхронизации наземных СЧВ является использование ретрансляции сигналов через геостационарный спутник. Особенностью этого спутника является, во-первых, его большая удаленность и поэтому малый угол между наземно-космическими радиолиниями ретрансляции. Вторая особенность заключается в очень малой скорости его перемещения относительно Земли. Релятивистские явления в такой радиолинии рассматривались в некоторых работах, в частности в [241]. Учитывая эти обстоятельства, измеряемые промежутки времени между одноименными метками времени, посылаемыми из наземной станции A в B ($A \rightarrow B$) и «навстречу» ($A \leftarrow B$), определяются, согласно (9.9а) и (9.9б) и (9.4), следующими формулами:

$$\tau_{A \rightarrow B}^{uzm} = \Delta\tau_C + \frac{R'}{c} \left[1 - \frac{\mu_e}{\rho_B c^2} - \frac{1}{2c^2} (\Omega_e R_e \cos \psi_B)^2 \right] + \tau_{GP} + \frac{\dot{R}}{c} \left(\frac{R}{c} + \tau_3 \right) + \tau_{\Omega \rightarrow} + \tau_{\uparrow 1}^A + \tau_{\downarrow 2}^B + \sigma_\tau, \quad (9.11a)$$

$$\tau_{A \leftarrow B}^{uzm} = \frac{R'}{c} \left[1 - \frac{\mu_e}{\rho_A c^2} - \frac{1}{2c^2} (\Omega_e R_e \cos \psi_A)^2 \right] + \tau_{GP} + \frac{\dot{R}}{c} \left(\frac{R}{c} + \tau_3 \right) + \tau_{\Omega \leftarrow} + \tau_{\uparrow 2}^B + \tau_{\downarrow 1}^A - \Delta\tau_C + \sigma_\tau, \quad (9.11б)$$



откуда следует выражение для определения текущего расхождения шкал времени двух разнесенных наземных СЧВ:

$$\begin{aligned} \Delta\tau_C = & \frac{1}{2}(\tau_{\rightarrow}^{изм} - \tau_{\leftarrow}^{изм}) = \frac{R\mu_e}{2c^3} \left(\frac{1}{\rho_B} - \frac{1}{\rho_A} \right) + \\ & + \frac{R}{2c^3} \Omega_e^2 R_e^2 (\cos^2 \psi_B - \cos^2 \psi_A) - \\ & - \frac{4\Omega_e S_{\square}}{c^2} + \frac{1}{2}(\tau_{\uparrow 1}^a - \tau_{\downarrow 2}^a)_A + \frac{1}{2}(\tau_{\downarrow 2}^a - \tau_{\uparrow 1}^a)_B + \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_{\tau}, \end{aligned} \quad (9.12)$$

где, например, скобка $(\tau_{\uparrow 1}^a - \tau_{\downarrow 2}^a)_A$ обозначает разность задержек в атмосфере пункта А между моментом излучения 1 на пути распространения «вверх» \uparrow и моментом приема 2 на пути распространения «вниз» \downarrow . Эти моменты времени для геостационарного спутника разнесены во времени более, чем на 0,2 секунды. Очевидно, что нестационарность атмосферы для разнесенных пунктов ограничивает точность рассмотренного метода синхронизации. На сегодняшний день достижимая инструментальная погрешность метода составляет около 1 нс [243].

9.1.3. Релятивистские явления в радиолиниях сличения частот с компенсацией эффекта Допплера I порядка на трассе «Земля – космос»

9.1.3.1. Запросно-беззапросные радиолинии компенсации

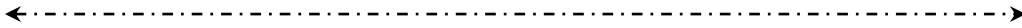
В радиолиниях этого типа используется 2 канала (рис. 9.4): односторонний канал «КА – Земля» и запросный канал «Земля – КА – Земля» с ретрансляцией радиосигнала на борту КА.

В запросной радиолинии на борту КА с наземной станции передается радиоволна с частотой f_0 , которая связана с частотой задающего генератора наземных эталонных часов и поэтому принимается за эталонную.

В односторонней радиолинии с борта КА на наземную станцию передается радиоволна с частотой

$$f_1 = f_0 \left(1 + \frac{\Delta f_C}{f_0} \right), \quad (9.13a)$$

где относительный уход частоты бортового СЧВ $\Delta f_C / f_0$ определяется путем дифференцирования соотношений (3.26), (9.1) и (9.2) по базовому времени τ и представляется в виде суммы:



$$\frac{\Delta f_C}{f_0} = \frac{\Delta f_P}{f_0} + \frac{\Delta f_T}{f_0}, \quad (9.136)$$

где $\Delta f_P/f_0$ – релятивистское смещение частоты бортового задающего генератора, вызванное влиянием параметров орбиты, гравитационных полей Земли, Луны, Солнца, и определяемое соотношениями (4.13), (4.14), (4.102);

$$\frac{\Delta f_T}{f_0} = C_1 + C_2(\tau - \tau_0) \quad (9.14)$$

– относительное техническое отклонение частоты бортового СЧВ от номинала, вызванное начальным относительным отклонением частоты C_1 и относительной ее нестабильностью C_2 .

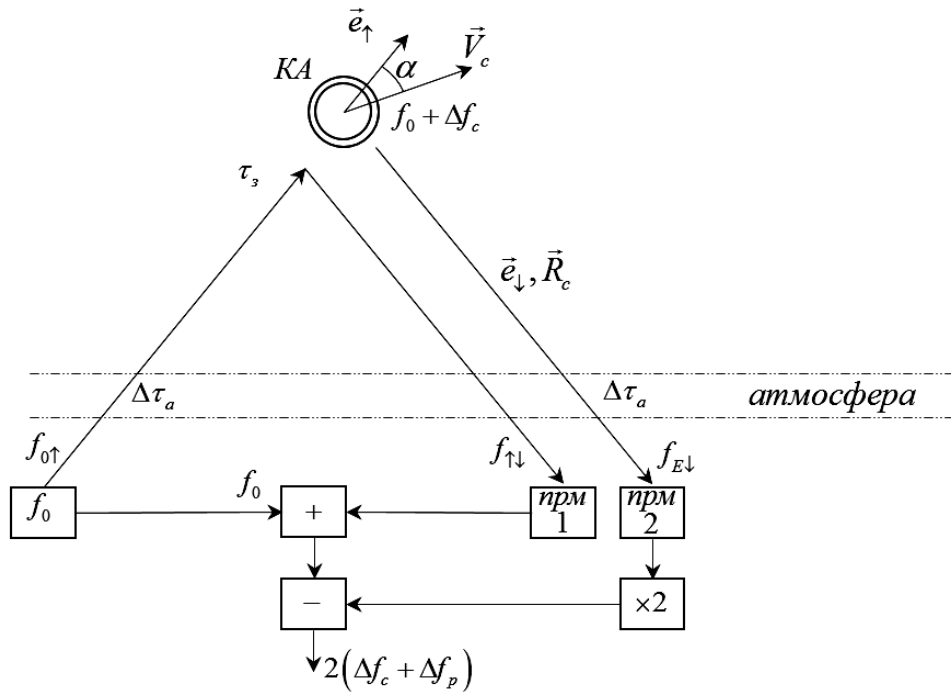
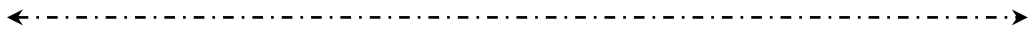


Рис. 9.4. К расчету релятивистских частотных эффектов в запросно-беззапросной радиолинии компенсации эффекта Доплера I порядка



Задачей сличения частот является определение смещения Δf_T , входящего в формулу (9.13б), и соответствующих коэффициентов ряда (9.14) на основе измерения фактического частотного смещения Δf_C в сеансе связи с КА, а также вычисления релятивистских эффектов смещения частоты бортового СЧВ Δf_P по формулам (4.102) и последующей их численной компенсации.

Как и при измерении релятивистских эффектов смещения времени (раздел 9.1.1 и 9.1.2), в данном случае возможен вариант измерения только гравитационного смещения частоты и по результатам измерений – уточнение величины гравитационного потенциала в точке размещения наземных измерительных часов. Это становится возможным, если стабильность бортовых часов настолько высока, что можно считать $\Delta f_T \ll f_P$. В этом случае соотношение (9.13б) принимает вид:

$$\frac{\Delta f_C}{f_0} = \frac{\Delta f_P}{f_0}.$$

Решение такой задачи также запланировано в эксперименте Европейского космического агентства ACES, в котором, как уже упоминалось, предполагается использование бортового СЧВ PHARAO с нестабильностью 10^{-16} – 10^{-17} . Для измерения релятивистских эффектов смещения времени между Землей и бортом предполагается использование запросно-беззапросных радиотехнических измерительных линий.

Частоту волны в односторонней радиолинии «КА – Земля» в наземной точке приема «Е» найдем на основе соотношения (7.31):

$$f_{E\downarrow} = F_{12\downarrow}(f_0 + \Delta f_C) \left\{ \left(1 - \frac{g_{0\alpha_c} V_c^\alpha \theta_0}{-g_{00_c} c} \right)^2 - \frac{(V_c \theta_0)^2}{-g_{00_c} c^2} \right\}^{0.5} \cdot \frac{1 + \theta_0 \int_{\tau_E - \Delta \tau_a}^{\tau_E} \Delta \dot{\vec{n}}_a(\tau) d\tau}{1 - \frac{\vec{n}^{**}(\vec{R}_c)}{c} \theta_0 \vec{V}_c \vec{e}_{\downarrow}}, \quad (9.15)$$

где величины с индексом «E» относятся к земной станции, а с индексом «C» – к спутнику. Если учесть, что для космических бортовых современных стандартов $\Delta f_C / f_0 < 10^{-12}$, то произведение $(\Delta f_C / f_0)(V_c / c) < 10^{-17}$. Поэтому последнее соотношение приведем к более удобному виду:

$$f_{E\downarrow} = \Delta f_C + F_{12\downarrow} f_0 \left\{ \left(1 - \frac{g_{0\alpha_c} V_c^\alpha \theta_0}{-g_{00_c} c} \right)^2 - \frac{(V_c \theta_0)^2}{-g_{00_c} c^2} \right\}^{0.5} \cdot \frac{1 + K_{\downarrow E}^a}{1 - \frac{\vec{n}^{**}(\vec{R}_c)}{c} \theta_0 \vec{V}_c \vec{e}_{\downarrow}}, \quad (9.16)$$

←----->

где, в соответствии с формулой (7.56),

$$K_{\downarrow E}^a = \theta_0 \int_{\tau_E + \Delta\tau_a}^{\tau_E} \Delta \dot{\vec{n}}_a(\tau) d\tau, \quad (9.17)$$

а коэффициент гравитационного преобразования частоты $F_{12\downarrow}$ определяется формулой (7.9б).

Частота обратной волны в запросной радиолинии, испытавшей задержку τ_3 и преобразование частоты с коэффициентом K_f в бортовом ретрансляторе, определится в соответствии с формулой (7.65):

$$f_{\uparrow\downarrow} = f_0 K_f \frac{1 - \frac{\theta_0}{c} (\vec{V}_c \vec{e}_{\uparrow})_3 + \frac{\delta V_3}{c} - \frac{\vec{n}_2^{**} - 1}{c} \theta_0 \vec{V}_c \vec{e}_{\uparrow}}{1 - \frac{\theta_0}{c} (\vec{V}_c \vec{e}_{\downarrow})_3 - \frac{\vec{n}_2^{**} - 1}{c} \theta_0 \vec{V}_c \vec{e}_{\downarrow}} \times \frac{1 + K_{\downarrow E}^a}{1 + K_{\uparrow E}^a}, \quad (9.18)$$

где добавка скорости δV_3 за время задержки в ретрансляторе τ_3 определяется из (7.64):

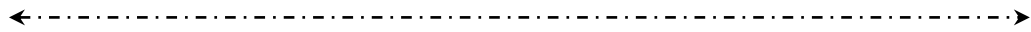
$$\delta V_3 = \ddot{R}\tau_3 + \frac{V_{\perp} \dot{R}\tau_3}{R} + \frac{\ddot{R}V_{\perp} \tau_3^2}{R}, \quad (9.19)$$

а, согласно (7.55),

$$K_{\uparrow E}^a = \theta_0 \int_{\tau_E}^{\tau_E + \Delta\tau_a} \Delta \dot{\vec{n}}_a(\tau) d\tau. \quad (9.20)$$

В наземной приемной аппаратуре происходит умножение частоты принимаемого сигнала (9.18) на коэффициент $1/K_f$, а затем формируется измеряемая частота путем операций умножения и вычитания принимаемых частот и частоты местного эталонного генератора по схеме: $2f_{E\downarrow} - f_{\downarrow\uparrow} - f_0$ (рис. 9.4). Используя соотношения (9.16) и (9.18) и пренебрегая составляющими, имеющими порядок величины $1/c^4$, разностную измеряемую частоту определяем в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f_{изм}^{(1)}}{f_0} &= \frac{1}{f_0} (2f_{E\downarrow} - f_{\downarrow\uparrow} - f_0) = \\ &= \frac{2\Delta f_c}{f_0} - 2(F_{12\uparrow} - 1) - \frac{\delta V_3}{c} + \frac{1}{c^2} (V_c^2 + \dot{R}_c^2 - 2[\vec{\Omega} \vec{R}_c] \vec{V}_c - \delta V_3^2) + \\ &\quad + \frac{2}{c^3} \left(\frac{\dot{R}_c^3}{2} + \dot{R}_c^2 [\vec{\Omega} \vec{R}_c] \vec{e} \right) + (K_{E\downarrow}^a - K_{E\uparrow}^a) + \sigma_f, \end{aligned} \quad (9.21)$$



где коэффициент гравитационного преобразования частоты F_{12} определяется формулой (7.9); добавка скорости спутника δV_3 за время задержки в ретрансляторе τ_3 определяется из (7.64); коэффициенты изменения частоты из-за изменения преломляющих свойств атмосферы $K_{E\downarrow}^a, K_{E\uparrow}^a$ определяются соотношениями (9.17) и (9.20) соответственно; σ_f — случайная погрешность измерений.

Таким образом, в результате частотных преобразований из формулы (9.21) можно определить искомое расхождение частот бортового и наземного стандартов частоты Δf_c .

В полученной формуле члены, определяющие эффект Допплера I порядка в зависимости от первой степени отношения \dot{R}_c/c , скомпенсированы. Оставшиеся члены, имеющие порядок величин $1/c^2$ и $1/c^3$, достаточно легко рассчитать по имеющимся траекторным и техническим данным спутника: дальности, скорости, радиальной скорости, ускорению, а также калиброванному времени задержки τ_3 бортового ретранслятора.

Полученная формула позволяет рассчитать относительное значение релятивистских частотных эффектов в радиолинии «Земля — космос» с погрешностью не более $10^{-17} - 10^{-18}$, что существенно точнее, чем в обоснованиях известных экспериментов [102, 38]. Влияние ионосферы на частоту радиоволн здесь не рассматривалось, поскольку оно подробно рассмотрено в целом ряде работ, в том числе в приведенных выше обоснованиях экспериментов.

9.1.3.2. Запросная радиолиния с преобразованием частоты на борту КА

На основе предыдущих исследований запросно-беззапросной системы известную радиолинию с преобразованием частоты на борту КА [244] можно пояснить следующим образом. В этой радиолинии на борту КА размещается стандарт частоты, у которого выходной сигнал имеет частоту $f_c = 2(f_0 + \Delta f_c)$. Запросный сигнал с наземной станции с частотой наземного эталона f_0 посылается на КА, который на борту принимается с частотой:

$$f_{c\uparrow} = f_0 + F_D - \Delta f_p, \quad (9.22)$$

←----->
 где $F_D, \Delta f_p$ – соответственно эффект Доплера I порядка, подлежащий компенсации, и релятивистский сдвиг частоты на трассе, знак которого зависит от направления волны.

На борту КА формируется сигнал разностной частоты

$$f_c^- = f_c - f_{c\uparrow} = f_0 + (2\Delta f_c - F_D + \Delta f_p), \quad (9.23)$$

который после задержки τ_3 в бортовом преобразователе-ретрансляторе излучается на Землю с частотой

$$f_c^{-3} = f_c^- + \Delta F_3 = f_0 + (2\Delta f_c - F_D + \Delta f_p + \Delta F_3), \quad (9.24)$$

где ΔF_3 – частотная добавка за счет изменения радиальной скорости на интервале бортовой задержки.

Вследствие эффекта Доплера I и релятивистских смещений частота сигнала, принимаемого на Земле, составит:

$$f_{E\downarrow} = f_c^{-3} + F_D + \Delta f_p = f_0 + 2\Delta f_c + 2\Delta f_p + \Delta F_3, \quad (9.25)$$

на основании чего в наземной станции формируется измеряемая частота, несущая информацию о частотном сдвиге Δf_c :

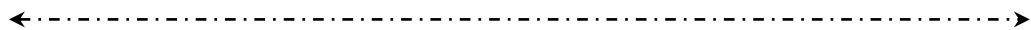
$$f_{изм} = f_{E\downarrow} - f_0 = 2\Delta f_c + 2\Delta f_p + \Delta F_3. \quad (9.26)$$

Таким образом, в такой радиолинии, как и в предыдущем случае с запросно-беззапросной радиолинией, происходит компенсация эффекта Доплера I порядка, что обеспечивает измерение частотного рассогласования наземного и бортового СЧВ.

Точное значение частоты волны (9.22), принимаемой на борту КА, найдем из соотношений (7.30) и (7.50):

$$f_{c\uparrow} = (F_{12\uparrow})_c f_0 \frac{1}{\left\{ \left(1 - \frac{g_{0\alpha_c} V_c^\alpha \theta_0}{-g_{00_c} c} \right)^2 - \frac{(V_2 \theta_0)^2}{-g_{00_c} c^2} \right\}^{0.5}} \cdot \frac{\left[1 - \frac{\bar{n}^{**}(\vec{R}_c)}{c} \theta_0 \vec{V}_c \vec{e}_\uparrow \right]_S}{1 + K_\uparrow^a}, \quad (9.27)$$

где K_\uparrow^a определяется формулой (9.20), индекс «S» относится к моменту приема τ_s сигнала на спутнике.



В соответствии с формулой (9.23) на борту спутника происходит формирование разностной бортовой частоты:

$$f_c^- = 2(f_0 + \Delta f_c) - f_{c\uparrow} = 2(f_0 + \Delta f_c) - (F_{12\uparrow})_c f_0 \cdot \frac{1}{\left\{ \left(1 - \frac{g_{0\alpha_c} V_c^\alpha \theta_0}{-g_{00_c} c} \right)^2 - \frac{(V_2 \theta_0)^2}{-g_{00_c} c^2} \right\}_S^{0.5}} \cdot \frac{\left[1 - \frac{\vec{n}^{**}(\vec{R}_c)}{c} \theta_0 \vec{V}_c \vec{e}_\uparrow \right]_S}{1 + K_\uparrow^a}. \quad (9.28)$$

Процесс преобразования частоты, усиление сигнала и прохождение его по радиопедам ретранслятора сопровождается задержкой сигнала на время τ_3 . Поэтому величины, относящиеся к моменту приема сигнала t_S необходимо пересчитать на момент его излучения $\tau_S + \tau_3$. Поэтому выражение $(\vec{V}_2 \vec{e}_\uparrow)_S$, входящее в числитель формулы (9.28), представим через $(\vec{V}_2 \vec{e}_\uparrow)_3$, в соответствии с формулой (7.63), в виде:

$$-(\vec{V}_c \vec{e}_\uparrow)_S = -(\vec{V}_c \vec{e}_\uparrow)_3 + \delta V_3, \quad (9.29)$$

где добавка скорости спутника за время задержки определяется формулой (7.64).

На основе этого замечания формула (9.28) для частоты радиоволны f_c^{-3} , излучаемой с борта КА в результате задержки на τ_3 , принимает вид:

$$f_c^{-3} = 2\Delta f_c + f_0 \left\{ 2 - \frac{(F_{12\uparrow})_c}{\left\{ \left(1 - \frac{g_{0\alpha_c} V_c^\alpha \theta_0}{-g_{00_c} c} \right)^2 - \frac{(V_2 \theta_0)^2}{-g_{00_c} c^2} \right\}_3^{0.5}} \cdot \frac{\left[1 - \frac{\vec{n}^{**}(\vec{R}_c)}{c} \theta_0 \vec{V}_c \vec{e}_\uparrow - \frac{\delta V_3}{c} \right]_3}{1 + K_\uparrow^a} \right\}. \quad (9.30)$$

←----->
 Частота волны, принимаемой на Земле, определяется в соответствии с формулой (7.31):

$$f_{E\downarrow} = F_{\downarrow} f_c^{-3} \left\{ \left(1 - \frac{g_{0\alpha_c} V_c^\alpha \theta_0}{-g_{00_c} c} \right)^2 - \frac{(V_c \theta_0)^2}{-g_{00_c} c^2} \right\}_3^{0,5} \cdot \frac{1 - K_{\downarrow}^a}{1 + \frac{\vec{n}^{**}(\vec{R}_c)}{c} \theta_0 (\vec{V}_c \vec{e}_{\uparrow})_3}, \quad (9.31)$$

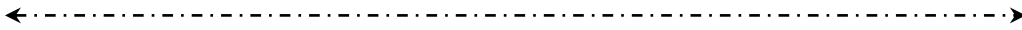
где $\vec{e}_{\downarrow} = -\vec{e}_{\uparrow}$; коэффициент F_{\downarrow} определяется соотношением (7.9б).

Используя выражение (9.30) и пренебрегая членами порядка $1/c^4$, полученное соотношение после несложных преобразований приводим к виду:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f_{изм}^{(2)}}{f_0} = \frac{f_{E\downarrow} - f_0}{f_0} = \frac{2\Delta f_C}{f_0} - 2(F_{12\uparrow} - 1) + \frac{\delta V_3}{c} + \\ + \frac{1}{c^2} (V_c^2 - \dot{R}_c^2 - 2[\vec{\Omega} \vec{R}_c] \vec{V}_c + \delta V_3^2) - \\ - \frac{2}{c^3} \left(\dot{R}_c^2 [\vec{\Omega} \vec{R}_c] \vec{e} + \frac{\dot{R}_c^3}{2} \right) - (K_{E\downarrow}^a - K_{E\uparrow}^a) + \sigma_f, \end{aligned} \quad (9.31a)$$

Важно отметить, что полученное соотношение для измеряемой частоты $\Delta f_{изм}^{(2)}$, соответствующее второму варианту системы сличения частот движущихся СЧВ с компенсацией эффекта Доплера I порядка, отличается от соотношения (9.21), соответствующего измеряемой частоте $\Delta f_{изм}^{(1)}$ в первом варианте системы, лишь в знаках некоторых членов. В этом смысле рассмотренные системы равноценны.

Во втором варианте системы, как и в первом, для упрощения выкладок не рассматривались особенности влияния частотнозависимых свойств ионосферы на условия распространения радиоволн, поскольку они достаточно подробно исследованы в известных работах. Однако следует отметить, что второй из рассмотренных вариантов с точки зрения учета влияния атмосферы предпочтительнее первого, поскольку в нем используется лишь две радиополосы, а не три как в первом.



9.2. Релятивистская синхронизация с помощью наземных глобальных ВОЛС

9.2.1. Постановка задачи

В последние годы активно реализуется идея использования протяженных волоконно-оптических линий связи для передачи фазы высокостабильных СЧВ, а также для дистанционного сличения их частот [245–249]. При этом возможно проведение мониторинга гравитационного смещения частоты удаленного СЧВ, а по нему – мониторинг изменений разности гравитационных потенциалов между удаленными точками. На территории Европы уже планируется создание таких волоконно-оптических измерительных сетей. В этой связи очень важно рассмотреть возможности релятивистской синхронизации с помощью протяженных ВОЛС.

Условимся, что на противоположных концах протяженного волоконно-оптического кабеля размещены два стандарта частоты и времени (СЧВ): эталонный № 1 со шкалой времени τ и ведомый № 2 со шкалой $\tau_g = \tau + \Delta\tau_g$, смещенной относительно эталонной на $\Delta\tau_g$. Кроме того, задающий генератор эталонного СЧВ имеет частоту f_0 , а ведомый – частоту $f_g = f_0 + \Delta f_g$. Расхождение эталонной (базовой) и ведомой шкал времени на момент излучения синхронизирующего сигнала как функция базового времени τ , в соответствии с соотношением (3.26), составляет:

$$\Delta\tau_g = \tau_g - \tau = \Delta\tau_T + \Delta\tau_P, \quad (9.32)$$

где $\Delta\tau_T$ – техническое рассогласование шкал времени, определяемое формулой (9.2); $\Delta\tau_P$ – релятивистское смещение шкал времени двух стационарных наземных часов, определяемое основной формулой (3.6.3) раздела 3.3, а также формулами для постоянных гравитационных смещений (раздел 3.3.3), приливных смещений (раздел 3.3.4), а также смещений, вызванных неравномерностью вращения Земли (раздел 3.3.5).

Текущая относительная расстройка двух СЧВ по частоте определяется формулой (9.13) и в данном случае представляется в виде суммы:

$$\frac{\Delta f_g}{f_0} = \frac{\Delta f_P}{f_0} + \frac{\Delta f_T}{f_0}, \quad (9.33)$$

←----->

где Δf_T – техническая расстройка по частоте, определяемая формулой (9.14); $\Delta f_p/f_0$ – взаимное релятивистское смещение частот задающих генераторов стационарных наземных СЧВ, вызванное влиянием потенциалов ГПЗ, лунно-солнечными приливами, неравномерностью вращения Земли определяемое формулами раздела 3.3.

Как и в наземно-космических системах, с помощью ВОЛС возможно решение двух задач: измерение характеристик нестабильности СЧВ при известных релятивистских смещениях времени и частоты, а также измерение (уточнение) релятивистских эффектов при использовании высокостабильных СЧВ.

Решение обеих задач удобно вести в геоцентрической вращающейся земной системе отсчета ITRS.

Наивысшую точность синхронизации и измерения релятивистских смещений, как и в предыдущих случаях, можно получить на основе использования дуплексного и запросно-беззапросного методов компенсации задержки и доплеровских смещений на трассе распространения оптической волны.

9.2.2. Релятивистская синхронизация с компенсацией задержки в ВОЛС

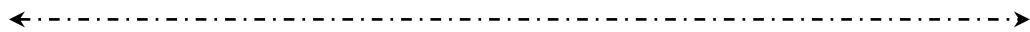
9.2.2.1. Дуплексный метод

Время запаздывания в ВОЛС метки времени эталонного СЧВ № 1 относительно одноименной метки времени ведомого СЧВ № 2, измеренное в точке размещения СЧВ-2 (направление «туда» (\uparrow)), определяется соотношением (7.72):

$$\tau_{\uparrow 2}^{изм} = \tau_{\uparrow} - \Delta\tau_{\epsilon} = \frac{R}{c} \left[1 - \frac{\mu_e}{\rho_2 c^2} - \frac{1}{2c^2} (\Omega_e R_e \cos \psi_2)^2 \right] + \tau_{ГР} + \tau_{\uparrow}^{\Omega} + \tau_{\uparrow}^{\Delta n} - \Delta\tau_{\epsilon} + \sigma_{\tau}, \quad (9.34)$$

где R , R_e , ρ_2 , ψ_2 – соответственно геометрическая длина волокна; радиус Земли; геоцентрическая высота и геоцентрическая широта точки расположения ведомого СЧВ-измерителя; σ_{τ} – случайная погрешность измерений;

$$\tau_{ГР} = \frac{2}{c^3} \int_{R_c}^{R_e} \left(\frac{\mu_e}{\rho} + \Delta\varphi_M + \Delta\varphi_S \right) dR \quad (9.35)$$



– гравитационная задержка в поле Земли, Луны и Солнца;

$$\tau_{\uparrow}^{\Omega} = \frac{\theta_2}{c} \int_{R_1}^{R_2} [\overline{\Omega_e R}] d\vec{R} \quad (9.36)$$

– гироскопическая задержка;

$$\tau_{\uparrow}^{\Delta n} = \frac{\theta_2}{c} \int_{R_1}^{R_2} \left[\Delta n_{0\uparrow}(R, t) + \frac{\partial n_{\uparrow}(R, t)}{\partial \omega} \Delta \omega \right] dR \quad (9.37)$$

– задержка на всей длине световода, вызванная его преломляющими свойствами и дисперсией. Членами порядка $1/c^4$ в приведенных формулах пренебрегаем.

Измеряемое время запаздывания метки времени, посылаемой с ведомого СЧВ на эталонный, определяется на основе соотношения (7.81):

$$\begin{aligned} \tau_{\downarrow 1}^{u3M} &= \Delta \tau_g + \tau_{\downarrow} = \Delta \tau_g + \\ &+ \frac{R}{c} \left[1 - \frac{\mu_e}{\rho_1 c^2} - \frac{1}{2c^2} (\Omega_e R_e \cos \psi_1)^2 \right] + \tau_{GP} + \tau_{\downarrow}^{\Omega} + \tau_{\downarrow}^{\Delta n} + \sigma_{\tau}, \end{aligned} \quad (9.38)$$

где гравитационная задержка τ_{GP} , в силу изотропности свойств гравитационного поля, определится формулой (7.73);

$$\tau_{\downarrow}^{\Omega} = -\frac{\theta_{1E}}{c} \int_{R_2}^{R_1} [\overline{\Omega_e R}] d\vec{R}, \quad (9.39)$$

$$\tau_{\downarrow}^{\Delta n} = \frac{\theta_{1E}}{c} \int_{R_1}^{R_2} \left[\Delta n_{0\downarrow}(R, t) + \frac{\partial n_{\downarrow}(R, t)}{\partial \omega} \Delta \omega \right] dR. \quad (9.40)$$

Разность результатов измерений несет информацию об искомом рассогласовании шкал времени $\Delta \tau_g$:

$$\begin{aligned} \Delta \tau_{\uparrow \downarrow}^{u3M} &= \tau_{\downarrow 1}^{u3M} - \tau_{\uparrow 2}^{u3M} = 2\Delta \tau_g + \frac{R\mu_e}{c^3} \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right) + \\ &+ \frac{R\Omega_e^2 R_e^2}{c^3} (\cos^2 \psi_2 - \cos^2 \psi_1) + 2\tau_{\downarrow}^{\Omega} + (\tau_{\downarrow}^{\Delta n} - \tau_{\uparrow}^{\Delta n}) + \sqrt{2}\sigma_{\tau}. \end{aligned} \quad (9.41)$$

Полученная формула описывает релятивистские условия распространения в двух разных оптических волокнах учетом членов, пропорциональных $1/c^3$. Если ими пренебречь, а также принять, что встречные световые лучи распространяются в одном оптическом волокне, то полученная формула существенно упрощается:

$$\Delta\tau_{\uparrow\downarrow}^{\text{изм}} = 2\Delta\tau_e + \frac{4\Omega_e S_{\nabla}}{c^2} + \sqrt{2}\sigma_{\tau}, \quad (9.42)$$

где S_{∇} – проекция на плоскость экватора площади треугольника, ограниченного радиус-векторами обоих СЧВ и ВОЛС.

9.2.2.2. Запросно-беззапросный метод

В этом методе используются две оптических волны: односторонняя СЧВ2-СЧВ1 (\downarrow) и двусторонняя (запросная $\uparrow\downarrow$), посылаемая с эталонного СЧВ1.

Измеряемое время задержки метки времени, посылаемой по односторонней линии от СЧВ2, относительно одноименной метки времени СЧВ1 определяется формулой (9.34). Время задержки метки времени в запросной линии с отражением запросного сигнала от противоположного торца световода определяется формулой (7.84), в которой для условий распространения волны по поверхности Земли следует пренебречь гирокопическими эффектами второго порядка:

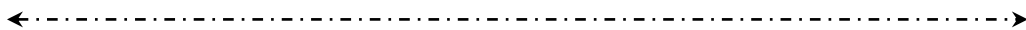
$$\tau_{\uparrow\downarrow}^{\text{изм}} = \frac{2R}{c} \left[1 - \frac{\mu_e}{R_e c^2} - \frac{1}{2c^2} (\Omega_e R_e \cos\psi_{1E})^2 \right] + 2\tau_{ГР} + (\tau_{\uparrow}^{\Delta n} + \tau_{\downarrow}^{\Delta n}) + \sigma_{\tau}. \quad (9.43)$$

Из этих формул находим выражение для искомого рассогласования шкал времени:

$$\Delta\tau_{12}^{\text{изм}} = \tau_{\uparrow\downarrow}^{\text{изм}} - 2\tau_{\downarrow}^{\text{изм}} = 2\Delta\tau_B + \frac{4\Omega_e S_{\nabla}}{c^2} + (\tau_{\downarrow}^{\Delta n} - \tau_{\uparrow}^{\Delta n}) + \sqrt{2}\sigma_{\tau}, \quad (9.44)$$

откуда при распространении встречных лучей в одном световоде следует полное совпадение с формулой дуплексного метода (9.42).

Достигнутая на сегодняшний день инструментальная погрешность измерений запаздывания импульсных оптических сигналов, передаваемых по волоконно-оптическим линиям синхронизации, составляет 10–20 пикосекунд [246–247].



9.2.3. Релятивистские поправки при сличении частот на основе ВОЛС

Рассмотрим поправки при сличении частот дуплексным и запросно-беззапросным методами. Установим, что по ВОЛС во встречных направлениях по разным световодам распространяются две оптические волны: от эталонного СЧВ1 к ведомому СЧВ2 (в направлении \uparrow) распространяется волна с эталонной частотой f_0 , обратно – в направлении \downarrow – волна с частотой $f_s = f_0 + \Delta f_s$. Принимаемые частоты обозначим в соответствии с номерами пунктов приема, т.е. $f_{2\uparrow}$ и $f_{1\downarrow}$.

Частоту световой волны, передаваемой по световоду 1 от излучателя СЧВ1, в точке приема 2 определим в соответствии с формулой (7.76):

$$f_{2\uparrow} = f_0 \frac{F_{12\uparrow}}{1 + \frac{\theta_2}{c} \int_{R_1}^{R_2} \left[\Delta \dot{n}_{0\uparrow} + \frac{\partial \dot{n}_{\uparrow}(R,t)}{\partial \omega} \Delta \omega \right] \vec{e}_{\uparrow} d\vec{R}}, \quad (9.45)$$

где коэффициент $F_{12\uparrow}$ определяется формулой (7.9); $\Delta \dot{n}_{0\uparrow} = \frac{d(\Delta n_{0\uparrow})}{dt}$; $\frac{\partial \dot{n}_{\uparrow}}{\partial \omega} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial n_{\uparrow}}{\partial \omega} \right)$ – производные по времени от характеристик волокна, по которому распространяется луч \uparrow .

В точке 2 выделяется и измеряется разностная частота:

$$f_2^{изм} = f_s - f_{2\uparrow} = \Delta f_s + f \left(1 - \frac{F_{12\uparrow}}{1 + \dot{K}_{\uparrow 1}} \right) + \sigma_f, \quad (9.46)$$

где σ_f – случайная погрешность измерений;

$$\dot{K}_{\uparrow 1} = \frac{\theta_2}{c} \int_{R_1}^{R_2} \left[\Delta \dot{n}_{0\uparrow} + \frac{\partial \dot{n}_{\uparrow}(R,t)}{\partial \omega} \Delta \omega \right] \vec{e}_{\uparrow} d\vec{R} \quad (9.47)$$

– коэффициент преобразования частоты за счет изменения преломляющих свойств первого световода.

На основании формул (7.31) и (7.76) находим выражение для частоты обратной волны, распространяющейся во втором световоде и принимаемой в точке 1:

$$f_{1\downarrow} = F_{12\downarrow} (f_0 + \Delta f_\epsilon) \left\{ 1 + \frac{\theta_2}{c} \int_{\vec{R}_2}^{\vec{R}_1} \left[\Delta \dot{n}_{0\downarrow} + \frac{\partial \dot{n}_\downarrow(R,t)}{\partial \omega} \Delta \omega \right] \vec{e}_\downarrow d\vec{R} \right\} \approx$$

$$\approx \Delta f_\epsilon + F_{12\downarrow} f_0 \left\{ 1 - \frac{\theta_2}{c} \int_{\vec{R}_2}^{\vec{R}_1} \left[\Delta \dot{n}_{0\downarrow} + \frac{\partial \dot{n}_\downarrow(R,t)}{\partial \omega} \Delta \omega \right] \vec{e}_\uparrow d\vec{R} \right\} \quad (9.48)$$

где учтено, что $\vec{e}_\downarrow = -\vec{e}_\uparrow$.

Разность частот, измеряемая в точке размещения СЧВ1, составит:

$$\Delta f_1^{u3M} = f_0 - f_{1\downarrow} = f_0 \left(1 - \frac{1 - \dot{K}_{2\downarrow}}{F_{12\uparrow}} \right) - \Delta f_\epsilon + \sigma_f, \quad (9.49)$$

где по аналогии с (9.47)

$$\dot{K}_{\downarrow 2} = -\frac{\theta_2}{c} \int_{\vec{R}_1}^{\vec{R}_2} \left[\Delta \dot{n}_{0\downarrow} + \frac{\partial \dot{n}_\downarrow(R,t)}{\partial \omega} \Delta \omega \right] \vec{e}_\uparrow d\vec{R}. \quad (9.50)$$

На основе результатов измерений (9.46) и (9.49) получаем выражение, содержащее искомую расстройку собственных частот двух разнесенных СЧВ:

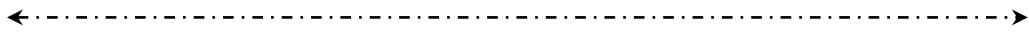
$$\frac{f_2^{u3M} - f_1^{u3M}}{2f_0} = \frac{\Delta f_\epsilon}{f_0} - (F_{12\uparrow} - 1) + \frac{1}{2} (\dot{K}_{\uparrow 1} - \dot{K}_{\downarrow 2}) + \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_f. \quad (9.51)$$

Если оба встречных луча распространяются по одному волокну, то $\dot{K}_{\downarrow 1} = \dot{K}_{\uparrow 2}$. В результате формула для определения расстройки собственных частот двух СЧВ на основе выражения для $F_{12\uparrow}$ (7.9а) принимает вид:

$$\frac{\Delta f_\epsilon}{f_0} = \frac{1}{2} \frac{f_2^{u3M} - f_1^{u3M}}{f_0} + \frac{\varphi_{e2} - \varphi_{e1}}{c^2} + \frac{\Delta \varphi_{M_{21}}}{c^2} +$$

$$+ \frac{\Delta \varphi_{S_{21}}}{c^2} + \frac{1}{2c^2} \left(\left[\overline{\Omega R_2} \right]^2 - \left[\overline{\Omega R_1} \right]^2 \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_f. \quad (9.52)$$

Таким образом, релятивистская поправка при определении разности частот двух разнесенных СЧВ дуплексным методом с помощью ВОЛС определяется только разностью потенциалов интегрального гравитационного поля в системе ITRS между точками размещения СЧВ.



Теперь рассмотрим запросно-беззапросный метод, когда волна в односторонней и запросной линиях между точками 1 и 2 распространяются в одном световоде. При этом на другом конце световода устанавливается фотоприемник, а также создается отражающий торец световода для формирования обратной волны в запросном канале.

Для вычисления частотных смещений в запросно-беззапросном методе необходимо воспользоваться формулами (9.45) (волна в направлении \uparrow) и формулой (7.86) для частоты отраженной волны в запросном канале, измеряемой в точке 1. В результате в точке 2 выделяется и измеряется разностная частота:

$$f_2^{u3M} = f_s - f_{2\uparrow} = \Delta f_s + f \left(1 - \frac{F_{12\uparrow}}{1 + \dot{K}_{\uparrow}} \right) + \sigma_f, \quad (9.53)$$

где коэффициент \dot{K}_{\uparrow} определяется формулой (9.47).

В точке 1 измеряется частота обратной волны запросного канала:

$$f_{\uparrow\downarrow}^{u3M} = f_0 - f_0 \frac{1 - \dot{K}_{\downarrow}}{1 + \dot{K}_{\uparrow}} + \sigma_f, \quad (9.54)$$

где \dot{K}_{\downarrow} определяется формулой (9.50).

Поскольку обе волны распространяются в одном и том же световоде, то можно считать $\dot{K}_{\downarrow} = \dot{K}_{\uparrow}$. Поэтому на основе результатов измерений (9.53) и (9.54) получаем выражение для определения частотной расстройки двух СЧВ, правая часть которого полностью идентична формуле (9.51):

$$\frac{2f_2^{u3M} - f_{\uparrow\downarrow}^{u3M}}{2f_0} = \frac{\Delta f_s}{f_0} - (F_{12\uparrow} - 1) + \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_f, \quad (9.55)$$

Таким образом, в запросно-беззапросном методе определения частотной расстройки двух СЧВ с помощью ВОЛС условия компенсации релятивистских эффектов те же, что и в дуплексном методе.

9.2.4. Релятивистские поправки при передаче фазы и частоты высокостабильного СЧВ с помощью ВОЛС

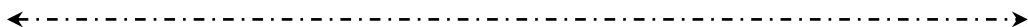
Волоконно-оптические линии связи широко используются для передачи частот высокостабильных стандартов частоты и времени [248, 249]. В одном из отечественных лабораторных экспериментов [250] использовалась передача фазы и частоты через катушку ВОЛС длиной 100 км путем модуляции оптической несущей радиотехническим сигналом частотой 100 МГц. При этом на основе прямой и обратной волны использовался метод компенсации неопределенности фазовой задержки на трассе распространения, вызванной температурными, механическими и другими неконтролируемыми воздействиями на оптическое волокно. В эксперименте достигнута весьма высокая инструментальная точность передачи частоты: относительная погрешность сравнения частот на входе и выходе ВОЛС составила 10^{-17} . В другом отечественном эксперименте [249] достигнута погрешность 10^{-19} .

Суть эксперимента состояла в сравнении фаз двух сигналов: эталонного, который отправляется в линию, и сигнала, который пробежал по линии туда и обратно. Разность фаз двух сигналов несет информацию о возмущениях, вносимых линией. Эту разность фаз можно использовать для коррекции фазы эталонного сигнала, отправляемого в линию. Компенсация может выполняться либо электронным фазовращателем, «электронная компенсация» [250], либо с помощью управляемой оптической линии задержки, последовательно включенной в оптическую линию.

Принципиальной особенностью проведенного эксперимента с использованием электронной компенсации [250] является проведение операции сравнения фаз и частот на концах катушки оптического волокна в пределах лаборатории, т.е. в одной пространственной точке. В этом случае релятивистские эффекты изменения времени распространения, частоты и фазы не проявляются.

Учитывая высокие потенциальные возможности метода, представляет интерес оценка релятивистских параметров волны на концах протяженной ВОЛС, вход и выход которой могут быть значительно, на сотни километров, разнесенными в пространстве.

Рассмотрим процесс передачи фазы Φ , эталонного СЧВ, находящегося в точке 1 ВОЛС, в точку 2 этой же оптической линии. Передачу будем вести на радиочастоте, которая модулирует оптическую несущую. Определение фазы волны в любой точке трассы будем вести в соответствии с формулой (6.131):



$$d\Phi = \omega_k dt - \frac{\omega_k}{c} \vec{n}^{**} d\vec{R} = \omega_k dt - \omega_k dt_R, \quad (9.56)$$

где ω_k – координатная частота волны, не зависящая от параметров гравитационного поля и потому неизменная вдоль пути волны; dt – интервал координатного времени вне гравитационного поля; $dt_R = \frac{1}{c} \vec{n}^{**} d\vec{R}$ – задержка волны на трассе распространения, измеряемая в координатном времени; \vec{n}^{**} – обобщенный коэффициент преломления материала оптического волокна в гравитационном поле вращающейся Земной системы отсчета, который определяется формулами (6.9) и (7.8).

Фазу эталонного колебания с координатной частотой ω_k и начальной фазой ϕ_0 на входе в волокно определим в виде:

$$\Phi_{\downarrow} = \omega_k t - \phi_0. \quad (9.57)$$

Фаза прямого луча (\uparrow), посылаемого в линию от эталона, на другом конце трассы на основе (7.8) определяется в виде (см. также (7.79)):

$$\Phi_{\uparrow} = \Phi_{\downarrow} - \frac{\omega_k}{c} \int_{R1}^{R2} \vec{n}^{**} d\vec{R} = \omega_k t - \phi_0 - \phi_{JI}^0 - \phi_{\Omega}, \quad (9.58)$$

где ϕ_{JI}^0 – фазовая задержка на трассе, не зависящая от направления волны и определяемая суммой:

$$\phi_{JI}^0 = \frac{\omega_k}{c} \int_{R1}^{R2} \Delta \vec{n}_0^{**} d\vec{R}, \quad (9.59)$$

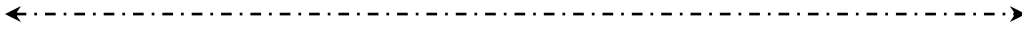
где

$$\Delta \vec{n}_0^{**} = \vec{e} \left\{ 1 + \Delta n_0 + \frac{2\varphi}{c^2} + \frac{[\vec{\Omega} \vec{R}]^2}{2c^2} + \frac{1}{2c^2} ([\vec{\Omega} \vec{R}] \vec{e})^2 \right\} \quad (9.60)$$

– добавка к обобщенному коэффициенту преломления, не зависящая от направления волны в световоде; $\Delta n_0 = n_0 - 1$; n_0 – коэффициент преломления материала оптического волокна;

$$\phi_{\Omega} = \frac{\omega_k}{c^2} \int_{R1}^{R2} [\vec{\Omega}_e \vec{R}] d\vec{R} = \omega_k \Delta \tau_{\Omega} = \frac{2\omega_k \Omega_e S_{\nabla}}{c^2} \quad (9.61)$$

– фазовая гироскопическая задержка, вызванная вращением системы отсчета и зависящая от направления волны в волокне;



$$\Delta\tau_{\Omega} = \frac{2\Omega_e S_{\nabla}}{c^2} \quad (9.62)$$

– гироскопический эффект смещения времени вследствие вращения Земли (эффект Саньяка); S_{∇} – площадь экваториальной проекции треугольника, ограниченного радиус-векторами излучателя и приемника, а также контуром ВОЛС;

В запросной радиолинии, пролегающей «туда и обратно» по одной и той же трассе, эффект Саньяка полностью компенсируется. Поэтому фазу сигнала, пробежавшего по трассе туда и обратно ($\uparrow\downarrow$), на основе тех же соотношений определим в виде (см. также (7.87) и (7.88)):

$$\Phi_{\uparrow\downarrow} = \Phi_{\circ} - 2\phi_{\nabla}^0 = \omega_{\kappa}t - \phi_0 - 2\phi_{\nabla}^0. \quad (9.63)$$

Из сравнения фаз эталонного сигнала на входе и выходе ВОЛС (9.57) и (9.63) находим:

$$\phi_{\nabla}^0 = \frac{1}{2}(\Phi_{\circ} - \Phi_{\uparrow\downarrow}). \quad (9.64)$$

Суммируя эту фазу с фазой входного сигнала (9.57), на основе (9.58) получаем скорректированное значение фазы луча Φ_2 на другом конце световода:

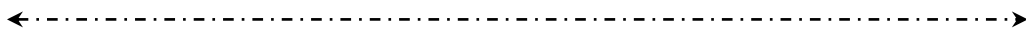
$$\Phi_2 = \Phi_{\uparrow} + \frac{1}{2}(\Phi_{\circ} - \Phi_{\uparrow\downarrow}) = \omega_{\kappa}t - \phi_0 - \phi_{\Omega} = \Phi_{\circ} - \phi_{\Omega}. \quad (9.65)$$

Таким образом, в рассмотренной схеме фаза эталона действительно передается на другой конец ВОЛС, однако появилась дополнительная фазовая задержка (9.61) вследствие эффекта Саньяка.

В реальных системах передача фазы производится автоматически на основе схемы фазовой автоподстройки, реализующей условие равенства нулю фазового смещения (9.64).

При длине ВОЛС 1000 км, размещении его вдоль параллели на широте 50° гироскопическое смещение времени (9.62) составляет примерно 3,2 нс, а соответствующее фазовое смещение ϕ_{Ω} на частоте 100 МГц составляет около 2 рад.

Определим соотношение собственных (измеряемых, действительных) частот на концах ВОЛС. Для этого воспользуемся правилом (см. раздел 3) что фаза, как инвариант, может быть одинаково выражена через координатные частоту и время, а также через собственную частоту ω_c и собственное время τ :



$$\begin{aligned}\Phi_2 &= \omega_k t - \phi_0 - \phi_\Omega = \omega_2 \tau_2 - \phi_0 - \phi_\Omega \\ \Phi_3 &= \omega_k t - \phi_0 = \omega_3 \tau_3 - \phi_0,\end{aligned}\quad (9.66)$$

Дифференцируя оба выражения для фазы по координатному времени при $\phi_0, \phi_\Omega = const$, на основе соотношений (3.5) и (3.9а) для покоящихся часов, получим:

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi_2}{dt} &= \omega_k = \omega_2 \frac{d\tau_2}{dt} = \omega_2 \sqrt{g_{00_2}}, \\ \frac{d\Phi_3}{dt} &= \omega_k = \omega_3 \frac{d\tau_3}{dt} = \omega_3 \sqrt{g_{00_3}}.\end{aligned}\quad (9.67)$$

Отсюда следует искомое соотношение собственных частот волны на разных концах световода:

$$\omega_2 = \omega_3 \frac{\sqrt{-g_{00_3}}}{\sqrt{-g_{00_2}}} = \omega_3 F_\uparrow, \quad (9.68)$$

где g_{00} – компоненты метрического тензора системы отсчета на соответствующих концах трассы; F_\uparrow – коэффициент преобразования частоты излучения в гравитационном поле (7.9), (7.9а) в ВОЛС, покоящейся в гравитационном поле.

Используя формулы (7.9)–(7.10), определим измеряемую разность собственных частот двух волн: частоты волны на выходе ВОЛС f_2 и частоты эталонного СЧВ f_3 :

$$\begin{aligned}\frac{f_2 - f_3}{f_3} &= F_\uparrow - 1 = + \frac{\varphi_{e2} - \varphi_{e3}}{c^2} + \\ &+ \frac{1}{2c^2} \left([\overline{\Omega R_2}]^2 - [\overline{\Omega R_3}]^2 \right) + \frac{\Delta\varphi_M}{c^2} + \frac{\Delta\varphi_S}{c^2} + \frac{\sigma_f}{f_3},\end{aligned}\quad (9.69)$$

где обозначения те же, что и в (7.9) и (7.10); σ_f / f_3 – инструментальная относительная погрешность измерения разности частот, которая в рассмотренном эксперименте [250] составила 10^{-17} .

Оценим величину входящих в эту формулу релятивистских частотных смещений, которые должны быть учтены при высокоточных измерениях.

←----->

Гравитационные смещения, вызванные влиянием потенциала поля Земли φ_e , составляют 10^{-16} на каждые метр разности высот эталонного генератора и выходного конца световода. Величина релятивистских сдвигов, вызванных влиянием центробежного потенциала $\Omega^2 R^2$, зависит от разности широт места измерения и эталонного генератора. При широте места эталона около 50° эффект частотного смещения составляет около $2,4 \cdot 10^{-14}$ на каждый градус разности широт эталона и точки измерений.

Оценка вкладов каждой составляющей неравномерности вращения Земли в амплитуду относительного смещения частоты, согласно разделу 3.3.4, дает следующие результаты: по нутации – $1,2 \cdot 10^{-16}$; по отклонению полюсов – $0,6 \cdot 10^{-17}$; по прецессии – $1 \cdot 10^{-19}$. Неравномерность вращения Земли вокруг своей оси дает вклад по сдвигу частоты в пределах $1 \cdot 10^{-16} \div 6 \cdot 10^{-16}$. Приливные лунные и солнечные относительные смещения частоты наземных СЧВ, согласно разделу 3.3.4, достигают соответственно $(3-4)10^{-17}$ и $(1,4-1,8)10^{-17}$. Смещения, вызванные моментом импульса Земли, не превышают 10^{-21} .

Таким образом, к точности вычисления и компенсации релятивистских эффектов при сравнении частот СЧВ с использованием ВОЛС предъявляются достаточно жесткие, но принципиально реализуемые требования.

9.3. Выводы к разделу 9

1. Основными радиолиниями, позволяющими компенсировать неизвестную задержку на трассе и на основе которых может строиться космическая система высокоточной синхронизации и измерения релятивистских эффектов, являются комплексная запросно-беззапросная, а также дуплексная, использующая две встречных беззапросных радиолинии, в том числе через космический ретранслятор. При этом они могут быть реализованы в оптическом или СВЧ-диапазоне волн, оснащаться бортовыми ответчиками и бортовыми уголковыми отражателями. Полученные формулы позволяют рассчитать релятивистские эффекты, связанные с распространением радиоволн во всех перечисленных радиолиниях с погрешностью в единицы пикосекунд. Основную неопределенность в измерения вносит нестационарная атмосфера, поскольку для высоких спутников моменты прохождения лучей через атмосферу разнесены примерно на 0,2 секунды.



2. С помощью наземно-космических радиолиний с компенсацией задержки и эффекта Доплера I порядка на трассе распространения на основе использования высокостабильных бортовых СЧВ возможно решение задачи повышения точности измерения релятивистских эффектов. Решение такой задачи запланировано, например, в ряде проектов Европейского космического агентства, в том числе в эксперименте ACES [38], в котором предполагается использование бортового СЧВ PHARAO с нестабильностью 10^{-16} – 10^{-17} .

Полученные выше формулы позволяют рассчитать относительное значение релятивистских частотных эффектов в радиолиниях «Земля – космос» с компенсацией эффекта Доплера I порядка с погрешностью не более 10^{-17} .

3. С помощью ВОЛС возможно проведение мониторинга гравитационного смещения шкалы времени и частоты удаленного СЧВ, а по нему – мониторинга изменений разности гравитационных потенциалов между удаленными точками. На территории Европы уже планируется создание таких распределенных волоконно-оптических измерительных сетей, имеется ряд публикаций на эту тему. Достигнутая на сегодняшний день в РФ инструментальная погрешность измерений запаздывания импульсных оптических сигналов, передаваемых по волоконно-оптическим линиям синхронизации, составляет 10–20 пикосекунд. Кроме того, в отечественных экспериментах достигнута весьма высокая инструментальная точность передачи частоты: в одном из них относительная погрешность сравнения частот на входе и выходе ВОЛС составила 10^{-17} , в другом – 10^{-19} .

4. Проведенный релятивистский расчет системы передачи фазы с помощью протяженной ВОЛС позволил установить дополнительную фазовую задержку вследствие эффекта Саньяка, а также комплекс гравитационных смещений частоты. При этом гравитационные смещения, вызванные влиянием потенциала поля Земли, составляют 10^{-16} на каждые метр разности высот эталонного генератора и выходного конца световода. Величина релятивистских сдвигов, вызванных влиянием центробежного потенциала, зависит от разности широт места измерения и эталонного генератора. При широте места эталона около 50° эффект частотного смещения составляет около $2,4 \cdot 10^{-14}$ на каждый градус разности широт эталона и точки измерений.

К точности вычисления и компенсации релятивистских эффектов при сравнении частот СЧВ с использованием ВОЛС предъявляются достаточно жесткие, но принципиально реализуемые требования.

10. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕТРОЛОГИЯ КОСМИЧЕСКИХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ РАДИОЛИНИЙ

10.1. Релятивистские погрешности измерений дальности и скорости в наземных НАП ГНСС

10.1.1. Релятивистские погрешности измерений псевдодальности и разности псевдодальностей

10.1.1.1. Измерение псевдодальности

Рассмотрим релятивистские погрешности измерений псевдодальности и разности псевдодальностей до НКА ГНСС с помощью НАП, размещенной на борту приземного носителя, движущегося со скоростью \vec{V}_0, \vec{a}_0 . Дальность до i -го навигационного КА (НКА) и его скорость обозначим, соответственно, через $\vec{R}_{ci}, \vec{V}_{ci}$. Считаем, что скорость приземного носителя существенно меньше скорости спутника: $V_0 \ll V_c$.

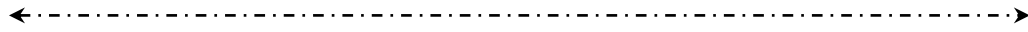
В качестве исходного соотношения, определяющего время распространения радиосигнала на линии НКА – НАП, используем релятивистскую формулу (7.16), которая применительно к данному случаю выглядит следующим образом:

$$\tau_{\downarrow i} = \frac{\theta_0 R'_{ic}}{c} + \frac{\theta_0}{c} \int_{\bar{R}_0}^{\bar{R}'_c} (\bar{n}^{**} - \bar{e}) d\bar{R} + \frac{\vec{V}_{0i} \vec{R}'_{ci}}{c^2} + \frac{R'^2_{ci}}{2c^3} \vec{a}_0 \bar{e}, \quad (10.1)$$

где расстояние «источник – приемник» R' определяется через координаты спутника и НАП на момент излучения формулой (6.65); коэффициент θ_0 для приземных условий измерений, в соответствии с (7.12), определяется формулой:

$$\theta_0 = 1 - \frac{\mu_e}{R_e c^2} - \frac{1}{2c^2} (\Omega_e R_e \cos \psi_0)^2. \quad (10.2)$$

Подынтегральная разность, включающая обобщенный коэффициент преломления, применительно к системе ITRS определяется формулой (7.8). Пренебрегая слабым влиянием полей Луны и Солнца и параметрами неравномерности вращения Земли на задержку радиоволн, эту разность представляем в виде:



$$n^{**} - 1 = \Delta n_a(R) + \left\{ \frac{2\varphi_e}{c^2} + \frac{[\overline{\Omega R}]^2}{2c^2} + \frac{1}{2c^2} \left([\overline{\Omega R}] \vec{e} \right)^2 \right\} + \frac{1}{c} [\overline{\Omega R}] \vec{e}, \quad (10.3)$$

где $\Delta n_a(R) = n_a(R) - 1$; $n_a(R)$ – показатель преломления атмосферы, изменяющийся вдоль длины R трассы распространения волны НКА – НАП.

Измеренная в НАП задержка бортовой метки времени шкалы спутника $\Delta \tau_{\downarrow}^{uzm}$ относительно одноимённой метки времени на шкале НАП определяется соотношением:

$$\begin{aligned} \Delta \tau_{\downarrow}^{uzm} &= \Delta \tau_c + \tau_{\downarrow i} = \\ &= \Delta \tau_c + \frac{R_c'}{c} \left[1 - \frac{\mu_e}{R_e c^2} - \frac{1}{2c^2} (\Omega_e R_e \cos \psi_0)^2 \right] + \\ &+ \tau_{GP} + \tau_{\Omega \downarrow} + \tau_{\downarrow 2}^a + \frac{\vec{V}_{0i} \vec{R}_{ci}'}{c} + \frac{R_{ci}'^2}{2c^3} \vec{a}_0 \vec{e} + \sigma_{\tau}, \end{aligned} \quad (10.4)$$

где σ_{τ} – случайная погрешность измерений; $\Delta \tau_c$ – расхождение шкал времени спутника и НАП; $\tau_{\downarrow 2}^a$ – задержка в атмосфере, определяемая формулой (7.19); $\tau_{\Omega \downarrow}$ – гироскопическая задержка (эффект Саньяка) (7.20); τ_{GP} – гравитационная задержка в гравитационном поле системы ITRS (7.21).

На основе этого измерения определяется искомая псевдодальность до i -го НКА:

$$\hat{R}_i = c \Delta \tau_{\downarrow}^{uzm} = c \Delta \tau_c + R_i, \quad (10.5)$$

где

$$\begin{aligned} R_i &= R_c' + R_c' \left[-\frac{\mu_e}{R_e c^2} - \frac{1}{2c^2} (\Omega_e R_e \cos \psi_0)^2 \right] + \\ &+ c \tau_{GP} + c \tau_{\Omega \downarrow} + c \tau_{\downarrow 2}^a + \frac{\vec{V}_{0i} \vec{R}_{ci}'}{c} + \frac{R_{ci}'^2}{2c^2} \vec{a}_0 \vec{e} + c \sigma_{\tau}, \end{aligned} \quad (10.6)$$

где расстояние НАП–НКА R_c' на момент излучения радиосигнала определяется через искомые координаты НАП по формуле (6.65).

Оценка величины входящих сюда релятивистских задержек показывает, что они могут внести погрешности измерений дальности от единиц миллиметров до десятков метров (из-за гироскопической задержки Саньяка).

10.1.1.2. Измерение разности псевдодальностей

Считая шкалы времени всех НКА синхронизированными между собой ($\Delta\tau_{ci} = \Delta\tau_{cj}$), на основе полученных выше соотношений (10.4) – (10.6) релятивистское выражение разности псевдодальностей НАП до двух НКА получаем в виде:

$$\begin{aligned} \hat{R}_i - \hat{R}_j = & (R_{ci}' - R_{cj}') + (R_{ci}' - R_{cj}') \left[-\frac{\mu_e}{R_e c^2} - \frac{1}{2c^2} (\Omega_e R_e \cos \psi_0)^2 \right] + \\ & + c(\tau_{\Gamma Pi} - \tau_{\Gamma Pj}) + c(\tau_{\Omega \downarrow i} - \tau_{\Omega \downarrow j}) + c(\tau_{\downarrow i}^a - \tau_{\downarrow j}^a) + \frac{\vec{V}_0}{c} (\vec{R}_{ci}' - \vec{R}_{cj}') + \\ & + \frac{1}{2c^2} (R_{ci}'^2 \vec{a}_0 \vec{e}_i - R_{cj}'^2 \vec{a}_0 \vec{e}_j) + \sigma_{\Delta R}. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Величина релятивистских погрешностей оценивается в каждом конкретном случае, поскольку они зависят от направления вектора НАП – НКА. В частности, наибольшие из них, вызываемые эффектом Саньяка, в зависимости от положения спутника могут как вычитаться, так и складываться.

10.1.1.3. Измерение псевдодальности в дифференциальном режиме

Чтобы установить, какие релятивистские эффекты проявляются при измерениях псевдодальности в дифференциальном режиме, воспользуемся соотношением (10.4). Для упрощения положим, что НАП неподвижен относительно поверхности Земли ($V_0 = a_0 = 0$). Учтем также, что расстояние между точками размещения НАП и контрольно-корректирующей станции (ККС) значительно меньше радиуса Земли. В результате разность псевдодальностей от одного и того же навигационного спутника до наземной ККС R_0 и до наземной НАП R_H выразится соотношением:

$$\begin{aligned} \Delta R = & (R_H' - R_0') \left[1 - \frac{\mu_e}{R_e c^2} - \frac{1}{2c^2} (\Omega_e R_e \cos \psi_0)^2 \right] + c(\tau_{\Gamma P_H} - \tau_{\Gamma P_0}) + \\ & + c(\tau_{\Omega \downarrow H} - \tau_{\Omega \downarrow 0}) + c(\tau_{\downarrow H}^a - \tau_{\downarrow 0}^a) + \sigma_{\Delta R}. \end{aligned} \quad (10.8)$$

При небольшой разности дальностей $R_H - R_0$ релятивистскими членами в первой и второй скобке можно пренебречь. В результате полученное соотношение (10.8) на основе формулы (7.27) представляем в виде:



$$\Delta R = (R_H' - R_0') + \frac{2\Omega_e}{c} (S_{\nabla H} - S_{\nabla 0}) + c(\tau_{\downarrow H}^a - \tau_{\downarrow 0}^a) + \sigma_{\Delta R}, \quad (10.9)$$

где второй член определяет разность гироскопических погрешностей измерения разности дальностей; $S_{\nabla H}, S_{\nabla 0}$ – проекции на плоскость экватора площадей треугольников, ограниченных, соответственно, радиус-векторами навигационного спутника и ККС, а также спутника и НАП.

Используя формулу (7.27), разность гироскопических погрешностей представим в виде:

$$\Delta R_{\Omega} = \frac{2\Omega_e}{c} [x_c (y_0 - y_H) - y_c (x_0 - x_H)], \quad (10.10)$$

где $\{x_c y_c\}$, $\{x_0 y_0\}$, $\{x_H y_H\}$ – координаты спутника, ККС и НАП соответственно.

Для оценки максимальной величины этой погрешности положим, что $x_c = 0$; $y_0 \approx y_c$; $y_c = 25,5 \cdot 10^6$ м; $x_H - x_0 = 1000$ км. В результате на широте, близкой к экватору, получаем максимальное значение ошибки: $\Delta R_{\Omega_{\max}} \approx 6,3$ м. На других широтах ошибка будет меньше.

10.1.2. Релятивистские погрешности измерений псевдоскорости и разности псевдоскоростей

Собственную частоту сигнала, распространяющегося между навигационным спутником и навигационной аппаратурой потребителя вблизи поверхности Земли, найдем из общего соотношения (6.88). Это соотношение устанавливает связь между собственными частотами одной и той же волны в точках 1 и 2, размещенных на концах трассы распространения. В данной формуле положительное направление распространения волны соответствует возрастанию радиус-вектора \vec{R} в выбранной системе отсчета ITRS и задается положительным ортом волны $\vec{e} = \vec{e}_{\uparrow}$. Скорости источника и приемника волны в общем случае отличны от нуля.

Рассмотрим радиолинию НКА-НАП (\downarrow). Расположим приемник вблизи поверхности Земли и исключим из рассмотрения достаточно малый нерелятивистский эффект производной коэффициента преломления атмосферы. Введем обозначения: $\omega_2 = \omega_H$ (частота сигнала на входе НАП), $\vec{e}_{\uparrow} = -\vec{e}_{\downarrow}$. Скорректированная частота сигнала, излучаемого спутником, составляет $\omega_1 = \omega_c = \omega_0$.

Как известно, частота бортового генератора после запуска навигационного спутника на орбиту выше номинальной частоты ω_0 на релятивистское смещение, определяемое формулой (4.26). Поэтому перед запуском НКА частоту его генератора искусственно понижают на величину (4.26). Поэтому после введения корректирующего релятивистского смещения частоты в соответствии с формулой (4.98) частота бортового генератора снова становится равной ω_0 . Переходя к циклической частоте f с соответствующими обозначениями, получаем выражение для частоты сигнала, принимаемого антенной НАП:

$$f_{H\downarrow} = F_{\downarrow} f_0 \frac{\left\{ \left(1 - \frac{g_{0\alpha_c} V_c^\alpha \theta_0}{-g_{00_c} c} \right)^2 - \frac{(V_c \theta_0)^2}{-g_{00_c} c^2} \right\}^{0.5}}{\left\{ \left(1 - \frac{g_{0\alpha_H} V_H^\alpha \theta_0}{-g_{00_H} c} \right)^2 - \frac{(V_H \theta_0)^2}{-g_{00_H} c^2} \right\}^{0.5}} \cdot \frac{1 + \frac{\vec{n}_H^{**}}{c} \theta_0 \vec{V}_H \vec{e}_{H\downarrow}}{1 + \frac{\vec{n}_c^{**}}{c} \theta_0 \vec{V}_c \vec{e}_{c\downarrow}}}, \quad (10.11)$$

где все величины с индексами (H, c) относятся, соответственно, к НАП и навигационному спутнику; коэффициент F_{\downarrow} определяется формулой (7.96).

Обозначая частоту собственного генератора НАП через $f_{0H} = f_0 + \Delta f$, находим выражение для смещения частоты принимаемого излучения относительно частоты НАП:

$$\begin{aligned} \Delta f_{\downarrow} &= f_{H0} - f_{H\downarrow} = \\ &= \Delta f + f_0 \left\{ 1 - F_{\downarrow} \frac{\left\{ \left(1 - \frac{g_{0\alpha_c} V_c^\alpha \theta_0}{-g_{00_c} c} \right)^2 - \frac{(V_c \theta_0)^2}{-g_{00_c} c^2} \right\}^{0.5}}{\left\{ \left(1 - \frac{g_{0\alpha_H} V_H^\alpha \theta_0}{-g_{00_H} c} \right)^2 - \frac{(V_H \theta_0)^2}{-g_{00_H} c^2} \right\}^{0.5}} \cdot \frac{1 + \frac{\vec{n}_H^{**}}{c} \theta_0 \vec{V}_H \vec{e}_{H\downarrow}}{1 + \frac{\vec{n}_c^{**}}{c} \theta_0 \vec{V}_c \vec{e}_{c\downarrow}} \right\}, \quad (10.12) \end{aligned}$$

где, согласно (6.88), $\vec{V}_H = \vec{V}_H + \frac{\vec{a}_H \vec{R}}{c}$.

Переходя далее к псевдорадальной скорости $\hat{R} = c \Delta f_{\downarrow} / f_0$, на основе предыдущих соотношений для нее получаем выражение:

$$\hat{R} = \dot{R} + \Delta \dot{R} + \delta R_p, \quad (10.13)$$

где \dot{R}^i – радиальная скорость НАП относительно навигационного спутника на момент излучения сигнала, которая определяется дифференцированием соответствующей дальности R^i (6.65) и для i -го спутника представляется в виде:

$$\dot{R}^i = \frac{1}{R^i} \left[(x_{ci} - x_H)(\dot{x}_{ci} - \dot{x}_H) + (y_{ci} - y_H)(\dot{y}_{ci} - \dot{y}_H) + (z_{ci} - z_H)(\dot{z}_{ci} - \dot{z}_H) \right]; \quad (10.14)$$

$\Delta\dot{R} = c\Delta f / f_0$ – ошибка, вызванная неизвестным начальным отклонением частоты приемника Δf относительно частоты спутника;

$$\delta\dot{R}_p = c \left\{ 1 - F_{\downarrow} \frac{\left\{ \left(1 - \frac{g_{0\alpha_c} V_c^\alpha \theta_0}{-g_{00_c} c} \right)^2 - \frac{(V_c \theta_0)^2}{-g_{00_c} c^2} \right\}^{0.5}}{\left\{ \left(1 - \frac{g_{0\alpha_H} V_H^\alpha \theta_0}{-g_{00_H} c} \right)^2 - \frac{(V_H \theta_0)^2}{-g_{00_H} c^2} \right\}^{0.5}} \cdot \frac{1 + \frac{\vec{n}_H^{**} \theta_0 \vec{V}_H \vec{e}_{H\downarrow}}{c}}{1 + \frac{\vec{n}_c^{**} \theta_0 \vec{V}_c \vec{e}_{c\downarrow}}{c}} - \frac{\dot{R}^i}{c}} \right\} \quad (10.15)$$

– релятивистская погрешность, вызванная действием гравитационного поля, скоростью движения передатчика и приемника, а также ускорением приемника, поскольку, как отмечалось, изменение скорости приемника за время распространения составляет $\Delta V_H = a_H R / c$.

Полученное соотношение (10.15) позволяет рассчитать релятивистскую погрешность с учетом членов порядка $1/c^3$.

Если оставить при вычислениях только составляющие порядка $1/c^2$, то эквивалентная максимальная ошибка в определении радиальной скорости, вызванная отброшенными членами, составит около 10^{-5} м/с. При этом соотношение для релятивистской погрешности получается достаточно простым и обзримым:

$$\delta\dot{R}_p \approx c \left\{ \frac{\varphi_c - \varphi_H}{c^2} + \frac{V_{c_{HB}}^2}{2c^2} + \frac{\dot{R}_C^2}{c^2} - \frac{1}{2c^2} \left([\vec{\Omega} \vec{R}_H]^2 + 2[\vec{\Omega} \vec{R}_H] \vec{V}_H + \vec{V}_H^2 \right) - \frac{R \vec{a}_H \vec{e}_{\downarrow}}{c^2} \right\}, \quad (10.16)$$

где

$$V_{c_{HB}}^2 = \left([\vec{\Omega} \vec{R}_c] + V_C \right)^2 \quad (10.17)$$

←----->
 – квадрат скорости спутника в невращающейся небесной системе координат (квадрат орбитальной скорости); скорости V_C, V_H определяются в системе ITRS.

Максимальная величина погрешностей, вызываемых скоростью и ускорением сверхзвукового авиационного потребителя, движущегося вблизи экватора ($\Omega R_H \approx 465$ м/с), при $\vec{V}_H = 500$ м/с (1800 км/ч), $a = 5$ м/с² и $R = 2 \cdot 10^7$ м/с составляют:

$$\delta \dot{R}_{\Omega V} = \frac{1}{c} [\vec{\Omega} \vec{R}_H] \vec{V}_H \approx 1 \text{ мм/с}; \quad \delta \dot{R}_V = \frac{\vec{V}_H^2}{2c} \approx 0,4 \text{ мм/с}; \quad \delta \dot{R}_a = \frac{Ra_H}{c} \approx 0,35 \text{ м/с}$$

Для неподвижного наземного потребителя ($V_H = a_H = 0$) формулу (10.16) представим в виде:

$$\delta \dot{R}_p \approx c \left[\frac{1}{c^2} \left(\varphi_c + \frac{V_{CHB}^2}{2} \right) - \frac{1}{c^2} \left(\varphi_H + \frac{1}{2} \Omega_e^2 R_H^2 \cos^2 \psi_H \right) + \frac{\dot{R}_c^2}{c^2} \right], \quad (10.18)$$

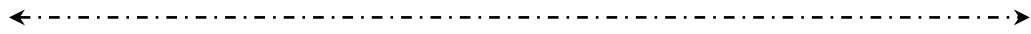
где ψ_H – геоцентрическая широта точки размещения наземной НАП.

Потенциал нормального гравитационного поля Земли с учетом наиболее значимой второй зональной гармоники определяется соотношением (2.55). Вместе с тем, как следует из формулы (4.74), относительное частотное релятивистское смещение, вызванное второй зональной гармоникой на высоте спутника ГЛОНАСС имеет величину около $1,2 \cdot 10^{-15}$. Поэтому при оценке погрешности измерения скорости им можно пренебречь. Для наземного потребителя ($\rho_H = R_e$) величина потенциала второй зональной гармоники существенно больше и наземный потенциал (2.55) представляется в виде:

$$\varphi_e^n = \frac{\mu_e}{R_e} \left[1 - J_2 \left(\frac{3}{2} \sin^2 \psi_H - \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (10.19)$$

Выражение в первой круглой скобке формулы (10.18) преобразуем на основе формул (4.22). При этом для околокруговых орбит навигационных спутников с незначительными эксцентриситетами можно положить $e^2 \approx 0$. На основе формул (4.22) и (10.19) и сделанного замечания формулу (10.18) приводим к виду:

$$\delta \dot{R} = \frac{1}{c} \left(\frac{3\mu_e}{2a} - \frac{\mu_e}{R_e} \right) + \frac{2\mu_e}{ca} e \cos \vartheta + \frac{\mu_e J_2}{2cR_e} (3 \sin^2 \psi_H - 1) + \frac{1}{2c} \Omega_e^2 R_H^2 \cos^2 \psi_H + \frac{\dot{R}_c^2}{c}, \quad (10.20)$$



где a , e – большая полуось и эксцентриситет орбиты навигационного спутника; \mathcal{G} – истинная аномалия навигационного спутника, отсчитываемая от точки перигея его орбиты; $J_2 = 1,0826 \cdot 10^{-3}$ – коэффициент второй зональной гармоники ГПЗ.

Оценка величин всех составляющих полученной формулы дает следующие результаты:

$$1) \delta \dot{R}_{p1} = \frac{1}{c} \left(\frac{3\mu_e}{2a} - \frac{\mu_e}{R_e} \right) \approx -13 \text{ см/с} \quad (10.21). \text{ Знак минус свидетельствует о том, что в формуле (10.12) частота сигнала, принимаемого НАП со спутника больше } f_0, \text{ т.е. } f_0 - f_{H\downarrow} < 0;$$

$$2) \delta \dot{R}_{p2} = \frac{2\mu_e}{ca} e \cos \mathcal{G} \approx 0,16e \cos \mathcal{G} \text{ м/с. При } e = 0,01 \text{ имеем } \delta \dot{R}_{p2} = 1,6 \cos \mathcal{G} \text{ мм/с};$$

$$3) \delta \dot{R}_{p3} = \frac{\mu_e J_2}{2cR_e} (3 \sin^2 \psi_H - 1). \text{ При } \psi_H = 90^\circ \text{ получаем } (\delta \dot{R}_{p3})_{\max} = 0,2 \text{ мм/с};$$

$$4) \delta \dot{R}_{p4} = \frac{1}{2c} \Omega_e^2 R_H^2 \cos^2 \psi_H. \text{ На экваторе } (\psi_H = 0) \text{ получаем } (\delta \dot{R}_{p4})_{\max} = 0,36 \text{ мм/с};$$

$$5) \delta \dot{R}_5 = \frac{\dot{R}_c^2}{c}. \text{ При } \dot{R}_c = 500 \text{ м/с имеем } \delta \dot{R}_5 = 0,8 \text{ мм/с}.$$

Разность псевдорадальных скоростей НАП относительно двух спутников определится на основе соотношения (10.13) следующей формулой:

$$\hat{R}_1 - \hat{R}_2 = (\dot{R}_1' - \dot{R}_2') + (\delta R_{p1} - \delta R_{p2}), \quad (10.22)$$

где разность в первой скобке определяется на основе формулы (10.14), а разность во второй скобке – на основе формулы (10.16) и (10.20).

Навигационные спутники, используемые при навигационных определениях, находятся в одной пространственной зоне, имеют орбиты с практически одинаковыми размерами полуосей ($a_1 \approx a_2$), но с разными эксцентриситетами ($e_1 \neq e_2$) и разными положениями точек перигея ($\mathcal{G}_1 \neq \mathcal{G}_2$). Поэтому выражение во второй скобке (10.22) приобретает вид:

$$\begin{aligned} \delta\dot{R}_{p1} - \delta\dot{R}_{p2} &\approx \\ &\approx \frac{1}{c} \left[\frac{2\mu_e}{a} (e_1 \cos \mathcal{G}_1 - e_2 \cos \mathcal{G}_2) + (\dot{R}_{c1}^2 - \dot{R}_{c2}^2) - (R_1 \vec{a}_{H1} \vec{e}_1 - R_2 \vec{a}_{H2} \vec{e}_2) \right]. \end{aligned} \quad (10.23)$$

Таким образом, при использовании разностного радиально-скоростного метода наиболее значимые релятивистские эффекты на трассе НКА – НАП, вызванные характеристиками круговых орбит НКА, компенсируются. Вместе с тем, остается разность эффектов, вызванных влиянием эксцентриситетов орбит используемых спутников. При диаметральной постановке точек перигея этих орбит, когда $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_2 + 180^\circ$, эти эффекты складываются. Обычно направления на используемые в сеансе навигационные спутники из точки размещения наземной НАП отличаются не более, чем на 90° . Поэтому величины других разностных поправок в формуле (10.23), вызванных влиянием радиальных скоростей и ускорений приемника относительно используемых спутников, будут меньше оценок, сделанных выше при анализе формулы (10.16).

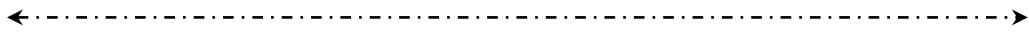
10.2. Релятивистская метрология космических геодезических систем

10.2.1. Релятивистские погрешности при определении орбит геодезических спутников

В разделе 3.2 было получено выражение (3.39) для определения трехмерного элемента пространственной длины во вращающейся системе отсчета ITRS. Поскольку эффект удлинения в поле Земли очень мал, то, принимая форму Земли в виде шара ($\varphi_e = \mu_e/R$) и пренебрегая влиянием полей Луны и Солнца, это соотношение представим в виде:

$$d\delta = \left[1 + \frac{\mu_e}{Rc^2} + \frac{1}{2c^2} \left([\vec{\Omega}_e \vec{R}] \vec{e} \right)^2 \right] dR, \quad (10.24)$$

где μ_e, Ω_e – соответственно, геоцентрическая гравитационная постоянная и угловая скорость вращения системы ITRS; \vec{R} – радиус-вектор рассматриваемой точки в околоземном пространстве; \vec{e} – единичный вектор в направлении измерения длины.



Как показано в разделе 3.2, для точек на поверхности Земли ($R = R_e$) второе слагаемое меньше первого примерно на 3 порядка и им при решении практических задач можно пренебречь. Поэтому относительное «гравитационное» удлинение $\Delta l_\phi / l$ наземных пространственных отрезков длиной l составит $\approx 6,9 \cdot 10^{-10}$. Это означает, что длина экватора и длина меридиана за счет воздействия гравитационного поля Земли увеличивается на $\Delta l_\phi = 2\pi R_e \cdot 6,9 \cdot 10^{-10} \approx 28$ мм.

Поскольку кеплеровское движение околоземных КА удобнее рассматривать в невращающейся системе отсчета, то для определения релятивистской длины орбиты в такой системе необходимо положить в формуле (10.24) $\Omega_e = 0$. В результате имеем:

$$d\delta = \left[1 + \frac{\mu_e}{Rc^2} \right] dR, \quad (10.25)$$

откуда следует выражение для релятивистского удлинения орбиты в гравитационном поле Земли:

$$\Delta l_{orb} \approx \frac{\mu_e}{c^2} \int_R \frac{dR}{R}. \quad (10.26)$$

Полученная формула пригодна для вычисления релятивистского удлинения любых околоземных кеплеровских эллиптических орбит с известным законом изменения радиус-вектора спутника R вдоль орбиты.

Однако наиболее просто определяется удлинение круговых орбит: низких орбит геодезических спутников, средних орбит спутников ГНСС, а также спутников, находящихся на геостационарных орбитах. В этом случае формула (10.26) преобразуется к виду:

$$\Delta l_{orb} = \frac{\mu_e}{c^2 R_{orb}} l_{orb} = 2\pi \frac{\mu_e}{c^2} \approx 28 \text{ мм}, \quad (10.27)$$

где $l_{orb} = 2\pi R_{orb}$ – длина круговой орбиты спутника.

Таким образом, в околоземном пространстве «гравитационное» удлинение круговых орбит составляет 28 мм и является величиной постоянной для любой орбиты вне зависимости от ее радиуса. Такое же постоянное «гравитационное» удлинение имеет величина любого большого круга на поверхности Земли, в том числе, экваториального и меридионального.

В связи с изложенным, представляет интерес оценка влияния релятивистского изменения длины орбиты на точность прогноза движения спутников, находящихся на круговых орбитах.

Известен целый ряд работ, посвященных исследованию релятивистских эффектов в движении космических тел, в том числе ИСЗ [138, 139].

Для этого рассмотрим релятивистские уравнения движения спутника в гравитационном поле Шварцшильда с метрикой (1.41). В прямоугольных гармонических координатах эти уравнения имеют вид [3, 138]:

$$\ddot{\vec{R}} = -\frac{\mu_e}{R^3} \vec{R} + \frac{\mu_e}{c^2 R^3} \left[\left(\frac{4\mu_e}{R} - V^2 \right) \vec{R} + 4(\vec{R}\vec{V})\vec{V} \right], \quad (10.28)$$

где $\vec{V}, \ddot{\vec{R}}$ – векторы скорости и ускорения материальной точки соответственно.

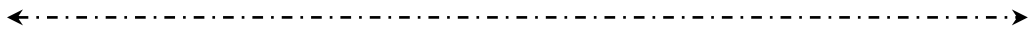
Как показано выше (раздел 4.22, формулы (4.36)–(4.37)), для эллиптической орбиты справедливо соотношение $\vec{R}\vec{V} = -\sqrt{\mu_e a} \cdot e \sin E$, где a, e, E – большая полуось орбиты спутника, ее эксцентриситет и эксцентриситетная аномалия спутника. Поскольку для круговых орбит геодезических и навигационных спутников выполняется условие $e \ll 1$ (например, для НКА ГЛОНАСС $e < 0,01$), то вторым слагаемым в формуле (10.28) можно пренебречь.

В результате релятивистские уравнения движения спутника по круговой орбите в гравитационном поле Земли с пространственно-временной метрикой Шварцшильда принимают вид:

$$\ddot{\vec{R}} = -\frac{\mu_e}{R^3} \left(1 - \frac{3\mu_e}{c^2 R} \right) \vec{R}, \quad (10.29)$$

или по координатным осям:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{\mu_e}{R^3} \left(1 - \frac{3\mu_e}{c^2 R} \right) x, \\ \ddot{y} &= -\frac{\mu_e}{R^3} \left(1 - \frac{3\mu_e}{c^2 R} \right) y, \\ \ddot{z} &= -\frac{\mu_e}{R^3} \left(1 - \frac{3\mu_e}{c^2 R} \right) z. \end{aligned} \right\} \quad (10.30)$$



Если пренебречь релятивистскими членами в скобке, то эти уравнения сводятся к известным ньютоновским уравнениям движения задачи двух тел:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{\mu_e}{R^3} x, \\ \ddot{y} &= -\frac{\mu_e}{R^3} y, \\ \ddot{z} &= -\frac{\mu_e}{R^3} z. \end{aligned} \right\} \quad (10.31)$$

Авторами работы [251] выполнена оценка влияния релятивистских эффектов на траектории движения геодезического спутника GOCE и навигационного спутника ГЛОНАСС на суточном интервале времени. Величина эффектов оценивалась на основе сравнения двух орбит, построенных методом численного интегрирования Эверхарда. Для построения кеплеровской орбиты использовались ньютоновские уравнения движения (10.31), для построения релятивистской орбиты – релятивистские уравнения движения (10.28). При этом использовались следующие данные по элементам кеплеровских орбит спутников на момент задания начальных условий движения (индексы «G» и «GL» соответствуют GOCE и ГЛОНАСС) :

$$\begin{aligned} a_G &= 6,62814 \cdot 10^6 \text{ м}, & a_{GL} &= 2,55 \cdot 10^7 \text{ м}, \\ e_G &= 0,01, & e_{GL} &= 0,01, \\ i_G &= 96,5^\circ, & i_{GL} &= 64,8^\circ. \end{aligned}$$

Остальные кеплеровские параметры (долгота восходящего узла, аргумент широты перигея и средняя аномалия) на момент начала движения принимались равными нулю.

В процессе интегрирования определялись расхождения текущих прямоугольных координат спутников по двум орбитам (ньютоновской и релятивистской) $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, а также модуль разности радиус-векторов для этих орбит $\Delta R = (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)^{0,5}$.

В результате интегрирования установлено, что в конце суточного интервала релятивистское расхождение двух орбит для спутника ГЛОНАСС составило 0,35 м, для спутника GOCE – 2,82 м. Изменение расхождения радиус-векторов орбит ΔR в течение суток происходило по закону, близкому к линейному. Таким образом, при современных и перспективных требованиях к ошибкам прогнозирования орбит геодезических и навигационных спутников (единицы сантиметров) учет влияния релятивистских эффектов в определении положения спутников на орбите обязателен.

Дальнейшее исследование проведем для одного витка орбиты каждого из рассмотренных спутников. При заданной высоте круговой орбиты КА GOCE период его обращения составит $5,36756 \cdot 10^3$ с. Поэтому количество витков в сутки $N_G = 16,1$. Учитывая линейный характер изменения ΔR в течение суток, находим удельное расхождение ньютоновской и релятивистской орбит на один виток: $282 \text{ см} / N_G \approx 17,5$ см/виток. Поделив далее это расстояние на «гравитационное» удлинение орбит (10.27), находим коэффициент усиления «гравитационного» эффекта за счет орбитального движения спутника GOCE:

$$K_G = \frac{282 \text{ см}}{N_G \cdot 2,8 \text{ см}} = 6,26 \approx 6. \quad (10.32)$$

Выполняя аналогичные вычисления для одного витка спутника ГЛОНАСС, для которого при периоде обращения 11,25 час количество витков в сутки $N_{GL} = 2,13$, получаем:

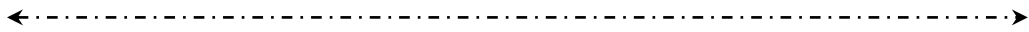
$$K_{GL} = \frac{35 \text{ см}}{N_{GL} \cdot 2,8 \text{ см}} = 5,9 \approx 6. \quad (10.33)$$

Таким образом, коэффициент усиления «гравитационного» эффекта, составляющего, как определено формулой (10.27), 28 мм для каждой орбиты, примерно одинаков для всех орбит и имеет величину около $K_G \approx K_{GL} \approx 6$. Поэтому можно заключить, что релятивистская погрешность определения положения спутника на любой круговой орбите ΔR_{orb} не зависит от ее высоты и для N витков, согласно (10.27), составит:

$$\Delta R_{orb} \approx (2,8 \cdot 6) \cdot N \text{ см} = 16,8N \text{ [см]}. \quad (10.34)$$

Полученное соотношение позволяет ориентировочно оценить релятивистскую погрешность определения положения спутника на круговой орбите при заданном числе витков без проведения трудоемких вычислений.

Шестикратное увеличение релятивистского эффекта влияния потенциала второй зональной гармоники ГПЗ через влияние на орбиту спутника уже обсуждалось ранее. Действительно, сравнивая выражения для релятивистского частотного смещения бортового СЧВ (4.56) (определяемого через непосредственное влияние потенциала на частоту) и (4.72) (определяемого через влияние на параметры орбиты) интересно отметить, что при одинаковых знаках смещений постоянная составляющая во втором случае в 6 раз больше. Это свидетельствует о том, что искажения орбиты за счет потенциала второй зональной гармоники в 6 раз больше влияют на величину линейной составляющей релятивистского эффекта смещения частоты бортового СЧВ.



Кроме того, относительное релятивистское смещение частоты бортового СЧВ вследствие влияния поля Луны на орбиту НКА ГЛОНАСС составляет $(3-4) \cdot 10^{-15}$ и этот эффект учитывается формулой (8.30) (см. раздел 8.3.2). Эффект смещения частоты, вызванный непосредственным влиянием приливного потенциала Луны на шкалу бортового времени (см. раздел 4.4.2), составляет $0,5 \cdot 10^{-15}$, что, примерно в 6 раз меньше. Аналогичное замечание относится и к влиянию поля Солнца.

В целом вопрос о шестикратном усилении релятивистского действия гравитационного потенциала Земли, Солнца и Луны через изменение параметров орбиты КА имеет большое практическое значение и нуждается в дополнительном исследовании.

10.2.2. Релятивистские погрешности геодезических НАП ГНСС

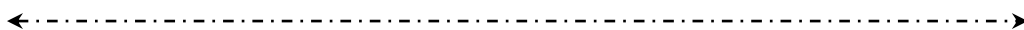
10.2.2.1. Наземные геодезические НАП ГНСС

Рассмотрим одну пару наземных геодезических НАП ГНСС: *НАП-А* с координатами $\{x_A, y_A, z_A\}$ и *НАП-В* $\{x_B, y_B, z_B\}$, расположенных неподвижно на поверхности Земли на небольшом расстоянии друг от друга. Вычислим первые и вторые разности времени прихода и фаз радиосигналов, принимаемых этими НАП от двух навигационных спутников: *C1* $\{x_1, y_1, z_1\}$ и *C2* $\{x_2, y_2, z_2\}$. Целью вычисления является определение влияния различных релятивистских методических ошибок на первые и вторые разности фаз при высокоточных геодезических измерениях.

Наиболее просто фаза волны вычисляется через координатную частоту ω_k и координатное время t в виде формулы (6.59). Использование координатных характеристик удобно с той точки зрения, что они, как известно, не зависят от величины потенциала гравитационного поля. В результате интегрирования между точками 1 и 2 трассы выражение для фазы волны принимает вид:

$$\Delta\Phi_{12} = \omega_k t - \omega_k \Delta t_{12}. \quad (10.35)$$

Здесь, в соответствии с формулами (6.69) и (6.61), координатное время распространения волны Δt_{12} между моментом излучения t_1 из точки излучения 1 с радиус-вектором \vec{R}_1 и моментом ее приема t_2 в точке 2 с радиус-вектором \vec{R}_2 определяется как интеграл вдоль трассы распространения:



$$\Delta t_{12} = \frac{1}{c} \int_{R_1}^{\bar{R}_2} \bar{e} d\bar{R} + \frac{1}{c} \int_{R_1}^{\bar{R}_2} (n^{**} - 1) \bar{e} d\bar{R}, \quad (10.36)$$

где \bar{e} – орт радиолуча; $n^{**} - 1$ – приращение обобщенного коэффициента преломления «гравитационной» среды в системе ITRS, которое, согласно формуле (7.17), определяется соотношением (влияние слабых полей Луны и Солнца пренебрегаем):

$$n^{**} - 1 = \Delta n_a(R) + \left\{ \frac{2\varphi_e}{c^2} + \frac{[\bar{\Omega}\bar{R}]^2}{2c^2} + \frac{1}{2c^2} \left([\bar{\Omega}\bar{R}] \bar{e} \right)^2 \right\} + \frac{1}{c} [\bar{\Omega}\bar{R}] \bar{e}. \quad (10.37)$$

Здесь $\Delta n_a(R) = n_a(R) - 1$ – переменная часть показателя преломления атмосферы, изменяющаяся вдоль трассы распространения; второе слагаемое формулы (10.37) определяет преломляющие свойства истинного и центробежного гравитационного полей в ITRS, а последнее – преломляющие свойства вихревого, или гиротропного поля, вызванного вращением системы отсчета.

На основе этих формул фаза (10.35) для радиосигнала на трассе «спутник – Земля» для неподвижного наземного приемника определится следующим общим соотношением:

$$\Delta\Phi_{12} = \omega_k t - \omega_k \left(\frac{R}{c} + t_{TP} + t_{\Omega} + t_a \right)_{12}, \quad (10.38)$$

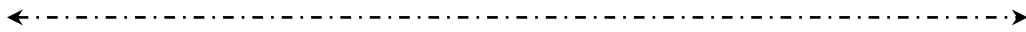
где, согласно (6.65), (7.19), (7.20), (7.21), (7.27), (7.28), составляющие этой формулы определяются соотношениями соответственно:

$$R_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (10.39)$$

– геометрическая длина трассы между моментами излучения t_1 и приема t_2 ; по определению в этой формуле координаты излучателя и приемника относятся к моменту излучения, однако в силу неподвижности приемника эта же формула справедлива и для момента приема;

$$t_a = \frac{1}{c} \int_{t_1}^{t_2} \Delta n_a(R) dR \quad (10.40)$$

– дополнительная задержка, вызванная влиянием атмосферы (тропосферы и ионосферы);



$$t_{\Omega} = \frac{1}{c^2} \int_{\vec{R}_1}^{\vec{R}_2} [\vec{\Omega} \vec{R}] d\vec{R} = \frac{2\Omega_e S_{\nabla}}{c^2} = \frac{\Omega_e}{c^2} (x_1 y_2 - x_2 y_1) \quad (10.41)$$

– гироскопическая задержка (эффект Саньяка), которая определяется координатами точек на концах трассы $A_1(x_1, y_1, z_1)$ и $A_2(x_2, y_2, z_2)$ и не зависит от координат по оси OZ ; S_{∇} – площадь проекции треугольника излучатель – приемник – центр Земли на плоскость экватора. Для надгоризонтной радиолинии при $x_1 \approx +2,5 \cdot 10^7$ м, $x_2 \approx 0$; $y_1 = y_2 = 6,4 \cdot 10^6$ м имеем $t_{\Omega} \approx +120$ нс. При $x_1 = -2,55 \cdot 10^7$ м знак задержки изменяется на противоположный;

$$t_{GP} = \frac{2\mu_e}{c^3} \ln \frac{R_1 + R_2 + R}{R_1 + R_2 - R} + \frac{1}{2c^3} \int_{R_C}^{R_E} \left\{ [\vec{\Omega} \vec{R}]^2 + ([\vec{\Omega} \vec{R}] \vec{e})^2 \right\} dR \quad (10.42)$$

– гравитационная задержка в комплексном гравитационном поле Земли. Здесь \vec{R}_1, \vec{R}_2 – радиус-векторы передатчика и приемника в выбранной системе отсчета; $R = (\vec{R}_2 - \vec{R}_1) \vec{e}$ – расстояние между передатчиком и приемником, определяемое формулой (10.39).

Как уже отмечалось, для радиолинии «Земля–НКА», ориентированной в зенит, задержка, вызванная только истинным гравитационным полем Земли, составляет около 37 пс, а для надгоризонтной радиолинии она достигает 62 пс. Второе слагаемое в (10.42) для радиолинии НКА – НАП не превышает долей пикосекунды.

На основании сделанных замечаний на основании формулы (10.38) определим фазу в четырех радиолиниях между спутниками С1, С2 и НАП -А и НАП-В. При этом индекс начала радиолинии располагается внизу, индекс конца радиолинии – вверху.

В результате измеряемая разность фаз принимаемых сигналов спутника С1 относительно текущих фаз Φ_A и Φ_B приемников НАП-А и НАП-В составит:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_1^A &= \omega_k t_1 - \omega_k \left(\frac{R_1^A}{c} + (t_1^A)_{GP} + t_{\Omega 1}^A + t_{a1}^A \right) - \Phi_A, \\ \Delta\Phi_1^B &= \omega_k t_1 - \omega_k \left(\frac{R_1^B}{c} + (t_1^B)_{GP} + t_{\Omega 1}^B + t_{a1}^B \right) - \Phi_B, \end{aligned} \quad (10.43)$$

←----->

где, t_1 – шкала бортового времени спутника С1; в соответствии с (10.39)

$R_1^A = \sqrt{(x_A - x_1)^2 + (y_A - y_1)^2 + (z_A - z_1)^2}$, $R_1^B = \sqrt{(x_B - x_1)^2 + (y_B - y_1)^2 + (z_B - z_1)^2}$;
 $\{x_A, y_A, z_A\}$, $\{x_B, y_B, z_B\}$ – искомые координаты НАП-А и НАП-В; остальные составляющие определяются по формулам (10.40) – (10.42).

При расстоянии между НАП-А и НАП-В в несколько десятков километров гравитационную задержку (10.42) можно считать одинаковой для обеих трасс «С1 – НАП». Поэтому первую разность фазовых задержек, измеренных относительно НКА С1, получаем в виде:

$$\delta\Phi_1^{BA} = \omega_k \left[\frac{R_1^A - R_1^B}{c} + (t_{\Omega 1}^A - t_{\Omega 1}^B) + (t_{a1}^A - t_{a1}^B) \right] + (\Phi_A - \Phi_B). \quad (10.44)$$

Условимся далее, что бортовая шкала t_2 спутника С2 в общем случае не совпадает со шкалой спутника С1. Рассуждая аналогично, измеряемую разность фаз относительно сигнала спутника С2 получаем в виде:

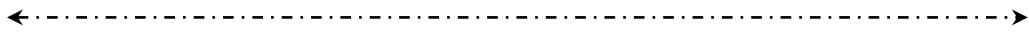
$$\begin{aligned} \Delta\Phi_2^A &= \omega_k t_2 - \omega_k \left(\frac{R_2^A}{c} + (t_2^A)_{ГР} + t_{\Omega 2}^A + t_{a2}^A \right) - \Phi_A, \\ \Delta\Phi_2^B &= \omega_k t_2 - \omega_k \left(\frac{R_2^B}{c} + (t_2^B)_{ГР} + t_{\Omega 2}^B + t_{a2}^B \right) - \Phi_B, \end{aligned} \quad (10.45)$$

где $R_2^A = \sqrt{(x_A - x_2)^2 + (y_A - y_2)^2 + (z_A - z_2)^2}$, $R_2^B = \sqrt{(x_B - x_2)^2 + (y_B - y_2)^2 + (z_B - z_2)^2}$.

Отсюда следует первая разность фазовых задержек, измеренных относительно НКА С2:

$$\delta\Phi_2^{BA} = \omega_k \left[\frac{R_2^A - R_2^B}{c} + (t_{\Omega 2}^A - t_{\Omega 2}^B) + (t_{a2}^A - t_{a2}^B) \right] + (\Phi_A - \Phi_B). \quad (10.46)$$

Таким образом, неопределенность в значении бортового времени при первых разностных измерениях исчезает, однако остается влияние неопределенности взаимного фазового расхождения НАП-А и НАП-В. В обеих формулах для первых разностей (10.44) и (10.46) остается влияние разности гироскопических смещений, однако влияние гравитационной задержки исчезает.



На основе формул первых разностей получаем формулу для вторых измеряемых разностей фаз:

$$\delta(\delta\Phi) = \delta\Phi_2^{BA} - \delta\Phi_1^{BA} = \omega_k \left[\frac{R_2^A - R_2^B}{c} - \frac{R_1^A - R_1^B}{c} + \Delta t_\Omega + \Delta t_a \right], \quad (10.47)$$

где обозначено:

$$\Delta t_a = (t_{a2}^A - t_{a1}^A) - (t_{a2}^B - t_{a1}^B); \quad (10.48)$$

$$\Delta t_\Omega = (t_{\Omega 2}^A - t_{\Omega 2}^B) - (t_{\Omega 1}^A - t_{\Omega 1}^B). \quad (10.49)$$

Таким образом, во второй разности (10.47) исчезло влияние фазовой неопределенности приемников, однако осталось влияние запаздываний в атмосфере и влияние остаточного эффекта Саньяка.

Остаточный фазовый набег за счет эффекта Саньяка определим из (10.49) на основе формулы (10.41) и представим его в виде:

$$\Delta\Phi_\Omega = \frac{\omega_k \Omega}{c^2} [(y_A - y_B)(x_2 - x_1) - (x_A - x_B)(y_2 - y_1)]. \quad (10.50)$$

Отсюда эквивалентная гироскопическая погрешность определения разности дальностей составит:

$$\Delta R_\Omega = \frac{\Omega}{c} [(y_A - y_B)(x_2 - x_1) - (x_A - x_B)(y_2 - y_1)]. \quad (10.51)$$

Чтобы оценить величину этой погрешности, разместим на экваторе на координатной оси OX измерительную базу двух НАП так, чтобы она была перпендикулярна этой оси. При условии, что $y_A - y_B = 30$ км; $x_A - x_B = 0$, а также при $x_2 - x_1 = 2 \cdot 10^7$ м получаем $\Delta R_\Omega \approx 15$ см.

Если взять третью разность, то вследствие перемещения спутников С1 и С2 гироскопическое приращение фазы изменится, но порядок величины сохранится.

Таким образом, при высокоточных наземных геодезических измерениях эффект гравитационной задержки волны пренебрежимо мал, однако эффект гироскопической задержки существенно превышает допустимые ошибки, и его необходимо учитывать.

10.2.2.2. Космические геодезические НАП ГНСС

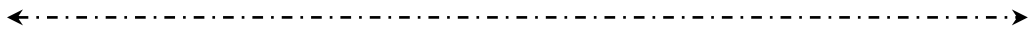
Рассмотрим измерения псевдодальности, выполняемые космической НАП, размещенной на борту низкоорбитального геодезического КА типа Jason-1, 2. Обработка результатов измерений ведется во вращающейся земной системе отсчета ITRS.

Условимся, что с борта НКА ГНСС, обладающего бортовой шкалой времени τ_c , на бортовую НАП геодезического спутника со шкалой времени τ передаётся N -я метка времени по беззапросной радиолинии. Условимся, что расхождение бортовой шкалы времени НКА и шкалы времени геодезического спутника на момент измерений составляет $\Delta\tau_c$. Измеренная на борту геодезического КА задержка бортовой метки времени НКА $\Delta\tau_{\downarrow изм}^c$ относительно одноимённой метки времени на шкале НАП определяется, в соответствии с формулой (7.24), соотношением:

$$\Delta\tau_{\downarrow изм}^c = \Delta\tau_c + \tau_{\downarrow}^c = \Delta\tau_c + \frac{R'}{c} \left(1 - \frac{3\mu_e}{2\rho_c c^2} \right) + \tau_{ГР} + \tau_{\Omega\downarrow} + \tau_{\downarrow}'' + \frac{\vec{V}_c \vec{R}'}{c^2} + \frac{R'^2}{2c^3} \vec{a}_c \vec{e} \quad (10.52)$$

где R' – расстояние НКА – геодезический КА, определяемое на момент излучения радиосигнала по формуле (6.65); $\rho_c, \vec{V}_c, \vec{a}_c$ – соответственно радиус-вектор, орбитальная скорость в ITRS и ускорение геодезического спутника; $\tau_{ГР}, \tau_{\Omega\downarrow}, \tau_{\downarrow}''$ – соответственно гравитационная задержка, гиро-скопическая задержка и задержка в ионосфере, определяемые по формулам (7.28), (7.27) и (7.19).

Гравитационная задержка $\tau_{ГР}$ (7.28) объясняется уменьшением фазовой скорости и удлинением геометрического пути волны в гравитационном поле Земли и в поле сил инерции вращающейся системы отсчета ITRS. В частности, гравитационная задержка, вызываемая только истинным полем Земли не зависит от направления распространения волны. Для радиолинии «НКА ГЛОНАСС – геодезический КА», ориентированной в надир, эта задержка, как уже отмечалось, составляет около 37 пс, а для надгоризонтной радиолинии она достигает 62 пс, что ведет к ошибке измерения дальности около 18 мм. Влияние центробежного потенциала системы ITRS на задержку радиоволны не превышает пикосекунды.



Гироскопическая задержка $\tau_{\Omega\downarrow}$ (7.27), как показано в разделе 7.2.1, для надгоризонтной радиолинии достигает 120 нс (эквивалентная ошибка по дальности около 36 м).

Релятивистская задержка $\delta\tau_{\downarrow}^c$, определяемая из второго члена в формуле (10.52) в виде

$$\delta\tau_{\downarrow}^c = -\frac{R}{c} \cdot \frac{3\mu_e}{2\rho_c c^2} \quad (10.53)$$

имеет чисто релятивистское происхождение, зависит от темпа течения собственного бортового времени спутника и определяется коэффициентом преобразования времени θ_c для орбитальных часов (7.15). При $\rho_c = 6,8 \cdot 10^6$ м и длине радиолинии около $2 \cdot 10^7$ м получаем $\delta\tau_{\downarrow}^c \approx -60$ пс, что эквивалентно ошибке измерения дальности около -18 мм.

10.2.3. Релятивистские погрешности систем контроля траекторий геодезических и навигационных спутников

10.2.3.1. Лазерные спутниковые дальномеры

Наземные лазерные системы измерения дальности спутников (SLR) широко используются в геодезии и навигации. Современные лазерные, или квантово-оптические системы (КОС), характеризуются инструментальной погрешностью измерений дальности до КА в несколько миллиметров [252, 253], причем, благодаря новым техническим решениям, с каждым годом эта ошибка измерений снижается. Дальность действия таких систем перекрывает околоземное пространство вплоть до высоты геостационарной орбиты. Поэтому измерения дальности ведутся по низкоорбитальным, по средневысотным навигационным, а также по геостационарным КА. В этой связи представляет интерес рассмотрение релятивистских составляющих ошибок измерений КОС.

В качестве исходного соотношения для вычисления используем формулу (7.16), в которой коэффициент преобразования времени θ_E определяется формулой (7.13), а выражение в скобке с обобщенным коэффициентом преломления гравитационной околоземной среды $(n^{**} - 1)$ – формулами (7.17) и (10.37). В результате, следуя рассуждениям, приведенным в разделе 7.3.1, получаем выражение, аналогичное (7.49), для времени распространения лазерного луча в запросной оптической линии «Земля – спутник – Земля» и измеренное неподвижным наземным таймером:

$$\tau_{\uparrow\downarrow}^{изм} = \frac{2R_c'}{c} \left[1 - \frac{\mu_e}{R_e c^2} - \frac{1}{2c^2} (\Omega_e R_e \cos \psi_e)^2 \right] + \quad (10.54)$$

$$+ 2\tau_{ГР} + \tau_{\uparrow}^{mp} + \tau_{\downarrow}^{mp} + \frac{2R_c' \dot{R}_c}{c^2} + \frac{R_c'^2 \ddot{R}_c}{c^3}$$

где $R_c, \dot{R}_c, \ddot{R}_c$ – соответственно расстояние до спутника на момент излучения запросного сигнала (формула (6.65)), его радиальная скорость и радиальное ускорение относительно наземной станции; R_e, ψ_e – соответственно экваториальный радиус Земли и геоцентрическая широта наземной лазерной станции; $\tau_{ГР}$ – гравитационная задержка в гравитационном поле вращающейся системы отсчета ITRS, определяемая формулами (7.21) и (7.28), или (10.42); задержки $\tau_{\uparrow}^{mp}, \tau_{\downarrow}^{mp}$ определяют задержку лазерного луча в тропосфере по пути к спутнику и обратно.

Опираясь на результаты предыдущего раздела, посвященного космическим геодезическим НАП, находим, что удвоенная гравитационная задержка для высоты НКА ГЛОНАСС достигает 120 пикосекунд, что соответствует ошибке измерения дальности 3,6 см. Для геостационарной орбиты ее величина возрастает примерно до 6 см. Для низких орбит эта величина на 1–2 порядка меньше.

Величина релятивистской поправки в первой скобке (10.54)

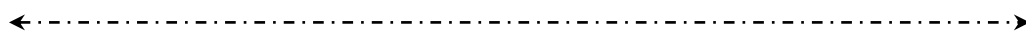
$$\delta\tau_e = -\frac{2R_c'}{c} \left[\frac{\mu_e}{R_e c^2} + \frac{1}{2c^2} (\Omega_e R_e \cos \psi_e)^2 \right] \quad (10.55)$$

существенно зависит от длины трассы лазерного луча. Для спутника НКА ГНСС при длине трассы 20 тыс. км имеем $\delta\tau_e \approx 90$ пс, что эквивалентно ошибке измерения дальности около 27 мм. При длине трассы 2 тыс. км ошибка составит 2,7 мм.

Последние члены в (10.54) определяют кинематические ошибки, вызванные изменением дальности до спутника за время распространения лазерного луча к спутнику и обратно:

$$\tau_v^c = \frac{2R_c' \dot{R}_c}{c^2}; \quad \tau_g^c = \frac{R_c'^2 \ddot{R}_c}{c^3}. \quad (10.56)$$

При $R = 2 \cdot 10^3$ м; $\dot{R} = 5 \cdot 10^3$ м/с (низкоорбитальный спутник в конце зоны видимости) имеем $(\delta\tau_v)_{\max} \approx 0,2$ нс, что эквивалентно ошибке измерения дальности около 6 см. В точке траверза спутника ГЛОНАСС ($g = 0,61$ м/с²; $R \approx 19 \cdot 10^6$ м) имеем $\delta\tau_g^c \approx 7$ пс.



10.2.3.2. Доплеровские измерители радиальной скорости

В геодезии широко используются доплеровские станции контроля траекторий геодезических спутников, причем измерения могут вестись как на борту геодезического спутника, так и на Земле.

В первом случае с наземной станции (маяка) в космос излучается радиоволна известной частоты. Она принимается на борту геодезического спутника, где измеряется доплеровский сдвиг частоты принимаемого излучения относительно частоты бортового стандарта. По результатам измерений определяется радиальная скорость спутника относительно наземного маяка, по которой уточняются параметры движения спутника и геодезические координаты наземного маяка.

Во втором случае излучение ведется с борта геодезического спутника, а прием и измерение радиальной скорости – на наземном геодезическом пункте. Как и в первом случае, по результатам доплеровских измерений радиальной скорости уточняется орбита спутника, а также координаты наземных приемных геодезических пунктов.

Первый принцип реализован во Французской геодезической системе DORIS, которая основана на мировой сети наземных излучающих маяков [268, 269]. Приемная аппаратура этой системы установлена на борту целого ряда зарубежных геодезических спутников, в том числе Jason-1; 2; 3; GEOSAT; ERS-1; 2 и др.

Доплеровская система DORIS (*Doppler Orbit determination and Radio Positioning Integrated on Satellite* – доплеровская спутниковая система определения орбит и местоположения) была разработана в начале 1990-х гг. Национальным центром космических исследований Франции (CNES) совместно с французским Национальным институтом географии (IGN) и Исследовательской группой по космической геодезии (GRGS).

Система DORIS включает оборудование наземных станций (радиомаяков), излучающих в верхнюю полусферу непрерывные радиосигналы на частоте 2036,25 МГц и 401,25 МГц, а также бортовые спутниковые радиоприемники, измеряющие доплеровский сдвиг частоты принимаемого радиоизлучения. В силу высокого значения несущей частоты и, соответственно, значительного доплеровского смещения обеспечивается высокая точность измерения радиальной скорости спутника относительно наземного маяка – порядка 0,3 мм/с. Двухчастотный режим работы позволяет компенсировать влияние ионосферы на точность измерений. Мировая сеть системы включает около 50 станций, в том числе 3 станции на территории РФ.

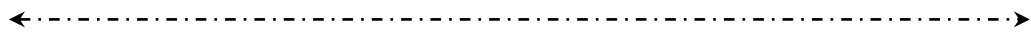
←----->

Обработка и анализ данных производится Международной службой DORIS – IDS (*International DORIS Servis*) в Центрах анализа: CNES, IGN, LAREG (Франция), CSA (США, Техас), ИНАСАН (РФ, Москва). Эта служба тесно взаимодействует с Международной службой вращения Земли и систем отсчета IERS (*International Earth rotation and Reference frames Servis*). В настоящее время точность определения орбит (СКП) геодезических КА на основе данных системы DORIS составляет около 2–3 см.

Вычисление значения частоты, принимаемой на борту геодезического спутника, можно провести либо в невращающейся геоцентрической системе отсчета ICRS по общей формуле (6.88), либо во вращающейся земной системе ITRS по формуле (7.30). Поскольку результат вычисления должен быть один и тот же, воспользуемся системой ITRS. Для этого свяжем частоту f_E с наземным генератором, а частоту f_c – с приемником, размещенным на спутнике. Тогда, согласно формуле (7.30), для радиолинии «вверх»(↑) при неподвижном наземном генераторе ($V_E = 0$) частота волны, принимаемой на спутнике, составит:

$$f_{c\uparrow} = F_{\uparrow} f_E \frac{1}{\left\{ \left(1 - \frac{g_{0\alpha c} V_c^\alpha \theta_0}{-g_{00c} c} \right)^2 - \frac{(V_c \theta_0)^2}{-g_{00c} c^2} \right\}^{0.5}} \cdot \frac{1 - \frac{\vec{n}^{**}(\vec{R}_c)}{c} \theta_0 \vec{V}_c \vec{e}_{\uparrow}}{1 + \theta_0 \int_{\tau}^{\tau_1 + \Delta \tau_a} \Delta \dot{n}_a(\tau) d\tau}}{c}, \quad (10.57)$$

где $\vec{V}_c = \vec{V}_c' + \frac{\vec{a}_c R'}{c}$; \vec{V}_c' ; \vec{a}_c – скорость и ускорение спутника в системе ITRS на момент излучения радиосигнала с наземной станции; \vec{e}_{\uparrow} – единичный вектор в направлении распространения волны; R' – расстояние между наземной станцией и спутником на момент излучения радиосигнала, определяемое общим соотношением (6.65); F_{\uparrow} – коэффициент гравитационного преобразования частоты радиоволны в ITRS, определяемый формулами (7.9) и (7.9а); $g_{00}, g_{0\alpha}$ – компоненты метрического тензора в ITRS, определяемые формулами (7.3); $\theta_0 = \sqrt{-g_{00_0}}$ – коэффициент преобразования собственного времени (7.11) для базовых часов баллистического Центра системы (Тулуза,



Франция), который определяет истинные скорости движения космических приемников в шкале собственного (базового) времени τ_0 ; n^{**} – обобщенный коэффициент преломления «гравитационной среды» в ITRS, определяемый формулой (7.8); $\Delta\dot{n}_a = \dot{n}_a$ – скорость изменения во времени коэффициента преломления атмосферы вдоль трассы распространения.

Произведение $\vec{V}_c \vec{e}_\uparrow$ приведем к более удобному виду, используя приведенные выше соотношения и выражение для дальности (6.65):

$$\vec{V}_c \vec{e}_\uparrow = \vec{V}_c \vec{e}_\uparrow + \frac{\vec{a}_c \vec{R}}{c} = \dot{R} + \frac{\vec{a}_c \vec{R}}{c}, \quad (10.58)$$

где $\dot{R} = \frac{1}{R} [(x_c - x_E) \dot{x}_c + (y_c - y_E) \dot{y}_c + (z_c - z_E) \dot{z}_c]$ – радиальная скорость спутника относительно наземной станции на момент излучения радиосигнала, полученная путем дифференцирования дальности (6.65).

На основе измерений частотного сдвига $\Delta f_c^{изм}$ принимаемого сигнала $f_{c\uparrow}$ относительно частоты бортового стандарта f_c на основе формул (10.57) и (10.58) уточняются координаты $\{x_c, y_c, z_c\}$ и составляющие скорости $\{\dot{x}_c, \dot{y}_c, \dot{z}_c\}$ геодезического спутника, а также координаты наземной станции $\{x_E, y_E, z_E\}$.

Как следует из формулы (10.57), релятивистские смещения частоты сигнала и, соответственно, релятивистские погрешности измерения радиальной скорости, определяются гравитационным коэффициентом преобразования частоты F_\uparrow (7.9) и квадратом скорости спутника.

Расчет частоты принимаемого сигнала для радиолинии «геодезический спутник – неподвижная наземная станция» производится на основе формулы (7.31), которая применительно к данному случаю приобретает вид:

$$f_{E\downarrow} = \frac{f_c}{F_\uparrow} \left\{ \left(1 - \frac{g_{0\alpha_c} V_c^\alpha \theta_0}{-g_{00_c} c} \right)^2 - \frac{(V_c \theta_0)^2}{-g_{00_c} c^2} \right\}^{0,5} \cdot \frac{1 + \theta_0 \int_{\tau_1 - \Delta\tau_a}^{\tau_1} \Delta\dot{n}_a(\tau) d\tau}{1 + \frac{\vec{n}^{**}(\vec{R}_c)}{c} \theta_0 \vec{V}_c \vec{e}_\downarrow} \quad (10.59)$$

←----->
 где обозначения такие же, как и в формуле (10.57). Кроме того, учтено, что в силу неподвижности наземного приемника $\vec{V}_c \vec{e}_\downarrow = \vec{V}_c' \vec{e}_\downarrow = \dot{R}'$; $\vec{e}_\uparrow = -\vec{e}_\downarrow$.

Релятивистские погрешности определяются теми же величинами, однако знак их изменяется на противоположный.

10.3. Выводы к разделу 10

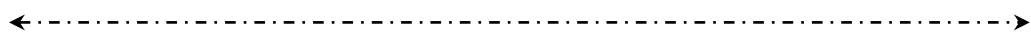
1. Оценка величины релятивистских задержек при измерении псевдодальности с помощью НАП показывает, что они могут внести погрешности измерений дальности от единиц миллиметров до десятков метров (из-за гироскопической задержки Саньяка).

При измерении разности псевдодальностей до двух НКА большинство релятивистских эффектов компенсируется, однако эффекты Саньяка, в зависимости от положения спутника, могут как вычитаться, так и складываться. То же относится и к ошибкам дифференциального режима измерений: нескомпенсированная погрешность из-за эффекта Саньяка может достигать единиц метров.

2. При измерении псевдорадальной скорости релятивистские погрешности могут превышать 10 см/с. При использовании разностного радиально-скоростного метода наиболее значимые релятивистские эффекты на трассе НКА – НАП, определяемые высотой круговых орбит НКА, компенсируются. Вместе с тем, остается разность эффектов, вызванных влиянием эксцентриситетов орбит используемых спутников. При диаметральном положении точек перигея этих орбит эффекты складываются.

3. «Гравитационное» пространственное удлинение круговых орбит составляет 28 мм и является величиной постоянной для любой орбиты вне зависимости от ее радиуса. Такое же постоянное «гравитационное» удлинение имеет величина любого большого круга на поверхности Земли, в том числе экваториального и меридионального.

4. Оценка влияния релятивистских составляющих уравнений движения спутников на траектории движения геодезического КА GOCE и НКА ГЛОНАСС показало, что в конце суточного интервала релятивистское отклонение положения спутника ГЛОНАСС на орбите составило 0,35 м, спутника GOCE – 2,82 м. Релятивистское изменение радиус-векторов орбит в течение суток от витка к витку происходило по закону, близкому к линейному.



При этом важно отметить, что релятивистское удлинение орбиты спутника после обработки траектории имеет постоянное значение: 16,8 см на один виток для любой круговой орбиты с коэффициентом усиления «гравитационного» эффекта около 6. В целом, релятивистская погрешность определения положения спутника на любой круговой орбите не зависит от ее высоты и для N витков составит: $16,8 \cdot N$ (см).

Полученный результат позволяет ориентировочно оценить релятивистскую погрешность определения положения спутника на любой круговой орбите без проведения трудоемких вычислений.

5. При определении первой фазовой разности в геодезических НАП влияние гравитационной задержки исчезает, однако остается влияние разности гироскопических смещений. Во второй разности исчезает влияние фазовой неопределенности приемников, однако остается влияние разности запаздываний в атмосфере и влияние остаточного гироскопического эффекта Саньяка.

6. Гравитационная задержка оптического сигнала в лазерных спутниковых дальномерах для высоты НКА ГНСС достигает 120 пикосекунд, что соответствует ошибке измерения дальности 3,6 см. Для геостационарной орбиты ее величина возрастает примерно до 6 см. Для низких орбит эта величина на 1–2 порядка меньше.

Величина релятивистской поправки, определяемой изменением масштаба собственного времени в точке измерений, существенно зависит от длины трассы лазерного луча. Для спутников НКА ГНСС при длине трассы около 20 тыс. км ошибка измерения дальности составляет около 27 мм. При длине трассы 2 тыс. км – ошибка в 10 раз меньше.

7. Релятивистские погрешности измерения радиальной скорости в геодезических спутниковых системах в основном определяются гравитационным коэффициентом преобразования частоты F_{\uparrow} и квадратом скорости спутника.

11. НОВЫЕ РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ С АТОМНЫМИ ЧАСАМИ

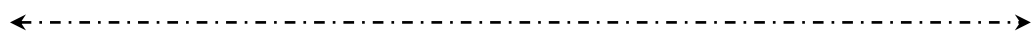
11.1. Наземные эксперименты по измерению разности гравитационных потенциалов с помощью атомных часов

11.1.1. Замысел наземных экспериментов

Известно, что основной физической характеристикой гравитационного поля Земли (ГПЗ) является его потенциал. При изучении физики гравитационного поля Земли широко используются методы измерения первых и вторых производных гравитационного потенциала Земли по пространственным координатам: ускорения свободного падения (первых производных, или первых градиентов) и составляющих тензора гравитационных градиентов (вторых производных, или вторых градиентов потенциала). Ускорение свободного падения измеряется с помощью гравиметров различных типов, наиболее точными из которых на сегодня являются криогенные, лазерные и атомные. Составляющие вторых гравитационных градиентов измеряются с помощью гравитационных градиентометров (иногда их называют градиометрами), которые создаются на базе крутильных весов (приборы Этвеша), а также на базе высокочувствительных дифференциальных линейных и угловых акселерометров. Наиболее точным градиентометром на сегодняшний день является космический прибор на акселерометрах типа «спутника, свободного от сноса», который успешно испытан в экспериментах «GOCE» [113] и «LISA» [133].

Согласно общей теории относительности [1, 2], физическими эффектами, непосредственно связанными с разностью гравитационных потенциалов, являются эффекты гравитационного смещения частоты и гравитационного замедления (смещения) времени. Чем больше потенциал ГПЗ, т. е. чем ближе часы к центру Земли, тем они медленнее идут по отношению к часам, размещенным на большей высоте. Соответственно, частота внешнего принимаемого сигнала, измеренная в единицах времени «нижних» часов, будет больше частоты, измеренной по верхним часам.

Возможности непосредственного измерения этих эффектов и, соответственно, разности гравитационных потенциалов двух точек ГПЗ открылись на основе использования атомных высокостабильных стандартов частоты и времени. Как уже отмечалось в первом разделе, известны успешные эксперименты по измерению гравитационного смещения частоты с помощью установок на основе эффекта Мёссбауэра [98–100],



эксперимент с разнесенными по высоте стандартами частоты и времени с относительной нестабильностью 10^{-14} , космические эксперименты [102–104] по измерению этого эффекта между наземными и космическими водородными стандартами частоты, однако практического значения такие эксперименты пока не нашли. В космическом эксперименте ACES, запланированном ЕКА на МКС в 2016-2017 гг., планируется измерение разности гравитационных потенциалов по измерениям гравитационного смещения частоты и времени между МКС и наземными станциями [38].

Цель новых наземных экспериментов [19, 20, 22, 256] проведенных под руководством автора, состояла в определении разности гравитационных потенциалов через измерение гравитационного эффекта расхождения двух шкал времени: шкалы времени Государственного первичного эталона единиц времени, частоты и национальной шкалы времени ГЭТ 1-2012 (объект «СИГНАЛ» ФГУП «ВНИИФТРИ») и шкалы времени перевозимых водородных квантовых часов (ПКЧВ) «Сапфир» при их размещении в точках с другим гравитационным потенциалом, т.е. на другой высоте.

В качестве первой экспериментальной точки, в которой размещались ПКЧВ «Сапфир», выбран объект «Нагатинская пойма» в пределах г. Москвы на берегу Москвы-реки с нормальной высотой относительно уровня моря 120,0 м и с расстоянием до объекта «СИГНАЛ» 46 км. Поскольку нормальная высота размещения объекта «СИГНАЛ» составляет 220 м, то разность высот двух точек составляет – 100 м.

Вторая экспериментальная точка, на которой размещались перевозимые часы, располагались в горах Кавказа (объект «Кавказ», разность высот +1804 м, расстояние 1408 км). На уровне точности эксперимента мы допускаем равенство нормальных и ортометрических высот.

Сличение шкал времени ГЭТ 1-2012 и перевозимых квантовых часов осуществлялось с помощью двух навигационных приемников Dicom GTR51, работающих по спутниковой системе ГЛОНАСС/GPS [258]. Один из них был установлен на объекте «СИГНАЛ» и связан со шкалой времени ГЭТ 1-2012, а второй был установлен вблизи ПКЧВ и связан с его шкалой времени. Разность гравитационных набегов шкал времени обоих часов определялась на суточном интервале наблюдения.

11.1.2. Исходные соотношения

Суммарное расхождение шкал времени $\Delta\tau$ подвижных перевозимых часов «М» (со шкалой τ_M) и стационарных часов «0» (со шкалой τ_0) на суточном интервале $\Delta\tau_0$ с учетом собственных уходов шкалы ПКЧВ и релятивистского смещения складывается из следующих составляющих [157]:

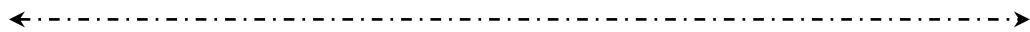
$$\Delta\tau = \tau_M - \tau_0 = \Delta\tau_{GR} + \Delta\tau_{\Omega} + \Delta\tau_{C_1} + \Delta\tau_T + \Delta\tau_{C_2} + \sigma(\tau), \quad (11.1)$$

где $\Delta\tau_{GR}$ – эффект гравитационного смещения шкал времени, который определяется разностью гравитационных потенциалов истинного поля Земли в точках размещения часов; $\Delta\tau_{\Omega}$ – эффект центробежного смещения времени, который определяется разностью центробежных потенциалов в точках размещения пары часов; $\Delta\tau_{C_1} = C_1\Delta\tau_0$ – собственный ход шкалы времени ПКЧВ за счет начальной относительной разности частот стандартов $C_1 = \Delta f / f_0$ по отношению к эталонной частоте f_0 ; $\Delta\tau_T = K_T \int_{\Delta\tau} \Delta T d\tau_0$ – температурное расхождение шкал, которое рассчитывается через температурный коэффициент частоты K_T и разность температур ΔT в точках размещения часов; $\Delta\tau_{C_2} = C_2\Delta\tau_0^2$ – смещение, вызванное относительной нестабильностью C_2 частоты задающего генератора ПКЧВ; $\sigma(\tau)$ – среднеквадратическая ошибка измерений (СКО). В формуле (11.1) должен присутствовать сдвиг шкал времени, вызванный вращением Земли (эффект Саньяка), однако на суточном интервале наблюдения для неподвижных часов он является величиной постоянной и при разностных суточных измерениях он исчезает [157].

Согласно [1, 157], эффект $\Delta\tau_{GR}$ можно представить через разность гравитационных потенциалов $\varphi_0; \varphi_M$ в точках размещения соответственно стационарных и мобильных часов в виде:

$$\Delta\tau_{GR} = \frac{\varphi_0 - \varphi_M}{c^2} \Delta\tau_0 = \frac{\Delta\varphi_{0M}}{c^2} \Delta\tau_0, \quad (11.2)$$

где $\Delta\varphi_{0M} = \varphi_0 - \varphi_M$ – искомая разность гравитационных потенциалов.



Центробежная составляющая $\Delta\tau_{\Omega}$ определяется соотношением [157]:

$$\Delta\tau_{\Omega} = \frac{\Omega^2}{2c^2} \left[(x_0^2 + y_0^2) - (x_M^2 + y_M^2) \right] \Delta\tau_0, \quad (11.3)$$

где Ω – угловая скорость Земли; координаты эталонных часов и перевозимых часов на объекте «Кавказ» соответственно равны:

- для базовых часов: $x_0 = 2,8455 \cdot 10^6$ м; $y_0 = 2,1609 \cdot 10^6$ м;
- для ПКЧВ в первой точке: $x_{M1} = 2,8455 \cdot 10^6$ м; $y_{M1} = 2,8455 \cdot 10^6$ м;
- для ПКЧВ во второй точке: $x_{M2} = 2,8455 \cdot 10^6$ м; $y_{M2} = 2,8455 \cdot 10^6$ м.

Координаты ПКЧВ измерялись с помощью навигационного приемника JAVAD Sigma с погрешностью определения положения около 1 м.

При разности ортометрических высот между ГЭТ 1-1012 и объектом «Нагатинская пойма» –100,6 м, расстоянии между двумя объектами около 46 км и интервале измерения около суток (86400 с) ожидаемое релятивистское смещение шкал времени за счет влияния гравитационного поля Земли (11.2) составляет –0,95 нс, а ожидаемое значение эффекта центробежного поля сил (11.3) составляет –0,56 нс. Знак минус обозначает, что перевозимые часы, находящиеся в точке с меньшей ортометрической высотой, отстают (они находятся в точке, где гравитационный потенциал больше).

При размещении перевозимых часов на Кавказе на объекте «Архыз» (разность высот +1804 м) ожидаемые смещения шкал времени за счет гравитационного поля Земли и центробежного потенциала составили соответственно +16,97 нс (на высоте потенциал меньше) и –21,94 нс.

Из формулы (11.1) по результатам измерений $\Delta\tau$ и при известных других составляющих этой формулы определяется искомый гравитационный эффект смещения времени $\Delta\tau_{GR}$, а по формуле (11.2) – искомая разность гравитационных потенциалов $\Delta\varphi_{0M}$.

11.1.3. Подготовка экспериментов

Нестабильность эталонных часов ГЭТ 1-2012 составляет $1 \cdot 10^{-15}$.

В экспериментах использовалось следующее мобильное оборудование (рис. 11.1):

1) перевозимые квантовые часы водородные (ПКЧВ) активного типа «Сапфир» с нестабильностью $3 \cdot 10^{-15}$ за 3600 с [257];

2) два навигационных приемника GTR51 с антенной Novatel GPS-703-GGG с погрешностью определения расхождения шкал времени 0,3 нс;

- 3) навигационный приемник JAVAD Sigma с точностью определения 1 см по горизонтали и 1,5 см по вертикали в относительном режиме;
 4) метеостанция Combi-Sensor DTF 1MV: измеряемый диапазон температур от $-40\text{ }^{\circ}\text{C}$ до $+60\text{ }^{\circ}\text{C}$, разрешение $0,025\text{ }^{\circ}\text{C}$, точность $\pm 0,3\text{ }^{\circ}\text{C}$.

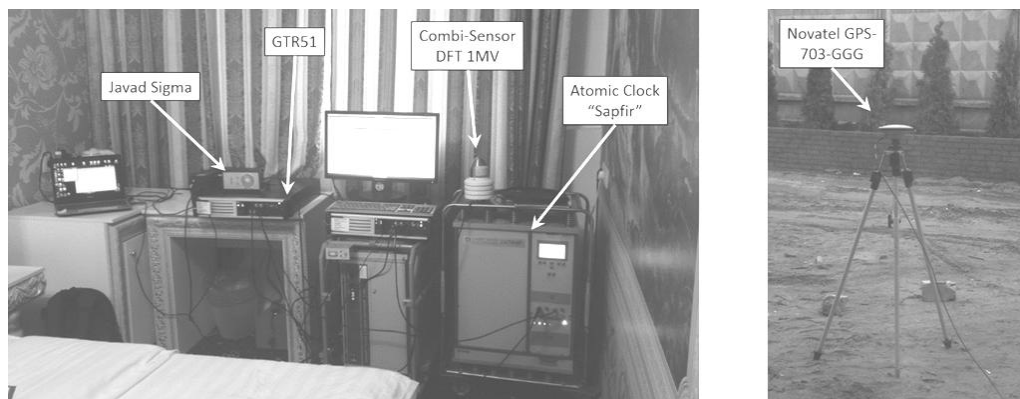
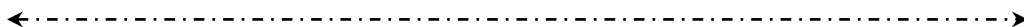


Рис. 11.1. Экспериментальное мобильное оборудование

Перед началом измерений был определен собственный ход ПКЧВ C_1 относительно ГЭТ 1-2012 и их температурный коэффициент частоты (ТКЧ) K_T . Собственный ход частоты определялся с помощью частотного компаратора VCH-314 при размещении часов в непосредственной близости друг от друга. Измерения выполнялись в термостабилизированном помещении в течение трех суток. В результате получено: $C_1 = -7,83 \cdot 10^{-14}$. Суточная нестабильность разности частот составляет $C_2 \ll 10^{-16}$ за сутки, и поэтому ей пренебрегаем.

Определение температурного коэффициента частоты производилось с помощью стандарта Ч1-1003М с нестабильностью $1 \cdot 10^{-15}$. Определялось начальное расхождение частоты ПКЧВ и Ч1-1003М с помощью частотного компаратора VCH-314. Затем ПКЧВ перемещался на 1 сутки в другое помещение на той же высоте, но с температурой на $7\text{ }^{\circ}\text{C}$ ниже. Контроль колебаний температуры во время эксперимента производился с помощью метеостанции Combi-Sensor DTF 1MV с погрешностью $\pm 0,3\text{ }^{\circ}\text{C}$. После суточного интервала времени ПКЧВ возвращался в первоначальное помещение, где с помощью того же частотного компаратора производилось измерение расхождения частот. В результате получено значение ТКЧ для ПКЧВ: $K_T = -4,5 \cdot 10^{15}$ на градус.



11.1.4. Результаты первого эксперимента

На объекте «Нагатинская пойма» устанавливались часы «Сапфир», навигационный приемник GTR51 с антенной Novatel GPS-703-GGG. По методике, описанной выше, перед началом эксперимента были определены собственный ход ПКЧВ относительно ГЭТ 1-2012, который составил $\Delta f/f = -2.85 \cdot 10^{-13}$ и температурный коэффициент частоты, который составил $-3.57 \cdot 10^{-15}$ на градус.

Перед началом процесса сличения шкал времени базовых и перевозимых часов с помощью приемника Javad Sigma были определены координаты точки размещения ПКЧВ. Для определения координат антенны использовались данные измерений со станции IGS (mdvj). Контроль температуры на объекте «Нагатинская пойма» осуществлялся непрерывно в течение всего эксперимента метеостанцией Combi-Sensor DTF 1MV.

Продолжительность измерений в течение эксперимента составила 5 суток (с 05:10 25.04.2015 г. по 02:58 30.04.2015 г.). Накопленный массив измерений содержал 436 измерений для каждого приемника.

Для обработки был выбран участок продолжительностью около суток, на котором колебания температуры в помещении были минимальными (рис. 11.2). Время измерения составило 86160 с. За этот интервал произошло суммарное рассогласование шкал времени ГЭТ 1-1012 и ПКЧ «Сапфир» на $\Delta\tau = -26.21$ нс.

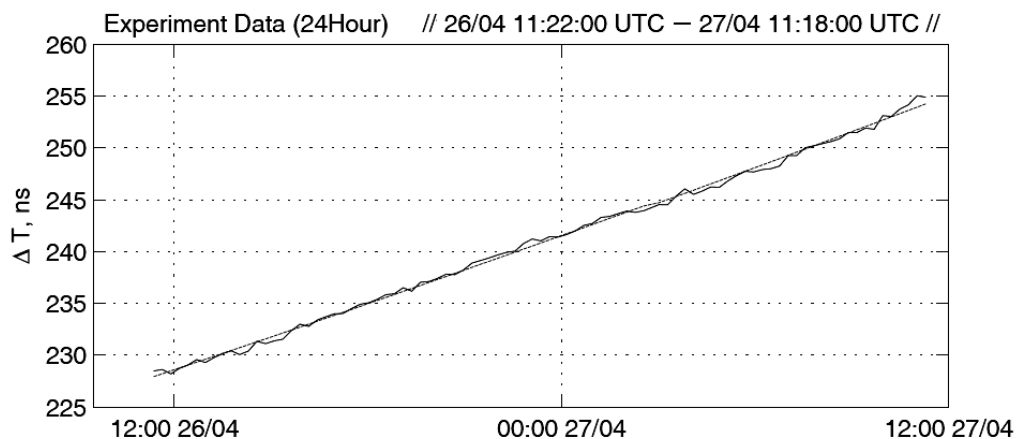


Рис. 11.2. Результаты измерений рассогласования шкал времени на объекте «Нагатинская пойма»

Средняя температура за время наблюдения была измерена метеостанцией и составила 25,88 °С. При измеренном ранее температурном коэффициенте частоты, расхождение шкал за счет температуры составило $\Delta\tau_T = -1.71$ нс. Расхождение шкал за счет собственного хода на интервале измерения составило $\Delta\tau_{\Delta f} = -24,55$ нс.

Случайная ошибка измерений расхождения шкал времени двух разнесенных часов определялась по всему ансамблю измерений в течение всего эксперимента на основе программного продукта MATLAB R2013b. Всего в обработку при этом было включено 90 измерений. В результате обработки всего массива измерений среднеквадратическая ошибка измерений составила $\sigma_{\Delta\tau} = 0,3$ нс.

На основе полученных данных из формулы (11.1) получено искомое значение гравитационного эффекта: $\Delta\tau_{GR} = -(0,71 \pm 0,3)$ нс при расчетном значении $-0,95$ нс. Это соответствует разности ортометрических высот 75 ± 32 м.

11.1.5. Результаты второго эксперимента

Измерения текущего расхождения шкал двух часов (11.1) в эксперименте на объекте «Кавказ» выполнялись с помощью приемников Dicom GTR51 в течение почти 5 суток (с 11:30 11.09.2015 г. по 06:38 16.09.2015 г.). Накопленный массив измерений содержал 427 измерений для каждого приемника. Для обработки был выбран участок продолжительностью около суток ($\tau_0 = 86160$ с), на котором колебания температуры в помещении объекта «Кавказ» были минимальными (рис. 11.3). На этом интервале измеренное рассогласование шкал времени ГЭТ 1-1012 и ПКЧВ «Сапфир» составило: $\Delta\tau = -12.98$ нс.

Средняя температура за время наблюдения измерялась с помощью метеостанции и составила 24,51 °С. При измеренном ранее температурном коэффициенте частоты расхождение шкал за счет температуры составило $\Delta\tau_T = -1.75$ нс. Расхождение шкал за счет собственного хода на суточном интервале измерения составило $\Delta\tau_{Cl} = -6,74$ нс. При заданных координатах измерительных точек ожидаемое «центробежное» смещение шкал времени (11.3) на интервале $\tau_0 = 86160$ с составило $-21,94$ нс.

Случайная ошибка измерений расхождения шкал времени двух разнесенных часов определялась по суточному ансамблю, содержащему 90 измерений. В результате обработки СКО измерений составила: $\sigma(\tau) = 0,8$ нс.

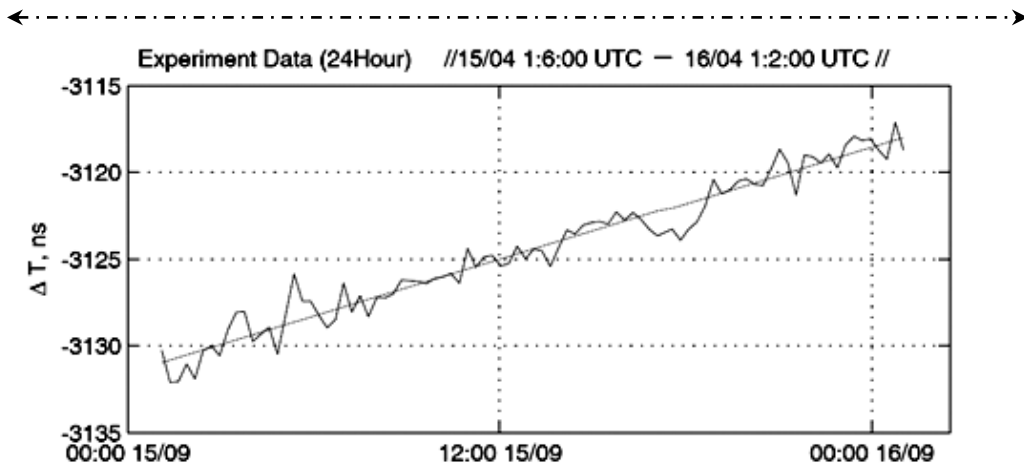


Рис. 11.3. Результаты измерений суточных рассогласований шкал времени на объекте «Кавказ»

На основе этих данных из формулы (11.1) получено искомое значение гравитационного эффекта смещения времени: $\Delta\tau_{GR} = +17,45 \pm 0,8$ нс при расчетном значении $+16,97$ нс. Найденная разность гравитационных потенциалов между точками стояния двух квантовых часов, в соответствии с формулой (11.2), составила $(181,7 \pm 8,3) \cdot 10^2 \text{ м}^2\text{с}^{-2}$ при относительной ошибке не более 4,6 %.

11.1.6. Возможные практические применения измерений разности потенциалов

Результаты измерения разности гравитационных потенциалов могут найти самые разные применения в гравиметрии и уже рассматриваются международным научным сообществом в рамках научного направления «Релятивистская геодезия» [36, 37, 93, 94] в качестве основы при создании мировой опорной системы высот.

Как уже упоминалось в разделе 3, важность развития методов определения разности высот по измерениям разности гравитационных потенциалов между двумя точками на поверхности Земли подчеркивается Резолюцией № 1 Международной Ассоциации Геодезии (IAG, Prague, Czech Republic, 2015) «Об определении и реализации Международной опорной системы высот» [159]. Этой Резолюцией предложено назвать разность гравитационных потенциалов в точке измерения φ_p и потенциалом на поверхности геоида φ_G «геопотенциальным числом» C_p : $\varphi_G - \varphi_p = C_p$.

←----->

Это объясняется тем, что потенциал на поверхности геоида является величиной постоянной в любой точке поверхности Земли и может стать основой при создании опорной системы высот.

Рассмотренные выше эксперименты открывают возможность прямого измерения геопотенциального числа.

Другое интересное практическое применение измерений разности гравитационных потенциалов в двух точках заключается в возможности определения разности высот геоида над референц-эллипсоидом в этих точках. Как известно, современная теория формы Земли использует понятие квазигеоида, высота которого отличается от высоты геоида, особенно в горах.

Разность превышений (высот) геоида над референц-эллипсоидом $\Delta\zeta$ в двух разнесенных точках на поверхности Земли можно выразить через разность геодезических ΔH_G и ортометрических высот ΔH_{OPT} этих точек в виде:

$$\Delta\zeta = \Delta H_G - \Delta H_{OPT}. \quad (11.4)$$

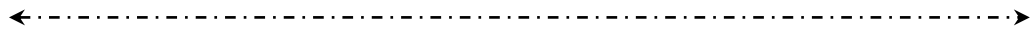
Разность геодезических высот этих точек ΔH_G определяется с помощью геодезических приемников ГЛОНАСС/GPS, а разность ортометрических высот ΔH_{OPT} можно определить по разности гравитационных потенциалов рассматриваемых точек. Действительно, применительно к данному эксперименту, представим гравитационный эффект (11.2) через разность ортометрических высот подвижных часов ΔH_{OPT}^M и стационарных ΔH_{OPT}^0 часов $\Delta H_{OPT} = H_{OPT}^M - H_{OPT}^0$ в виде:

$$\Delta\tau_{GR} = \frac{\varphi_0 - \varphi_M}{c^2} \Delta\tau_0 = \frac{\Delta\varphi_M - \Delta\varphi_0}{c^2} \Delta\tau_0 \approx \frac{g \cdot \Delta\tau_0}{c^2} \Delta H_{OPT}, \quad (11.5)$$

где гравитационный потенциал на поверхности Земли выражается формулой:

$$\varphi_k = \varphi_G - \Delta\varphi_k = \varphi_G - \int g(H) dH_{OPT}^k \approx \varphi_G - gH_{OPT}^k, \quad (11.6)$$

где $k = 0; M$; $\varphi_G = 6,26 \cdot 10^7 \text{ м}^2 \text{ с}^{-2} = const$ – потенциал на поверхности геоида, одинаковый для всех точек поверхности Земли; $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ – значение ускорения свободного падения в регионе, где выполняется эксперимент; $\Delta\tau_0$ – интервал наблюдений, отсчитываемый по эталонным часам.



По результатам измерений гравитационного эффекта замедления времени найденная из формулы (11.5) разность ортометрических высот составила 1855 ± 85 м при относительной ошибке менее 4,6 %. По разности ортометрических высот по формуле (11.4) находится искомая разность высот геоида.

При использовании перевозимых атомных часов с относительной нестабильностью частоты 10^{-16} ожидаемое разрешение по высоте геоида составляет около 1 м, при нестабильности 10^{-17} – примерно 10 см. Как уже отмечалось в первом разделе, в нескольких лабораториях мира, в том числе в России, идет интенсивная разработка оптических стандартов частоты и времени с нестабильностью 10^{-17} – 10^{-18} , причем обсуждаются возможности достижения нестабильности 10^{-19} – 10^{-20} .

11.2. Экспериментальная проверка метода релятивистской синхронизации наземных транспортируемых атомных часов

11.2.1. Исходные соотношения

Синхронизация с помощью транспортируемых часов получила широкое распространение по причине своей простоты. Однако с повышением стабильности атомных мобильных часов до 10^{-15} – 10^{-17} встает проблема высокоточной компенсации релятивистских уходов их шкал времени на трассе движения. Метод релятивистской синхронизации на основе непрерывного вычисления этих эффектов вдоль трассы движения путем измерения их координат и скорости предложен автором в работе [157]. При достигнутой на сегодняшний день точности существующих образцов НАП ГЛОНАСС/GPS оценки ожидаемой погрешности синхронизации составляют единицы пикосекунд. В данном разделе представлены результаты экспериментального подтверждения высокой ожидаемой точности предлагаемого метода [25, 255].

Методы компенсации релятивистских смещений шкал частоты и времени рассмотрены в разделе 3.1.3. Для обеспечения непрерывной синхронизации мобильных часов, находящихся на трассе, с базовыми часами, оставшимися в начальной точке маршрута, релятивистские смещения частоты и времени (3.101) необходимо вычислить по текущим показаниям НАП, а затем скомпенсировать [255]. В этом случае достигается полное и непрерывное вдоль трассы движения совпадение (с точностью до инструментальных расстройек) шкал времени мобильных и базовых часов. Процесс синхронизации шкал частоты и времени путем компенсации их релятивистских сдвигов в разделе 3 был назван *релятивистской синхронизацией*.

←----->

В процессе релятивистской синхронизации вычисляется корректирующая поправка $\Delta\tau_p^* = -\Delta\tau_p$, которая вносится в текущую шкалу времени мобильных часов как непрерывно на маршруте, так и однократно в конце маршрута. В первом случае процесс вычисления поправок по данным НАП и их цифровой ввод в шкалу мобильных часов ведутся непрерывно и поэтому на маршруте движения постоянно поддерживается синхронность шкал мобильного и базового хранителей времени. Во втором случае задача компенсации решается в конце маршрута по накопленным за время движения навигационным данным.

Релятивистский эффект смещения времени $\Delta\tau_p$, изменяющийся вдоль трассы перемещения часов, определяется соотношением (3.101):

$$\Delta\tau_p = \Delta\tau_p^0 + \Delta\tau_p^m + \Delta\tau_\Omega^m + \Delta\tau_V^m + \Delta\tau_S^m, \quad (11.7)$$

где

$$\Delta\tau_p^0 = \frac{\Delta\tau_0}{c^2} \left[(\varphi_0^n + \varphi_0^{an}) + \frac{1}{2} \Omega^2 (x_0^2 + y_0^2) \right] \quad (11.8)$$

– линейно нарастающая составляющая гравитационного смещения, определяемая положением базовых часов; c – скорость света; φ_0^n , φ_0^{an} – нормальная и аномальная составляющие потенциала стационарных часов; $\Omega = 7,29 \cdot 10^{-5} c^{-1}$ – угловая скорость вращения Земли; x_0 и y_0 – координаты стационарных часов; τ_0 – текущее время по шкале стационарных часов, отсчитываемое от момента начала эксперимента τ_{01} до его окончания τ_{02} ;

$$\Delta\tau_p^m = -\frac{1}{c^2} \int_{\tau_{01}}^{\tau_{02}} (\varphi_m^n(\tau_0) + \varphi_m^{an}(\tau_0)) d\tau_0 \quad (11.9)$$

– гравитационное смещение шкалы времени, определяемое текущим гравитационным потенциалом, изменяющимся вдоль трассы перемещения мобильных часов;

$$\varphi_m^n = (\mu_e / \rho) \left[1 - J_2 (R_e / \rho) P_2(\sin \psi) \right] \quad (11.10)$$

– нормальная составляющая потенциала, определяемая нулевой и второй зональной гармоникой разложения потенциала с коэффициентом $J_2 = 1,0826 \cdot 10^{-3}$; $P_2(\sin \psi) = \frac{3}{2} \sin^2 \psi - \frac{1}{2}$ – полином Лежандра; ψ –

←.....→
 геоцентрическая широта; $\mu = 3,986 \cdot 10^{14} \text{ м}^3/\text{с}^2$ – геоцентрическая гравитационная постоянная; $\rho(\tau_0) = \sqrt{x(\tau_0)^2 + y(\tau_0)^2 + z(\tau_0)^2}$ – геоцентрическое расстояние точек трассы часов; $R_e = 6,378 \cdot 10^6 \text{ м}$ – экваториальный радиус Земли (большая полуось референц-эллипсоида);

$$\varphi_m^{an} = \frac{\mu_e}{\rho(\tau_0)} \left[-\sum_{n=3}^{\infty} J_n \left(\frac{R_e}{\rho(\tau_0)} \right)^n P_n(\sin \psi) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left(\frac{R_e}{\rho(\tau_0)} \right)^n (C_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \sin(m\lambda)) P_{nm}(\sin \psi) \right]. \quad (11.11)$$

– аномальная составляющая потенциала мобильных часов, включающая зональные гармоники J_n , начиная с третьей, а также секториальные и тессеральные гармоники разложения потенциала по сферическим функциям с коэффициентами C_{nm}, S_{nm} ; $P_{nm}(\sin \psi)$ – присоединенные полиномы Лежандра; λ – долгота рассматриваемой точки;

$$\Delta \tau_{\Omega}^m = -\frac{1}{c^2} \int_{\tau_{01}}^{\tau_{02}} \left[\frac{\Omega^2}{2} (x_m^2(\tau_0) + y_m^2(\tau_0)) \right] d\tau_0 \quad (11.12)$$

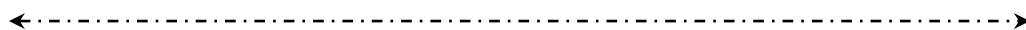
– релятивистское смещение, определяемое центробежным гравитационным потенциалом мобильных часов;

$$\Delta \tau_V^m = -\frac{1}{c^2} \int_{\tau_{01}}^{\tau_{02}} \frac{1}{2} V(\tau_0)^2 d\tau_0 \quad (11.13)$$

– релятивистское смещение, определяемое эффектом Допплера II порядка; $V(\tau_0)$ – текущая скорость атомных часов относительно поверхности Земли;

$$\Delta \tau_S^m = -\frac{\Omega}{c^2} \int_{\tau_{01}}^{\tau_{02}} (x_m(\tau_0) V_y(\tau_0) - y_m(\tau_0) V_x(\tau_0)) d\tau_0 \quad (11.14)$$

– релятивистское смещение, определяемое эффектом Саньяка.



11.2.2. Вычисление релятивистского смещения времени, накапливаемого вдоль трассы

Задача определения текущих релятивистских смещений времени и соответствующих релятивистских поправок $\Delta\tau_p^* = -\Delta\tau_p$ к шкале времени мобильных атомных часов заключается в вычислении всех составляющих формулы (11.7) методом численного интегрирования по измерениям текущих координат и скорости с помощью НАП ГЛОНАСС/GPS.

Приведем пример вычисления релятивистского смещения (11.12), вызванного влиянием центробежного потенциала, методом численного интегрирования (методом трапеции). Пусть $X_m = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $Y_m = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ и $Z_m = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ – векторы координат мобильных атомных часов, полученных с НАП, а $t_m = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ – моменты времени, в которые были сделаны измерения x_i , y_i , z_i . Тогда:

$$\begin{aligned} \Delta\tau_\Omega^m &= -\frac{1}{c^2} \int_{\tau_{01}}^{\tau_{02}} \left[\frac{\Omega^2}{2} (x_m^2(\tau_0) + y_m^2(\tau_0)) \right] d\tau_0 \approx \\ &\approx -\frac{\Omega^2}{2c^2} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{x_{i+1}^2 + x_i^2}{2} \cdot (t_{i+1} - t_i) + \frac{y_{i+1}^2 + y_i^2}{2} \cdot (t_{i+1} - t_i) \right). \end{aligned} \quad (11.15)$$

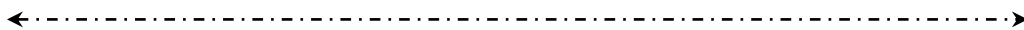
Аналогичные вычисления производятся и для других слагаемых выражения (11.7). Значения гармоник разложения гравитационного поля по сферическим функциям берутся из модели гравитационного поля Земли (например, модели EIGEN-6C4).

11.2.3. Предварительная оценка максимальных ошибок вычислений

Оценку ошибок вычислений смещения (11.7) проведем для каждого из слагаемых, входящих в это выражение.

1. Погрешность вычисления $\Delta\tau_p^m$ для нормального потенциала, определяемого соотношением (11.7).

Поскольку $J_2 = 1,0826 \cdot 10^{-3}$, то погрешность определения второго слагаемого в выражении нормального потенциала пренебрежимо мала. Поэтому потенциал ГПЗ можно представить в виде $\varphi_m^n = \mu/\rho$. Тогда максимальная погрешность вычисления гравитационного смещения (11.9) составит:



$$\begin{aligned} \delta(\Delta\tau_{\varphi}^m) &= -\frac{\mu_e}{c^2 \cdot R_e^3} \int_{\tau_{01}}^{\tau_{02}} (x\delta_x + y\delta_y + z\delta_z) d\tau_0 \approx \\ &\approx -\frac{\mu_e}{c^2 \cdot R_e^3} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\delta_x \cdot \frac{x_{i+1} + x_i}{2} (t_{i+1} - t_i) + \right. \\ &\left. \delta_y \cdot \frac{y_{i+1} + y_i}{2} (t_{i+1} - t_i) + \delta_z \cdot \frac{z_{i+1} + z_i}{2} (t_{i+1} - t_i) \right) \end{aligned} \quad (11.16)$$

где $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ – ошибки измерения координат x_i, y_i и z_i соответственно. Будем считать ошибки измерения координат с помощью НАП постоянными вдоль трассы.

Погрешности определения координат навигационных приемников, использующих режим RTK, составляет 15 см. Тогда при движении мобильных атомных часов в течение 12 часов максимальная погрешность составляет около 1 пс.

2. Оценим требуемое количество высших гармоник разложения потенциала поля силы тяжести при вычислении смещения $\Delta\tau_p^m$ в соответствии с соотношением (11.9) при допустимой погрешности синхронизации 1 пс. Так как $|\cos(m\lambda)| \leq 1, |\sin(m\lambda)| \leq 1, (R_e/\rho)^n \approx 1$ и $|P_{nm}(\sin\psi)| \leq 1$, то для максимальной оценки примем значения этих параметров за 1. Таким образом, для обеспечения точности компенсации релятивистских эффектов не хуже 1 пс необходимо учитывать гармоники C_{nm} и S_{nm} , значения которых не превышают $33 \cdot 10^{-9}$. Для модели поля EIGEN-6C4, это соответствует гармоникам порядка и степени 20x20.

3. Абсолютная погрешность величины релятивистского смещения времени, вызванного влиянием центробежного потенциала, определяется выражением, следующим из (11.12):

$$\begin{aligned} \delta(\Delta\tau_{\Omega}^m) &= \frac{\Omega^2}{c^2} \int_{\tau_{01}}^{\tau_{02}} (x_m \delta x + y_m \delta y) d\tau_0 \approx \\ &\approx \frac{\Omega^2}{c^2} \sum_{i=0}^{n-1} \left[\delta x \cdot \frac{x_{i+1} + x_i}{2} (t_{i+1} - t_i) + \delta y \cdot \frac{y_{i+1} + y_i}{2} (t_{i+1} - t_i) \right] \end{aligned} \quad (11.17)$$

При продолжительности интервала движения мобильных атомных часов не более 24 часов и с учетом погрешностей определения координат, указанных выше, погрешность не будет превышать значения 10^{-2} пс.

4. Погрешность определения эффекта Допплера II порядка, вызванного скоростью движения мобильных атомных часов.

Абсолютная погрешность определения релятивистского расхождения шкал, вызванного влиянием скорости движения атомных часов, определяется выражением, следующим из (11.13):

$$\delta(\Delta\tau_V^m) = \frac{1}{c^2} \int_{\tau_{01}}^{\tau_{02}} V \delta V d\tau_0 \approx \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^{n-1} \left[\delta V \cdot \frac{V_{i+1} + V_i}{2} (t_{i+1} - t_i) \right]. \quad (11.18)$$

где $V_m = \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ – массив измерений скорости подвижных атомных часов, значения которой определены в моменты $t_m = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ (измерения по НАП).

Погрешности определения скорости навигационным приемником TRIMBLE BX982 составляет $2 \cdot 10^{-2}$ м/с. Тогда при скорости атомных часов не более 30 м/с (108 км/ч) погрешность синхронизации, вызванная движением хранителя времени в течение 12 часов, будет не более 0,3 пс. Соответственно, при движении в течение 24 часов – не более 0,6 пс.

5. Влияние эффекта Саньяка на точность синхронизации атомных часов.

Погрешность вычисления релятивистского расхождения шкал, вызванного эффектом Саньяка (11.14), определяется следующим выражением:

$$\begin{aligned} \delta(\Delta\tau_S^m) &= -\frac{\Omega}{c^2} \int_{\tau_{01}}^{\tau_{02}} (V_y \delta x + x \delta V_y - y \delta V_x - V_x \delta y) d\tau_0 \approx \\ &\approx -\frac{\Omega}{c^2} \sum_{n=1}^{n-1} \left[\left(\frac{V_{y_{i+1}} + V_{y_i}}{2} \delta x + \frac{x_{i+1} + x_i}{2} \delta V_y - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{y_{i+1} + y_i}{2} \delta V_x - \frac{V_{x_{i+1}} + V_{x_i}}{2} \delta y \right) \cdot (t_{i+1} - t_i) \right] \end{aligned} \quad (11.19)$$

При наихудших условиях оценки этой ошибки, когда часы движутся поперек меридиана ($x = R_e$, $y = 0$, $V_x = 0$, $V_y = 30$ м/с) максимально возможная погрешность синхронизации, вызванная эффектом Саньяка, не превышает 9 пс. Однако, если часы движутся вдоль меридиана ($x = R_e$, $y = 0$, $V_x = 30$ м/с $V_y = 0$), ошибка равна нулю.

Другая возможность уменьшения эффекта Саньяка и соответствующей ошибки синхронизации заключается в использовании маршрута часов «туда и обратно» и прокладке обеих частей маршрута по одному и

←----->

тому же пути. При этом все рассмотренные выше гравитационные и скоростные релятивистские эффекты складываются (при одинаковых условиях движения удваиваются), а эффект Саньяка компенсируется. Это объясняется тем, что данный эффект пропорционален площади проекции треугольника с вершинами в точках 0 , \vec{R}_m , \vec{R}_0 на плоскость экватора, а его знак зависит от направления движения.

11.2.4. Цель, оснащение и результаты эксперимента

Целью эксперимента являлась проверка точности метода релятивистской синхронизации шкалы времени водородного стандарта частоты и времени Ч1-76А на протяженном маршруте движения на основе данных о координатах и скорости от НАП. Начальная точка маршрута – ФГУП «ВНИИФТРИ», г.п. Менделеево, Солнечногорский район, Московская обл., конечная точка маршрута – Радиоастрономическая обсерватория (РАО) «Зеленчукская», ст. Зеленчукская, Зеленчукский р-он, респ. Карачаево-Черкессия. Расстояние между двумя пунктами составляло 1410 км, маршрут проходил практически вдоль меридиана (рис. 11.4).

В эксперименте использовалось следующее оборудование:

- 1) стандарт частоты и времени Ч1-76А с нестабильностью $3 \cdot 10^{-15}$;
- 2) навигационный приемник сигналов ГЛОНАСС/GPS Javad Sigma.

Во время движения приемник навигационных сигналов ГЛОНАСС/GPS непрерывно измерял и записывал текущие координаты и скорость.

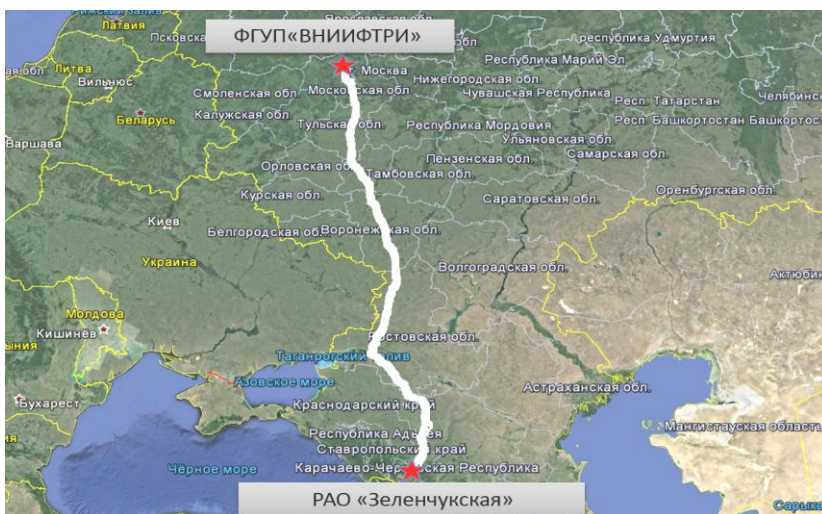


Рис. 11.4. Маршрут движения водородного стандарта частоты и времени Ч1-76А

На рис. 11.5–11.7 представлены графики измеряемых параметров, полученных от НАП: скорость, геодезическая высота и геоцентрическое расстояние вдоль маршрута движения.

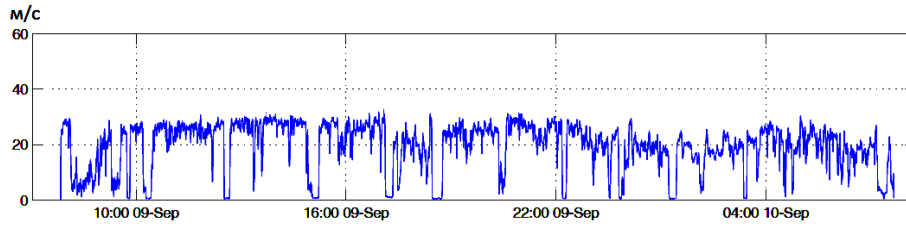


Рис. 11.5. Текущая скорость транспортного средства вдоль маршрута движения ФГУП «ВНИИФТРИ» – РАО «Зеленчукская»

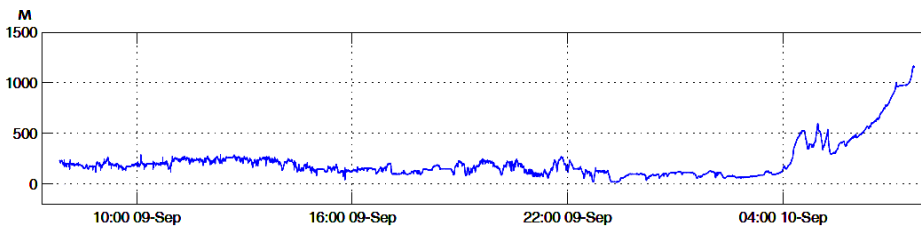


Рис. 11.6. Текущая геодезическая высота вдоль маршрута движения ФГУП «ВНИИФТРИ» – РАО «Зеленчукская»

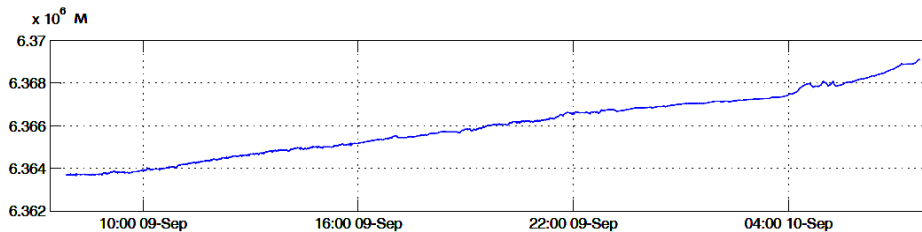


Рис. 11.7. Текущее геоцентрическое расстояние вдоль маршрута движения ФГУП «ВНИИФТРИ» – РАО «Зеленчукская»

Расчет релятивистских эффектов по маршруту движения в интересах их компенсации осуществлялся по формулам (11.7) – (11.19) с использованием программного продукта MATLAB. В расчетах применялась модель разложения гравитационного поля EIGEN-6C4. Из разложения использовались гармоники, степень n и порядок m которых не превышало 20. На рис. 11.8а–11.8в представлены графики текущего релятивистского смещения времени, на рис. 11.8г – суммарное релятивистское расхождение шкалы времени мобильного СЧВ относительно стационарного СЧВ, рассчитанное по приведенной выше методике на основе измерений текущих координат и скорости.

Релятивистская метрология околосземного пространства-времени

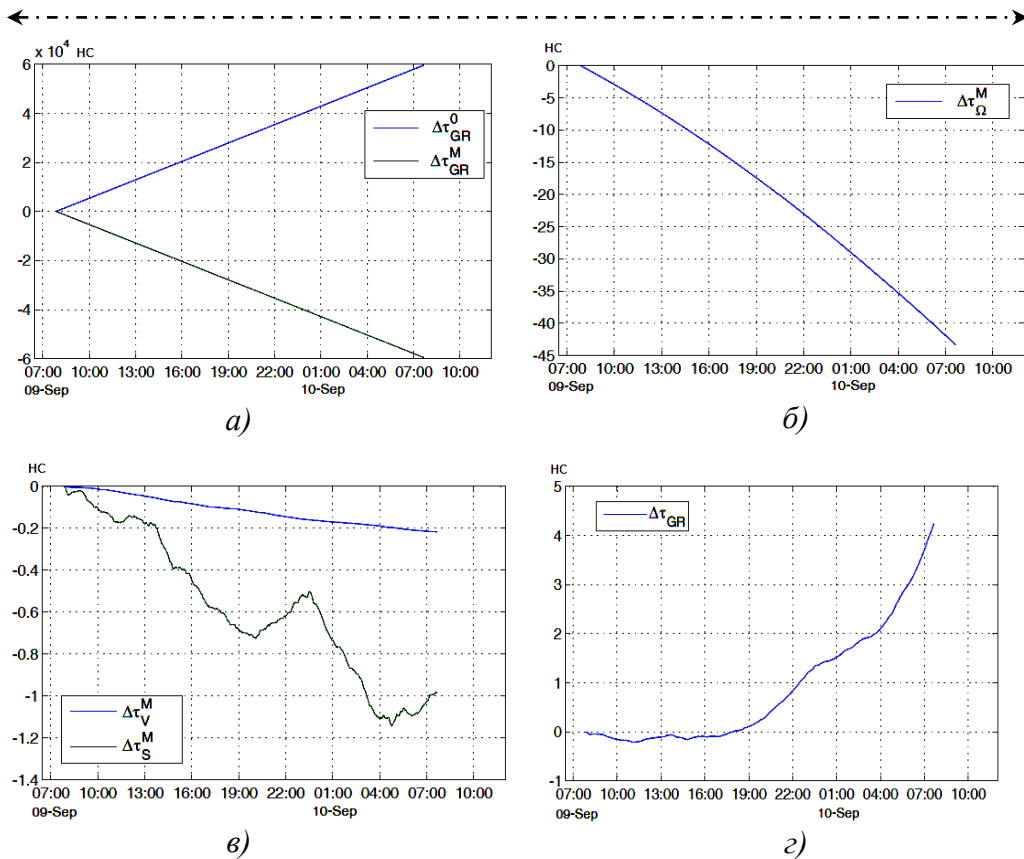


Рис. 11.8. Текущее релятивистское гравитационное смещение времени вдоль маршрута движения ФГУП «ВНИИФТРИ» – РАО «Зеленчукская», определяемое:

- а) положением базовых часов и гравитационным потенциалом для мобильных часов;
- б) центробежным потенциалом мобильных часов;
- в) эффектом Доплера II порядка для мобильных часов и эффектом Саньяка;
- г) результирующее гравитационное расхождение шкал времени базовых и мобильных часов

Текущий график суммарной ошибки синхронизации для мобильного СЧВ относительно стационарного СЧВ вдоль маршрута ФГУП «ВНИИФТРИ» – РАО «Зеленчукская» представлен на рис. 11.9.

На момент окончания движения вычисленное по формуле (11.7) релятивистское расхождение шкалы времени составило: $\Delta\tau_p = +4,241$ нс при ошибке вычисления $\delta\tau_p \pm 0,001$ нс .

Как уже отмечалось, корректирующая релятивистская поправка определяется по формуле $\Delta\tau_p^* = -\Delta\tau_p$.

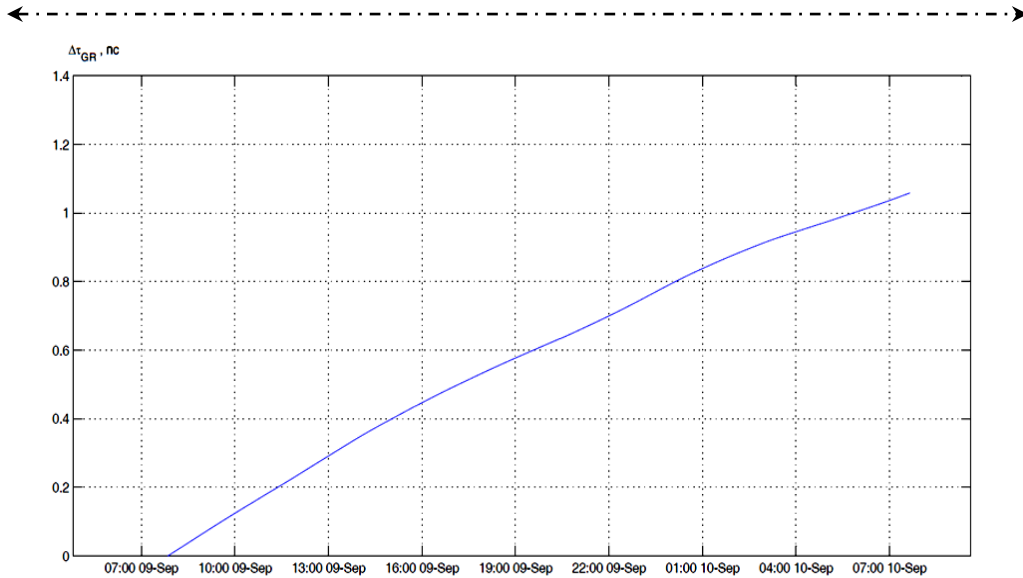


Рис. 11.9. Суммарная текущая ошибка вычисления релятивистского гравитационного смещения времени вдоль маршрута движения ФГУП «ВНИИФТРИ» – РАО «Зеленчукская»

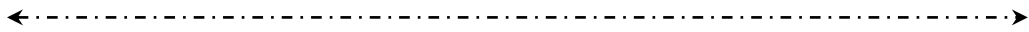
11.2.5. Верификация метода релятивистской синхронизации

Для верификации метода релятивистской синхронизации использовалась синхронизация стандартов частоты и времени (подвижного и стационарного) путем прямого измерения расхождения их шкал на концах маршрута. Расхождение шкал двух стандартов частоты $\Delta\tau$ в конце маршрута движения определяется следующим выражением:

$$\Delta\tau = \Delta\tau_p + \Delta\tau_{\Delta f} + \Delta\tau_{ТКЧ} \pm \sigma_\tau, \quad (11.20)$$

где $\Delta\tau_p$ – расхождение за счет релятивистских эффектов; $\Delta\tau_{\Delta f}$ – расхождение шкал времени за счет начального расхождения частот стандартов $\Delta f/f$, которое измеряется непосредственно перед поездкой; $\Delta\tau_{ТКЧ}$ – расхождение шкал за счет разности температур в точках размещения стандартов, которое рассчитывается через температурный коэффициент частоты (ТКЧ); σ_τ – среднеквадратическая ошибка измерений.

Для обеспечения синхронизации часов в конце маршрута использовалось следующее дополнительное оборудование:



1) Первичный эталон времени и частоты ГЭТ 1-2012 и подключенный к нему специализированный приемник сигналов времени и частоты ГНСС GTR51 (ФГУП «ВНИИФТРИ», г.п. Менделеево, Солнечногорский р-он, Московская обл.);

2) Стандарт времени и частоты (СЧВ) Ч1-1003М и подключенный к нему аналогичный приемник GTR51 (РАО «Зеленчукская», ИПА РАН, ст. Зеленчукская, Зеленчукский р-он, респ. Карачаево-Черкесия);

3) Метеостанция Combi-Sensor DTF 1MV.

Навигационные приемники GTR51 являются средствами измерения утвержденного типа. Данные приемники были проверены и откалиброваны перед измерениями. Сравнение шкал времени двух атомных часов с помощью данных приемников осуществляется с систематической неопределенностью не превышающей 1,5 нс.

Перед поездкой был определен температурный коэффициент частоты. В течение 3 суток перед поездкой в термостабилизированном помещении измерялась разность частот Ч1-76А и Ч1-1003М с помощью приемников GTR51, которая составила $1,62 \cdot 10^{-13}$.

Время движения по маршруту ФГУП «ВНИИФТРИ» – РАО «Зеленчукская» составило $8,64 \cdot 10^4$ с (1 сутки). Поэтому расхождение шкал в конце маршрута, вызванное начальной разностью частот двух СЧВ, составило: $\Delta\tau_{\Delta f} = 14,00$ нс.

Непосредственно перед выездом была произведена начальная синхронизация. При этом измерялось расхождение шкал времени Ч1-1003М и Ч1-76А с помощью приемников GTR51, которое составило: $\Delta\tau_{begin} = 315\,271\,538,53$ нс. По приезде в РАО «Зеленчукская» было непосредственно измерено расхождение шкал времени Ч1-76А и Ч1-1003М, которое составило: $\Delta\tau_{end} = 315\,271\,564,40$ нс. Таким образом, вычитая конечное значения расхождения шкал времени и начальное, определяем суммарное расхождение, которое составило $\Delta\tau = \Delta\tau_{end} - \Delta\tau_{begin} = 25,87$ нс.

Средняя температура на маршруте движения измерялась метеостанцией и составила 28,3 °С. Поэтому при известном времени движения расхождение шкал за счет разности температур в точках размещения стандартов составило:

$$\begin{aligned} \Delta\tau_{TKЧ} &= (T_{cp} - T_0) \cdot K_{TKЧ} \cdot \tau = \\ &= (28,3 - 20,0) \cdot (9,5 \cdot 10^{-15}) \cdot 8,64 \cdot 10^4 = 6,81 \text{ нс} \end{aligned} \quad (11.21)$$

←----->

В результате, согласно выражению (11.20), искомое релятивистское расхождение шкал в конце маршрута ФГУП «ВНИИФТРИ» – РАО «Зеленчукская», полученное методом прямой синхронизации через ГЛОНАСС/GPS с помощью приемников GTR51, составляет $\Delta\tau_{rel} = 5,1 \pm 1,5$ нс. При этом интервал неопределенности при прямой синхронизации составил: $(3,6 \div 6,6)$ нс.

Таким образом, вычисленное значение релятивистских эффектов смещения шкал времени по методу релятивистской синхронизации составляет $4,241 \pm 0,001$ нс и находится внутри интервала неопределенности, полученного при синхронизации независимым методом с погрешностью $\pm 1,5$ нс.

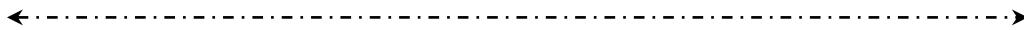
11.2.6. Оценка результатов эксперимента

Погрешность метода релятивистской синхронизации составляет ± 1 пикосекунды. Погрешность альтернативного метода синхронизации на основе НАП GTR51 на три порядка больше и составляет $\pm 1,5$ наносекунды. Расчетное значение релятивистского расхождения шкал не вышло за пределы погрешности альтернативного метода синхронизации, что свидетельствует о справедливости полученных результатов.

Для повышения точности метода релятивистской синхронизации необходимо использование специализированной высокоточной НАП. Ошибку метода можно минимизировать путем организации движения часов вдоль меридиана, либо путем использования кольцевого маршрута движения «туда и обратно» по близким путям.

При методе релятивистской синхронизации подвижные атомные часы соответствующей стабильности синхронизированы с базовыми в любой точке трассы с приведенной выше точностью.

Рассмотренная релятивистская синхронизация транспортируемых часов, в силу высоких потенциальных возможностей, может найти применение при синхронизации создаваемых в настоящее время оптических стандартов частоты и времени со стабильностью 10^{-17} и лучше.



11.3. Релятивистские эксперименты по обнаружению электростатического и магнитного поля, наведенного вращением

11.3.1. Основные уравнения электродинамики вращающихся систем

Эффекты, возникающие при вращении источников электромагнитных полей и системы проводников с электрическим током следует рассматривать во вращающейся системе отсчета. Поэтому в качестве исходных уравнений используем полученную в разделе 5 систему уравнений Максвелла, которые определяют электромагнитные поля в проводящих средах, находящихся в произвольной системе отсчета, в виде (5.23). В качестве исходной системы материальных соотношений, определяющих поля, токи и заряды в произвольной системе отсчета, примем систему уравнений (5.29), (5.30) и (5.32). При этом связь между компонентами тензоров и векторов электромагнитного поля установлена выше в виде соотношений (5.20) и (5.21).

Чтобы установить влияние силовых полей, вызванных только вращением системы отсчета, пренебрегаем влиянием истинного гравитационного поля. Тогда отличные от нуля компоненты метричного тензора в системе отсчета, равномерно вращающейся с угловой скоростью Ω , согласно (2.97), в первом порядке по $\Omega R/c$ равны:

$$-g_{00} = g_{aa} = 1; \quad g_{0a} = G_a; \quad -g = \gamma = 1, \quad \vec{G} = \frac{1}{c} [\vec{\Omega} \vec{R}]. \quad (11.22)$$

Постановка этих выражений в формулы (5.23) приводит к традиционной форме уравнений Максвелла в проводящей среде:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \text{div} \vec{B} &= 0, \\ \text{rot} \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}, & \text{div} \vec{D} &= \rho \end{aligned} \right\} \quad (11.23)$$

где (\vec{E}, \vec{D}) , (\vec{H}, \vec{B}) – векторы напряженности и индукции электрического и магнитного полей, соответственно.

Это означает, что при связях (5.20) вся информация о движении среды и вращении источника поля должна содержаться в материальных соотношениях (5.29), (5.30) и (5.32).

Используя связи (5.20) и условия (11.22), векторную форму материальных соотношений получаем в виде:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} - \frac{1}{c} [\vec{G} \vec{H}] + \frac{n^2 - 1}{c^2} [\vec{V} \vec{H}], \quad (11.24)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} - \frac{1}{2} [\vec{E} \vec{G}] + \frac{n^2 - 1}{c^2} [\vec{E} \vec{V}], \quad (11.25)$$

$$j = \sigma(E - [\vec{B} \vec{V}]); \quad \rho_u = \frac{\sigma \vec{E}}{c} \left[\frac{\vec{V}}{c} + \vec{G} \right], \quad (11.26)$$

где n – коэффициент преломления среды, движущейся со скоростью \vec{V} относительно системы отсчета, вращающейся с угловой скоростью $\vec{\Omega}$; ρ_i – плотность наведенного заряда в проводнике, вызванного его движением и вращением; j – электрический ток в проводнике.

Проанализируем полученные материальные соотношения.

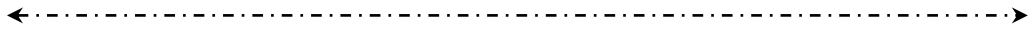
1. В отсутствие вращения ($\Omega = 0$) уравнения (11.23) и (11.25) сводятся к уравнениям Минковского (5.9) и (5.10):

$$\left. \begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon \vec{E} + \frac{n^2 - 1}{c^2} [\vec{V} \vec{H}], \\ \vec{B} &= \mu \vec{H} - \frac{n^2 - 1}{c^2} [\vec{V} \vec{E}], \end{aligned} \right\} \quad (11.27)$$

в которых вторые члены описывают эффекты наведения полей в движущихся средах, экспериментально обнаруженные соответственно Вильсоном и Эйхенвальдом [209].

2. В случае покоящейся среды ($V = 0$) при нулевом внешнем электрическом поле ($E = 0$) из формул (11.24) и (11.25) получаем, соответственно:

$$\left. \begin{aligned} \vec{D} &= \frac{1}{c^2} [\vec{H} [\vec{\Omega} \vec{R}]], \\ \vec{B} &= \frac{1}{c^2} [[\vec{\Omega} \vec{R}] \vec{E}]. \end{aligned} \right\} \quad (11.28)$$



Формулы (11.28) отображают принципиально новые результаты: наблюдатель (измеритель), жестко скрепленный с вращающимся источником магнитного поля (например, постоянным магнитом), зафиксирует наведенное электрическое поле, величина которого зависит от скорости вращения [88]. И наоборот, измеритель, жестко связанный с вращающимся заряженным конденсатором, зарегистрирует наведенное вращением магнитное поле [89]. Описанные явления являются магнитоэлектрическим и электромагнитным аналогами известного эффекта Саньяка, зарегистрированного на электромагнитных волнах (см. разделе 1.3.3.2). Они коренным образом отличаются от упомянутых выше эффектов Вильсона и Эйхенвальда тем, что проявляются в отсутствие относительного движения источников и регистраторов полей.

3. В случае покоящейся среды ($V = 0$) материальные соотношения (11.26) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \vec{j} &= \sigma \vec{E}; \\ \rho_n &= \frac{\sigma \vec{E} \vec{G}}{c} = \frac{\vec{j}}{c^2} [\vec{\Omega} \vec{R}]. \end{aligned} \right\} \quad (11.29)$$

Таким образом, во вращающемся проводнике с электрическим током должен появиться наведенный вращением дополнительный заряд, пропорциональный величине тока и угловой скорости вращения [88]. Этот эффект является гальваническим аналогом волнового эффекта Саньяка.

Справедливость материальных соотношений (11.24) и (11.25) многократно проверена на практике с помощью электромагнитных (световых) волн, распространяющихся в волоконно-оптических кольцевых интерферометрах [74, 75, 79–82] при вычислении фазового сдвига встречных волн, который определяется формулой (1.74). На основе этих интерферометров созданы волоконно-оптические гироскопы (ВОГ). Это подтверждает правильность полученных выше материальных соотношений и позволяет уверенно использовать их для анализа статических полей во вращающихся системах отсчета.

Таким образом, во вращающихся системах отсчета должны существовать новые релятивистские эффекты: при покоящемся источнике поля (электрического и магнитного), а также покоящемся измерителе поля возникают наведенные вращением электрические и магнитные поля, а также электрические заряды, имеющие чисто релятивистское происхождение.

Важно подчеркнуть, что рассмотренные релятивистские эффекты возникают в системе «источник – индикатор поля», где принципиально нет относительного движения: и источник, и индикатор жестко закреплены на вращающемся основании.

Рассмотрим возможность экспериментального обнаружения рассмотренных релятивистских гироэффектов в лабораторных условиях.

11.3.2. Ротационный эксперимент по обнаружению гироэлектрического поля в магнитном поле

Согласно формулам (11.28) векторы \vec{D} , \vec{H} , $[\vec{\Omega}\vec{R}]$ образуют ортогональную тройку. Поэтому в поле постоянного магнита, вращающегося вдоль вектора \vec{H} , должна возникнуть электрическая индукция, вектор которой расположен в плоскости вращения [89] (рис. 11.10). Если у торца постоянного магнита 1 разместить цилиндрический конденсатор в виде соединенных перемычкой диамагнитной обкладки 2 и центрального стержня 3, то возникающая в результате разделения зарядов напряженность электрического поля между обкладками определится, согласно (10.28), выражением:

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} H \Omega R, \quad (11.30)$$

где ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума.

Отсюда наведенная разность потенциалов между обкладками

$$\Delta u = \int_0^{R_0} E dR = -\frac{H \Omega R_0}{2c^2 \varepsilon_0}, \quad (11.31)$$

где R_0 – радиус конденсатора.

Соответствующий заряд определится емкостью C цилиндрического конденсатора: $q = C \Delta u$. Продифференцировав это выражение по времени, находим ток перезаряда в перемычке:

$$i_\Omega = \frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{H \dot{\Omega} R_0^2 C}{2c^2 \varepsilon_0} - \frac{\dot{H}_0 \Omega R_0^2 C}{2c^2 \varepsilon_0}. \quad (11.32)$$

Если в разрыв перемычки включить измеритель малых токов, то при постоянном магнитном поле ($\dot{H} = 0$) измеряемый ток пропорционален угловому ускорению, а при переменном магнитном поле ток пропорционален угловой скорости.

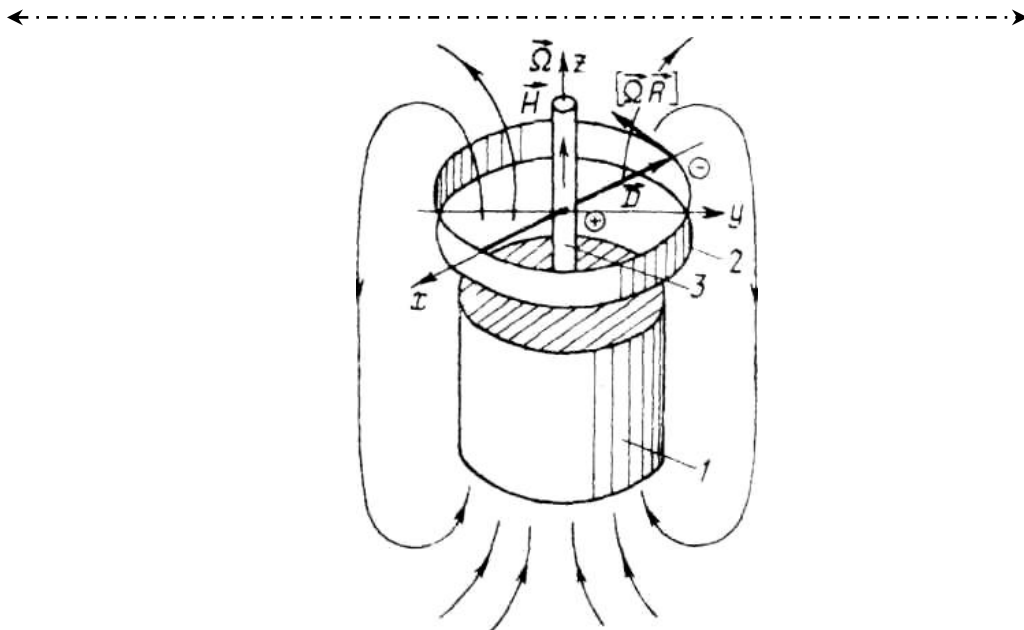


Рис. 11.10. Схема релятивистского эксперимента по обнаружению гироэлектрического поля в поле постоянного магнита

В случае гармонического закона изменения магнитного поля ($H = H_0 \cos \omega t$) при $\Omega = \text{const}$ из последней формулы имеем

$$i_{\Omega} = \frac{H_0 \Omega R_0^2 c \omega}{2c^2 \varepsilon} \sin \omega t, \quad (11.33)$$

При $H_0 = 10^5 \frac{\text{А}}{\text{М}}$, $\omega = 2\pi \cdot 400 \text{ с}^{-1}$, $R_0 = 5 \text{ см}$, $c = 1 \text{ пф}$, $\Omega = 2\pi \cdot 50 \text{ с}^{-1}$

амплитуда тока составит примерно $3 \cdot 10^{-11} \text{ А}$. Современные измерительные средства позволяют зафиксировать такой ток с точностью до 10^{-15} А [259].

11.3.3. Ротационный эксперимент по обнаружению гироэлектрического поля в системе проводников с током

Другая возможность измерения наведенного электрического поля основана на использовании магнитного поля, вектор которого перпендикулярен оси вращения. Такое поле создается двумя параллельными кольцевыми проводниками с обратными направлениями токов j от одного источника [88] (рис. 11.11а).

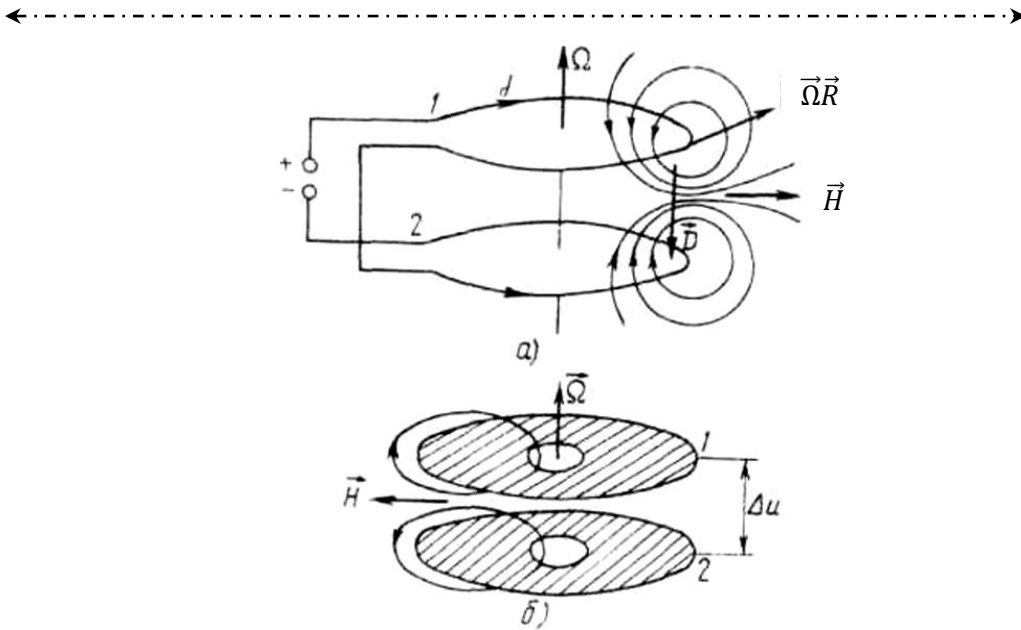


Рис. 11.11. Схема релятивистского эксперимента по обнаружению гироспеэлектрического поля в системе проводников с током

При вращении этой системы проводников электрический конденсатор, обкладками которого являются плоские контуры проводников, заряжается. Наведенный вращением заряд определяется формулой (11.29).

Приращение заряда, в соответствии с (11.29), на одном из проводников составит:

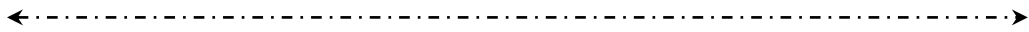
$$dq = \rho_n dl = \frac{j}{c^2} [\vec{\Omega} \vec{R}] \vec{e}_i dl, \quad (11.34)$$

где \vec{e}_i – орт вектора тока, $i = 1, 2$.

Интегрируя выражение (10.34) по замкнутому контуру и учитывая, что $\int [\vec{R} d\vec{R}] = 2\vec{S}$, где \vec{S} – площадь контура проводников, находим разность зарядов в двух проводниках:

$$\Delta q = q_1 - (-q_2) = \frac{4\vec{\Omega} \vec{S}}{c^2} j. \quad (11.35)$$

Полученный эффект замечателен тем, что является чисто электрическим диалогом эффекта Сяньяка (1.74) на электромагнитных волнах, причем масштабные коэффициенты, определяемые гироскопическим временем запаздывания (1.72), в обоих случаях одинаковы.



Если контуры обоих проводников разместить на параллельных пластинах плоского конденсатора (рис. 10.11б), а последние замкнуть через измеритель малых токов, то электрический ток в переключке определится соотношением

$$i_{\Omega} = \frac{d(\Delta q)}{dt} = \frac{4\dot{\Omega}\vec{S}}{c^2} j + \frac{4\vec{\Omega}\vec{S}}{c^2} \frac{dj}{dt}. \quad (11.36)$$

Таким образом, в этом измерителе при $\Omega = 2\pi \cdot 50 \text{ с}^{-1}$, амплитуде синусоидального тока IA , $S = 1 \text{ м}^2$ (достигается многовитковой спиральной намоткой провода) и частоте колебаний тока 400 Гц амплитуда переменного тока в переключке достигает $3,2 \cdot 10^{-11} \text{ А}$. Поэтому, как и в предыдущем случае, достижимая относительная ошибка измерения искомого эффекта составляет около 0,01 %.

Возможности повышения чувствительности рассмотренного экспериментального релятивистского обнаружителя связаны с увеличением площади S и тока в кольцевом контуре, что трудно разрешимо из-за большого сопротивления проводников. Однако на основе явления высокотемпературной сверхпроводимости реально использование проводников с токами в десятки ампер при значительной площади контура.

11.3.4. Ротационный эксперимент по обнаружению гиромангнитного поля в электрическом конденсаторе

Наведенное магнитное поле проявляется во вращающемся конденсаторе, выполненном по схеме, изображенной на рис. 11.12 [89]. Если конденсатор зарядить от внешнего источника, то при вращении его возникает магнитное поле, вектор которого перпендикулярен оси вращения, а величина согласно (10.28), составляет

$$H = \frac{\Omega R \Delta u}{\mu_0 c^2 d_0}, \quad (11.37)$$

где Δu и d_0 – соответственно напряжение и расстояние между пластинами. При $\Omega = 50 \text{ об/с}$, $\Delta u = 10^4 \text{ В}$, $d_0 = 1 \text{ см}$ напряженность на расстоянии $R = 0,1 \text{ м}$ от центра вращения составит $2,5 \cdot 10^{-4} \text{ А/м}$.

Учитывая, что современные сверхпроводящие магнитометры на эффекте Джозефсона обладают чувствительностью до $10^{-9} - 10^{-10}$ А/м, рассмотренный эффект можно измерить с достаточно высокой точностью. Аналогичный эффект намагничения возникает и в схеме, изображенной на рисунке 11.10, если приложить разность потенциалов между обкладками цилиндрического конденсатора.

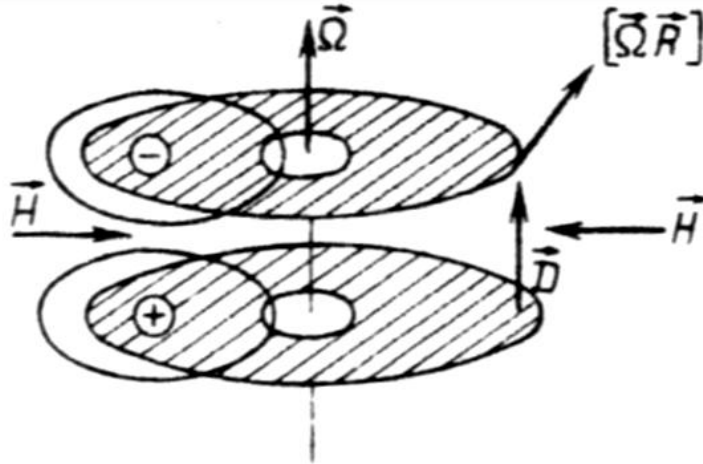


Рис. 11.12. Схема релятивистского эксперимента по обнаружению гироманнитного поля в электрическом конденсаторе

Таким образом, как и ожидалось, неинерциальное движение системы отсчета (вращение) влияет не только на параметры электромагнитной волны (классический волновой эффект Саньяка), но и порождает наведенные вращением релятивистские электрические и магнитные поля. При этом исходное магнитное поле может создаваться либо постоянным магнитом, либо системой проводников с током.

Примечательной особенностью соотношения (11.35) является то, что, как и в волновом эффекте Саньяка, в левой части равенства стоит величина, инвариантная к выбору системы отсчета (в эффекте Саньяка инвариант – фаза волны). Аргументом же в обоих случаях являются производные инварианта по времени, стоящие в правой части соответствующих формул.

11.4. Выводы к разделу 11

1. Физическими эффектами, непосредственно связанными с разностью гравитационных потенциалов, являются эффекты гравитационного смещения частоты и гравитационного замедления (смещения) времени. Возможности непосредственного измерения этих эффектов и, соответственно, разности гравитационных потенциалов двух точек ГПЗ открылись на основе использования высокостабильных транспортируемых атомных стандартов частоты и времени.

Замысел новых наземных экспериментов состоял в определении разности гравитационных потенциалов между двумя наземными точками через измерение гравитационного расхождения двух шкал времени: шкалы времени Государственного первичного эталона единиц времени, частоты и национальной шкалы времени ГЭТ 1-2012 (объект «СИГНАЛ» ФГУП «ВНИИФТРИ») и шкалы времени перевозимых водородных квантовых часов (ПКЧВ) «Сапфир» при их размещении в точках с другим гравитационным потенциалом, т.е. на другой высоте. В качестве первой экспериментальной точки, в которой размещались ПКЧВ «Сапфир», выбран объект «Нагатинская пойма» в пределах г. Москвы (разность высот с объектом «СИГНАЛ» «-100 м»). Вторая экспериментальная точка, в которой размещались перевозимые часы, располагались в горах Кавказа (объект «Кавказ», разность высот +1804 м). Сличение шкал времени Государственного первичного эталона ГЭТ 1-2012 и перевозимых квантовых часов осуществлялось с помощью двух навигационных приемников Dicom GTR51, работающих по спутниковой системе ГЛОНАСС/GPS.

2. В эксперименте на первой точке получено искомое значение гравитационного эффекта: $\Delta\tau_{GR} = -(0,71 \pm 0,3)$ нс при расчетном значении «-0,95 нс». В эксперименте во второй точке искомое значение гравитационного эффекта смещения времени: $\Delta\tau_{GR} = +17,45 \pm 0,8$ нс при расчетном значении +16,97 нс. Найденная разность гравитационных потенциалов между точками стояния двух квантовых часов составила $(181,7 \pm 8,3) \cdot 10^2 \text{ м}^2 \text{ с}^{-2}$ при относительной ошибке не более 4,6 %.

Результаты измерения разности гравитационных потенциалов могут найти самые разные применения в гравиметрии и уже рассматриваются международным научным сообществом в рамках научного направления «Релятивистская геодезия» в качестве основы при создании мировой опорной системы высот.

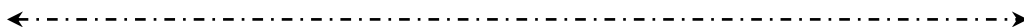
←----->

3. Метод релятивистской синхронизации состоит в вычислении и последующей компенсации релятивистских эффектов изменения шкалы времени транспортируемых часов вдоль трассы их движения на основе непрерывного измерения их текущих координат и скорости с помощью НАП ГНСС. Корректирующая временная поправка вносится в текущую шкалу времени мобильных часов как непрерывно на маршруте их перемещения, так и однократно в конце маршрута.

4. Экспериментальная проверка точности метода релятивистской синхронизации шкалы времени транспортируемого водородного стандарта частоты и времени Ч1-76А проводилась на маршруте движения ФГУП «ВНИИФТРИ» – Радиоастрономическая обсерватория (РАО) «Зеленчукская» при расстоянии между пунктами 1410 км.

На момент окончания движения транспортируемых часов по маршруту релятивистское расхождение шкалы времени, вычисленное по данным бортовой НАП ГЛОНАСС, составило +4,241 нс при ошибке синхронизации 1 пс. Верификация метода релятивистской синхронизации проводилась путем прямого измерения расхождения шкал стандартов частоты и времени (подвижного и стационарного) на концах маршрута с помощью специализированных приемников сигналов ГНСС GTR51. Вычисленное значение смещения шкал времени по методу релятивистской синхронизации находится внутри интервала неопределенности, полученного при синхронизации независимым методом.

5. На основе электродинамических уравнений для неинерциальных систем отсчета получены принципиально новые результаты: наблюдатель (измеритель), жестко скрепленный с вращающимся источником магнитного поля (например, постоянным магнитом) зафиксирует наведенное электрическое поле, величина которого зависит от скорости вращения. И наоборот, измеритель, жестко связанный с вращающимся заряженным конденсатором, зарегистрирует наведенное вращением магнитное поле. Описанные явления являются магнитостатическим и электростатическим аналогами известного эффекта Саньяка, зарегистрированного на электромагнитных волнах.



Заключение

В процессе исследований, проведенных на основе аппарата общей теории относительности, в монографии развиты методы релятивистской метрологии высокоточных измерительных средств, находящихся на Земле и в околоземном космосе, в том числе:

1) развита релятивистская метрология средств измерения времени и частоты, которые широко используются на Земле и в космосе в высокоточных системах хранения эталонного времени, в системах космической навигации, геодезии, связи, радиолокации и др. Развитие теории направлено на достижение строгости описания и высокой точности учета эффектов общей теории относительности, связанных с влиянием «тонкой» структуры неоднородного гравитационного поля Земли, с влиянием гравитационных полей Луны и Солнца, а также неравномерности вращения Земного шара. При этом для удобства расчетов предложен к использованию *гравитационный коэффициент преобразования шкал времени* в выбранной системе отсчета. Разработанный аппарат позволяет учесть релятивистские смещения частоты и времени в стандартах частоты и времени с относительной погрешностью 10^{-17} – 10^{-18} , что соответствует тенденциям развития этих прецизионных приборов;

2) развита оптическая модель гравитационного поля, включающая новый подраздел релятивистской электродинамики – электродинамику сплошных неинерциальных сред. При этом выведены основные электродинамические соотношения для изотропных и анизотропных проводящих и непроводящих сред, движущихся в гравитационном поле.

Такой подход позволяет описать гравитационное поле как единую преломляющую среду с обобщенным показателем преломления;

3) разработаны основные положения теории распространения электромагнитных волн во вращающихся земных системах отсчета (ITRS, WGS-84, ПЗ-90.11). При этом околоземное пространство с заполняющей сплошной средой-атмосферой представляется как преломляющая оптически плотная среда, которая характеризуется следующими показателями:

- *обобщенный показатель преломления околоземного пространства-времени;*
- *коэффициент гравитационного преобразования частоты;*
- *показатель вращения плоскости поляризации;*
- *гравитационный показатель рефракции.*

←----->

Введенные показатели позволяют произвести расчет релятивистских эффектов в наземных и космических измерительных системах навигации, геодезии, связи и радиолокации обычными радиотехническими методами, без привлечения специального аппарата общей теории относительности. Развитый аппарат позволяет учесть релятивистские эффекты с относительной погрешностью 10^{-17} – 10^{-18} ;

4) рассмотрены основные решения прикладной релятивистской метрологии, посвященной учету релятивистских эффектов в широко используемых наземно-космических высокоточных измерительных системах:

– в глобальных навигационных спутниковых системах ГЛОНАСС, GPS, GALILEO, BeiDou. При этом рассмотрены методы релятивистской синхронизации орбитальных часов, размещенных на борту навигационных спутников, методы межспутниковой синхронизации, а также релятивистские погрешности в измерительных навигационных радиолиниях;

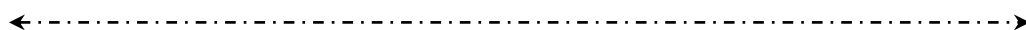
– в системах прецизионной синхронизации наземных и космических стандартов частоты и времени, использующих космические радиолинии, а также наземные волоконно-оптические линии связи;

– в наземных и космических спутниковых геодезических системах;

5) приведены результаты релятивистских экспериментов, проведенных группой исследователей ФГУП «ВНИИФТРИ» под руководством автора и посвященных измерению разности гравитационных потенциалов в поле Земли, проверке точности метода релятивистской синхронизации мобильных атомных часов.

Кроме того, предложены схемы экспериментов по обнаружению новых релятивистских гироскопических эффектов на постоянных магнитных и электростатических полях, а также в системах проводников с электрическим током. Эффекты являются гальваническими аналогами известного волнового эффекта Саньяка и следуют из разработанной в монографии электродинамики неинерциальных сред.

Материалы монографии восполняют известный пробел в отечественной научно-технической литературе, посвященной учету и использованию релятивистских явлений в высокоточных системах космической навигации, геодезии, синхронизации и связи.



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. – М.: Наука, 1967, 460 с.
2. Меллер К. Теория относительности (2-е изд.). – М.: Атомиздат, 1975, 400 с.
3. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. – М.: ГИФМЛ, 1961, 564 с.
4. Майкельсон А., Морли А.В. Движение Земли по отношению к движению светового эфира. – ЖРФХО, ч. физ., 1888, т. 20 5Б, с. 35–36.
5. Бонч-Бруевич А.М. Экспериментальная проверка независимости скорости света от скорости движения источника излучения относительно наблюдателя // ДАН СССР, 1956, т. 109, № 3, с. 481–484.
6. Hafele J., Keating R. Around-the-World Atomic Clocks: Predicted Relativistic Time Gains // Science, 1972, v. 177, p. 166–168.
7. Эйнштейн А. К электродинамике движущихся тел. – В кн.: Собрание научных трудов в 4-х томах / Под ред. И.Е. Тамма, Я.А. Смородинского, Б.Г. Кузнецова. – М.: Наука, 1955, т. 1, с. 15–25.
8. Минковский Г. Основные уравнения электромагнитных процессов в движущихся телах. – В кн.: Эйнштейновский сборник, 1978–1979. – М.: Наука, 1983, с. 5–63.
9. Логунов А.А. Лекции по теории относительности и гравитации: Современный анализ проблем физики, 3-е изд., доп. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985, 260 с.
10. Petit G. and Luzum B. (eds.) // IERS Conventions (2010), International Earth Rotation and Reference Systems Service Technical Note, No. 36, Frankfurt, Germany, 2010.
11. Recommendation ITU-R TF.2018 (08/2012) // Relativistic time transfer in the vicinity of Earth and in the solar system, 2012.
12. Soffel M. et. all. The IAU 2000 resolutions for astrometry, celestial mechanics and metrology in the relativistic framework: explanatory supplement // Astron. J., 2003, 126, 2687–2706.
13. Одуан К., Гино Б. Измерение времени. Основы GPS. – М.: Техносфера, 2002.
14. Braitore L., Leschintta S. Evidence for the Earth Gravitational Shift by Direct Atomic-Time-Scale Comparison. – Nuovo Cimento, 1967, 260 с.
15. Аллейн Ч., Катлер Л., Рейссе Р. и др. Изменения при помощи атомных часов общерелятивистских разностей времени при авиаполетах путем прямых сверок времени, а также телеметрических сверок, проводимых посредством лазерных импульсов. – В кн.: Альберт Эйнштейн и теория гравитации. – М.: Мир, 1979, с. 575.
16. Гравитационные эксперименты для измерения эффектов, предсказанных теорией относительности. – РКТ, 1983, № 40 (1249), с. 8–9.
17. Sullivan W. Einstein and clocks // Applied Optics, 1978, v. 17, No. 1, p. 5.
18. Гиенко Е.Г., Копейкин С.М., Канушин В.Ф. и др. Определение разностей высот по гравитационному смещению частоты мобильного стандарта // Метрология времени и пространства. Материалы VIII Международного симпозиума, 14–16 сентября 2016 г., г. Санкт-Петербург. – Менделеево: ФГУП «ВНИИФТРИ», 2016, с. 164–168.

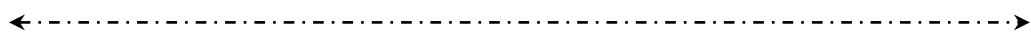
- ←----->
19. Фатеев В.Ф., Жариков А.И., Сысоев В.П., Рыбаков Е.А., Смирнов Ф.Р. Об измерении разности гравитационных потенциалов с помощью перевозимых квантовых часов // Доклады Академии наук, 2017, том 472, № 2, с 1–4.
 20. Фатеев В.Ф., Сысоев В.П., Рыбаков Е.А. Экспериментальное измерение гравитационного эффекта замедления времени с помощью перевозимых квантовых часов // Измерительная техника, 2016, № 4, с. 41-43.
Fateev V.F., Sysoev V.P., Rubakov E.A. Experimental Measurement of Gravitational Time Dilation Using Transportable Quantum Clocks // Measurement Techniques, 2016, 59 (4), 402–404.
 21. Kopeikin S.M. (et. all.). Chronometric Measurement of Orthometric Height Differences by Means of Atomic Clocks // Gravitation and Cosmology, 2016, Vol. 22, No. 3, p. 234–244.
 22. Рыбаков Е.А., Фатеев В.Ф., Жариков А.И., Сысоев В.П., Смирнов Ф.Р. Измерение разности гравитационных потенциалов и ортометрических высот двух разнесенных точек на поверхности Земли // Метрология времени и пространства. Материалы VIII Международного симпозиума, 14–16 сентября 2016 г., г. Санкт-Петербург. – Менделеево: ФГУП «ВНИИФТРИ», 2016, с. 189–192.
 23. Медведев Ю.Н., Смирнов Ю.Ф. Оценка релятивистских и гравитационных поправок при транспортировании перевозимых квантовых часов // Метрология времени пространства: Тр. 5-го Российского симпозиума по метрологии: ВНИИФТРИ, 1994, с. 42–343.
 24. Гайгеров В.А., Сысоев В.П. Учет релятивистских эффектов при сличении шкал времени с помощью перевозимых квантовых часов // Измерительная техника, 2012, № 2, с. 25–29.
Gaygerov V.A., Sysoev V.P. Relativistic effects in comparisons of time scales by means of transportable quantum clocks time and frequency measurements // Measurement Techniques, 2012, v. 55, N. 2, p. 143–150.
 25. Фатеев В.Ф., Рыбаков Е.А., Смирнов Ф.Р. Метод релятивистской синхронизации подвижных стандартов частоты и времени // Метрология времени и пространства. Материалы VIII Международного симпозиума, 14–16 сентября 2016 г., г. Санкт-Петербург. – Менделеево: ФГУП «ВНИИФТРИ», 2016, с. 215–217.
 26. Cranshaw T.E. Proceedings of the International School of Physics. Varenna, London, Academic Press, 1961, p. 208.
 27. Cranshaw T.E., Schiffer S.P., Whitehead A.N. Phys. Rev. Lett., 1960, Vol. 4, p. 163.
 28. Ashby N. Relativity in the Global Positioning System // Living Reviews in Relativity, 2003, v. 6, p. 1–42.
 29. Интерфейсный контрольный документ ГЛОНАСС, редакция 5.1, 2008.
 30. Интерфейсный контрольный документ ГЛОНАСС с кодовым разделением сигналов, редакция 1.0, 2016.
 31. GPS. Интерфейсный контрольный документ (ICD-200C-002, 25.09.97).

- ←----->
32. Larson K.M., Ashbe N., Hackman C., Bertiger W. An assessment of relativistic effect for low Earth orbiters: the GRACE satellites // *Metrologia*, 2007, V. 44, p. 484–490.
 33. Фатеев В.Ф. Релятивистская теория радионавигации и синхронизации. – Л.: ВКА им. А.Ф.Можайского, 1988, 200 с.
 34. Быков В.Е., Фатеев В.Ф. Исследование возможностей использования релятивистских эффектов для построения систем, предназначенных для измерения параметров движения объектов // Отчет о НИР № 58-У «Гравитон-1», Ростов-на-Дону, 1971, 120 с.
 35. Быков В.Е., Фатеев В.Ф. Способ контроля круговых экваториальных орбит ИСЗ // Авт. свид. на изобретение №370831 с приоритетом от 04.05.1970.
 36. Petit G. Future of interactions between time and frequency metrology and geodesy, 26th IUGG General assembly 2015, Prague.
 37. Mai E. Time, atomic clocks and relativistic geodesy. Deutsche Geodätische Kommission. Reihe A. Theoretische Geodäsie.
 38. Cacciapuoti L., Salomon C. Atomic Clock Ensemble in Space // *International Symposium on Physical Sciences in Space, Journal of Physics: Conference Series*, 2011, v. 327, p. 012049, doi:10.1088/1742-6596/327/1/012049.
 39. STE-QUEST A class M mission proposal for Cosmic Vision 2015-2025 [Электронный ресурс]. URL: <https://www.google.ru/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=2&sqi=2&ved=0ahUKEwivq5XDlbnPAhWnCJoKHb7tACoQFggkMAE&url=http%3A%2F%2Fsci.esa.int%2Fscience-e%2Fwww%2Fobject%2Fdoc.cfm%3Fobjectid%3D49307&usq=AFQjCNGK5Y7RTsmPJguJK1p1dUBOVirgaA&sig2=11INJYueF4f-JuBG-цSw&bvm=bv.134495766.d.bGs> (дата обращения – 01.11.2016).
 40. Донченко С.И., Блинов И.Ю., Гончаров А.С. и др. Эталонный комплекс времени и частоты // *Метрология времени и пространства. Материалы VIII Международного симпозиума, 14–16 сентября 2016 г., г. Санкт-Петербург. – Менделеево: ФГУП «ВНИИФТРИ», 2016, с. 100–101.*
 41. Балаев А.А., Демидов Н.А., Медведев С.Ю., Пастухов А.В. Сахаров Б.А., Блинов И.Ю. Аппаратура водородных хранителей эталонов времени и частоты // *Вестник метролога*, 2015, № 2, с. 14–23.
 42. Домнин Ю.С. и др. Цезиевый фонтан ВНИИФТРИ. Состояние и перспективы // *Измерительная техника*, № 3, 2007, с. 39–42.
 43. Домнин Ю.С., Барышев В.Н., Бойко А.И., Елкин Г.А., Новоселов А.В., Копылов Л.Н., Купалов Д.С. Цезиевые реперы частоты фонтанного типа МРЦ-Ф1 и МРЦ-Ф2 // *Мир измерений*, 2012, № 4, с. 30–34.
 44. Weyers S. Hubner U., Schroder R., Tamm Chr and Bauch A. 2001 Uncertainty evaluation of the atomic caesium fountain CSF1 of PTB *Metrologia*, 38, 343–52, and Weyers S., Bauch A. Schroder R. and Tamm Chr, 2001, The atomic caesium fountain CSF1 of PTB // *Proceedings of the 6th Symposium on frequency Standards and Metrology*, 2001, University of St Andrews, Fife, Scotland, ISBN 981-02-4911-X (World Scientific), 64–71.

- ←----->
45. Gerginov V., Nemitz N., Weyers S., Schroder R., Griebisch D. and Wynands R. Uncertainty evaluation of the caesium fountain clock PTB-CSF2 // *Metrologia*, 2010, 47, p. 67–79.
 46. Boyko A., Domnin. Yu., Koshelyevsky N., Sokolova O. Absolute frequency calibration of H-masers relative to primary Cs fountain standart // *Proc. of the 45nd Annual Precise Time and Time Interval (PTTI) Meeting*, 2013, p. 75–80.
 47. Скрыль А.С., Павленко К.Ю., Lorini L., Bize S., Stern G., Desruelle V. Особенности конструкции рубидиевого стандарта частоты фонтанного типа // *Метрология времени и пространства. Материалы VIII Международного симпозиума, 14–16 сентября 2016 г., г. Санкт-Петербург. – Менделеево: ФГУП «ВНИИФТРИ», 2016, с. 65–66.*
 48. Домнин Ю.С., Бойко А.И., Купалова О.В. Фонтан ВНИИФТРИ: Алгоритм обработки и результаты // *Метрология времени и пространства. Материалы VIII Международного симпозиума, 14–16 сентября 2016 г., г. Санкт-Петербург. – Менделеево: ФГУП «ВНИИФТРИ», 2016, с. 103–104.*
 49. Тайченачев А.В., Юдин В.И., Багаев С.Н. Сверхточные оптические стандарты частоты на ультрахолодных атомах // *Успехи физических наук*, 2016, т. 186, № 2, с. 193–205.
 50. Колачевский Н.Н. Лазерное охлаждение редкоземельных атомов и прецизионные измерения // *УФН*, 2011, т. 181, № 8, с. 896–903.
 51. Вишнякова Г.А., Головизин А.А., Колачевский Н.Н. и др. Ультрахолодные лантаноиды: от оптических часов до квантовых симуляторов // *УФН*, 2016, т. 186, № 2, с.177–182.
 52. Hinkley N. et al. An Atomic Clock with 10^{-18} Instability *Science* 341, 1215 (2013), DOI: 10.1126/science.1240420.
 53. Ludlow A. D., Boyd M. M., Ye J., Peik E. and Schmidt P. O. Optical atomic clocks // *Rev. Mod. Phys.*, v. 87, p. 637.
 54. Heavner T.P., Donley E.A., Levi F., Costanzo G., Parker T.E., Shirley J.H., Ashby N., Barlow S.E. and Jefferts S.R. First Accuracy Evaluation of NIST-F2 // *Metrologia*, 2014, 51, p. 174, doi:10.1088/0026-1394/51/3/174.
 55. Grebing C., Al-Masoudi A., Dörscher Sören, Häfner Sebastian, Gerginov Vladislav, Weyers Stefan, Lipphardt Burghard, Riehle Fritz, Sterr Uwe and Lisdat Christian. Realization of a timescale with an accurate optical lattice clock // 2016, Vol. 3, Issue 6, p. 563–569, <https://doi.org/10.1364/OPTICA.3.000563>.
 56. Chou C. W., et al. Optical Clocks and Relativity *Science*, 2010, 329, p. 1630, DOI: 10.1126/science.1192720.
 57. Bloom B.J., Nicholson T.L., Williams J.R. e.a. An optical lattice clock with accuracy and stability at the 10^{-18} level // *Nature*, 2014, v. 506, p. 71–75.
 58. Peil Steven, Hanssen James L., Swanson Thomas B., Taylor Jennifer and Ekstrom Christopher R. Cold-Atom Clock as Part of a Timing Ensemble/ *Proc. of the 45nd Annual Precise Time and Time Interval (PTTI) Meeting*, 2013, p. 304–305.

- ←----->
59. Бердасов О.И., Колачевский Н.Н., Пальчиков В.Г. и др. Оптические стандарты частоты на холодных атомах стронция // Альманах современной метрологии, 2014, № 1, с. 13–36.
 60. Чепуров С.В., Луговой А.А., Тайченачев А.В., Багаев С.Н. и др. Оптический стандарт частоты на основе одиночного иона иттербия // Метрология времени и пространства. Материалы VIII Международного симпозиума, 14–16 сентября 2016 г., г. Санкт-Петербург. – Менделеево: ФГУП «ВНИИФТРИ», 2016, с. 241–242.
 61. Poli N., Schioppo M., Vogt S., Falke St., Sterr U., Lisdat Ch., Tino G. M. A transportable strontium optical lattice clock // Appl. Phys. B, 2014, 117:1107–1116, DOI 10.1007/s00340-014-5932-9.
 62. Bongs K. et al. Development of a strontium optical lattice clock for the SOC mission on the ISS // Comptes Rendus Physique, 2015, 16, Issue 5, p. 553–564.
 63. Демидов Н.А., Беляев А.А., Сахаров Б.А. Перспективный бортовой водородный стандарт частоты космического применения // Метрология времени и пространства. Материалы VIII Международного симпозиума, 14–16 сентября 2016 г., г. Санкт-Петербург. – Менделеево: ФГУП «ВНИИФТРИ», 2016, с. 41.
 64. Федорин В.Л., Захарченко Ю.Г., Кононова Н.А. и др. Применение Мёссбауэровских переходов для стабилизации частоты лазеров // Метрология времени и пространства. Материалы VIII Международного симпозиума, 14–16 сентября 2016 г., г. Санкт-Петербург. – Менделеево: ФГУП «ВНИИФТРИ», 2016, с. 130–133.
 65. Величанский В.Л., Губин М.А. Лазерные стандарты частоты в ФИАН // УФН, 2009, т. 179, № 11, с. 1219–1224.
 66. Dushayne L., Mersier F., Wolf P. Orbit determination for next generation space clock // Astronomy and astrophysics, 2013, October 29, p. 1–12.
 67. Shapiro I.I. Fourth test of General Relativity // Physical Review Letters, 1964, v. 13, p. 789–790.
 68. Турышев В.Г. Экспериментальные проверки общей теории относительности: недавние успехи и будущие направления исследований // УФН, 2009, т. 179, № 1, с. 3–34.
 69. Шапиро И., Резинберг Р., МкНил Р. и др. Релятивистский эксперимент «Викинг». – В кн.: «Альберт Эйнштейн и теория гравитации». – М.: Наука, 1979, с. 572.
 70. Shapiro I.I., Counselman C.C., King R.W. Physical Review Letters, 1976, v. 36, p. 555.
 71. Williams J.G., Turyshev S.G., Boggs D.H. // Testing the Equivalence Principle on Ground and in Space, Italy, 2004, Sept., 20–23.
 72. Bertotti B., Iess L., Tortora P. // Nature, 2003, v. 425, p. 374.
 73. Sagnac G. Leiter Lumineux d'emontre par leffer du vent relative d'ether daus un interferomentre en rotation uniform // Comptes rendnes, 1913, v. 157, 708, p. 1410.

- ←----->
74. Малыкин Г.Б. Ранние исследования эффекта Саньяка // УФН, 1997, т. 167, № 3, с. 337–342.
 75. Андронова И.А., Малыкин Г.Б. Физические проблемы волоконной гироскопии на эффекте Саньяка // УФН, 2002, т. 172, № 8, с. 849–873.
 76. Бычков С.И., Лукьянов Д.П., Бакаляр А.И. Лазерный гироскоп. – М.: Сов. радио, 1975, 424 с.
 77. Федоров Б.Ф., Шереметьев Л.Г., Умников В.Н. Кольцевой оптический квантовый гироскоп. – М.: Машиностроение, 1973, 222 с.
 78. Leeb W.R., Schiffner G., Scheiterer E. Optical fiber gyroscopes: Sagnac of Fizean effect? // Appl. Opt., 1979, v.18. No. 9, p. 1293–1295.
 79. Фатеев В.Ф. Ускоренное воащение кольцевого интерферометра в гравитационном поле // Оптика и спектроскопия, 1981, т. 50, вып. 1, с. 30–36.
 80. Фатеев В.Ф. Влияние дисперсии световода на фазу волны в ускоренно вращающемся кольцевом интерферометре // Оптика и спектроскопия, 1983, т. 54, вып. 4, с. 697–700.
 81. Фатеев В.Ф. Волоконный гироскоп в гравитационном поле // Радиотехника и электроника, 1983, № 1, с. 164–167.
 82. Фатеев В.Ф. Влияние углового ускорения на параметры волоконного гироскопа с фазовой компенсацией // Радиотехника, 1983, № 9, с. 73–75.
 83. Campbell C. J., Radnaev A. G., Kuzmich A., Dzuba V. A., Flambaum V. V. and Derevianko A. Single-Ion Nuclear Clock for Metrology at the 19th Decimal Place // arXiv:1110.2490v1 [physics.atom-ph], 11 Oct., 2011.
 84. Gustavson T.L. et. all. Precision Rotation Measurements with an Atom Interferometer Gyroscope // Phys. Rev. Lett., 1997, Vol. 78., No. 11, p. 2046–2049.
 85. Riehle F., Kisters T., Witte A., Helmcke J., Borde C.J. Optical Ramsey Spectroscopy in a Rotating Frame: Sagnac Effect in a Matter-Wave Inteferometer // Phys. Rev. Lett., 1991, Vol. 67, No. 2, p. 177–180.
 86. Long-Term Stability of an Area-Reversible Atom-Interferometer Sagnac Gyroscope / D. S. Durfee [et al] // Phys. Rev. Lett, 2006, vol. 97, No. 24, 240801 [4 p].
 87. Кробка Н.И. Сравнительный анализ состояния теоретических и экспериментальных работ в мире по созданию гироскопов на обобщенном эффекте Саньяка: на интерферометрах волн де Бройля, сверхтекучести гелия и конденсатах Бозе-Эйнштейна // Гироскопия и навигация, 2010, № 4 (71), с. 75.
 88. Фатеев В.Ф. Гироскопический эффект в системе кольцевых проводников с электрическим током // Письма в ЖТФ, 1989, т. 15, вып. 15, с. 72–75.
 89. Фатеев В.Ф. Гироскопические эффекты в статистических магнитных и электрических полях // Письма в ЖТФ, 1990, т. 16, вып. 1, с. 91–94.
 90. Guinot B. Application of General Relativity to Metrology // Metrologia, 1997, v. 34, p. 261.
 91. Lusanna L. Canonical Gravity and Relativistic Metrology: from Clock Synchronization to Dark Matter as a Relativistic Effect, 2011 (arXiv 1108.3224).



92. Lusanna L. Relativistic Metrology: From Earth to Astrophysics// Modern Metrology Concerns, Italy, p. 395–416, www.intechopen.com.
93. Flury J. Relativistic geodesy // 8th Symposium on Frequency Standards and Metrology-2015, Journal of Physics: Conference Series, 2016, v. 723, p. 012051.
94. Shen W., Ning J., Liu J., Li J., Chao D. Determination of the geopotential and orthometric height based on shift equation // Natural Science, 2011, vol. 3, No. 5, p. 388–396.
95. Безменов И.В., Блинов И.Ю. Теоретические основы построения моделей для описания современных шкал времени и стандартов частоты. Монография. – Менделеево: ФГУП «ВНИИФТРИ», 2015, 529 с.
96. Ovchinnikov Y. and Marra G. Accurate rubidium atomic fountain frequency standard // Metrologia, 2011, v. 48, p. 87–100.
97. Руденко В.Н. Релятивистские эксперименты в гравитационном поле // УФН, 1960, т. 72, вып. 4, с. 673–676.
98. Паунд Р.В. О весе фотонов // УФН, 1960, т. 72, вып. 4, с. 673–676.
99. Pound R.V., Snider J.R. Effect of gravity on gamma radiation // Physical Review, 1965, v. 140B, p. 788.
100. Katila T., Riski K.J. Measurement of the interaction between electromagnetic radiation and gravitation field using Zn^{67} Mossbauer spectroscopy // Physical Review Letters, 1981, V. 83A, p. 51–54.
101. Bommel H.E. Measurement of the frequency shift of gamma rays in accelerated system using the Mossbauer effect // The Mossbauer effect. – N.-Y., 1961.
102. Vessot R.F.C., Levine M.W., Mattison E.M. et al. Test of relativistic gravitation with space-borne hydrogen maser // Physical Review Letters, 1980, v. 45, p. 2081–2084.
103. Biriukov A.V., Kauts V.L., Kulagi V.V., Litvino D.A., Rudenko V.N. Gravitational Redshift Test with the Space Radio Telescope "RadioAstron" // Astronomy Reports, 2014, vol. 58, No. 11, p. 783–795.
104. Белоусов К.Г., Бирюков А.В., Гусев А.В. и др. Прецизионные методы измерения релятивистских гравитационных эффектов в экспериментах с бортовыми атомными стандартами частоты и времени // В сб. тезисов докладов конференции «Координатно-временное и навигационное обеспечение-2015 (КВНО-2015), 20–24 апреля 2015 г. – Санкт-Петербург: Изд. ИПА РАН, 2015, с. 25.
105. Robertson D.S., Carter W.E. Nature, 1984, v. 310, p. 572.
106. Shapiro S.S. et al. Physics Review Letters, 2004, v. 92, p. 121101.
107. Gundlach J. H. et. al. Laboratory Test of Newton's Second Law for Small Accelerations Phys // Rev. Lett. , 13 April 2007, v. 98, 150801.
108. Adelberger E. G. New tests of Einstein's equivalence principle and Newton's inverse-square law // Classical and Quantum Gravity, 2001, Vol. 18, No. 13.

- ←----->
109. Adelberger E.G., Heckel B.R. and Nelson A.E. Tests of the gravitational inverse-square law // *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 2003, Vol. 53, p.77–121, DOI: 10.1146/annurev.nucl.53.041002.110503.
 110. Touboul P., Rodrigues M. The MICROSCOPE space mission // *Classical and Quantum Gravity*, Vol. 18, No. 13, 2001.
 111. Reigber C., Schwintzer P., and Luhr P. The CHAMP geopotential mission // *Bollettino di Geofisica Teorica ed Applicata*, 1999, Vol. 40, No. 3–4, p. 285–289.
 112. Tapley B.D., Bettadpur S., Watkins M. and Reiber C. The gravity recovery and climate experiment (GRACE): Mission overview and early results // *Geophysical Research Letters*, 2004, Vol. 31.
 113. Fehringer M., Andre G., Lamarre D., and Maesli D. A Jewel in ESA's Crown: GOCE and its Gravity Measurements Systems // *ESA bulletin*, 2008, Vol. B133, p. 14–23.
 114. Turyshev S.G. et al. Space-based research in fundamental physics and quantum technologies // *International Journal of Modern Physics D*, December 2007, Vol. 16, No. 12a, p. 1879–1925.
 115. Kasevich M.A., Maleki L. Quantum interferometer test of equivalence principle // <http://horology.jpl.nasa.gov/quantum/pub/QuITESingleposter2.pdf>.
 116. Nyman R.A., Varoquaux G.F., Lienhart D., Chambon S., Boussen J.-F., Clément T., Müller G., Santarelli F., Pereira Dos Santos A., Clairon A., Bresson A., Landragin P., Bouyer. I.C.E. A transportable atomic inertial sensor for test in microgravity // *Applied Physics B*, September 2006, Vol. 84, Issue 4, p. 673–681.
 117. Nobili Anna m., Comandi Gian Luca, Doravari Suresh, Maccarrone Francesco, Bramanti Donato, and Polacco Erseo. Experimental validation of a high accuracy test of the equivalence principle with the small satellite "GALILEO GALILEI"// *International Journal of Modern Physics D*, December 2007, Vol. 16, No. 12a, p. 2259–2270.
 118. Mester J., Torii R., Worden P., Lockerbie N., Vitale S. and Everitt C W F. The STEP mission: principles and baseline design // *Classical and Quantum Gravity*, 2001, Vol. 18, No. 13.
 119. Worden P., Mester J., Torii R. STEP error model development // *Classical and Quantum Gravity*, 2001, Vol. 18, No. 13.
 120. Пустовойт В.И. О непосредственном обнаружении гравитационных волн // *УФН*, 2016, т. 186, № 10, с. 1–20.
 121. Герценштейн М.Е., Пустовойт В.И. К вопросу об обнаружении гравитационных волн малых частот // *ЖЭТФ*, 1962, т. 43, вып. 2(8), с. 605–607.
 122. Flaminio R et al. The gravitational wave detector VIRGO // http://icfa-nanobeam.web.cern.ch/icfa-nano beam/paper/Flaminio_Virgo.pdf.
 123. Vitale S, Zanolin M. Application of asymptotic expansions for maximum likelihood estimators' errors to gravitational waves from inspiraling binary systems: The network case // *Phys. Rev. D*, 2011, Vol. 84, p. 104020, Published 8 November .

- ←----->
124. Luck H. et al. Status of the GEO600 detector // *Classical and Quantum Gravity*, 2006, Vol. 23, No. 8.
 125. Winkler Wet al. The GEO 600 core optics // *Optics Communications*, 2007, v. 280, Issue 2, 15 December, p. 492–499.
 126. Kuroda K. Ground-based gravitational-wave detectors // *International Journal of Modern Physics D*, December 2015, v. 24, Issue 14.
 127. Whitcomb, Stanley E. Ground-based gravitational-wave detection: now and future // *Classical and Quantum Gravity*, 25 (11). Art. No. 114013.
 128. Aso Y. et all. Interferometer design of the KAGRA gravitational wave detector // *Phys. Rev. D*, 20 August 2013, Vol. 88, p. 043007.
 129. National Astronomical Observatory of Japan, 2014, No. 247, http://www.nao.ac.jp/contents/naoj-news/data/nao_news_0247.pdf.
 130. Amaro-Seane P et al. Einstein Telescope Design Study: Vision Document, http://staff.ustc.edu.cn/~wzhao7/c_index_files/main.files/ET.pdf.
 131. Publications of AEI Potsdam and AEI Hannover, <http://www.aei.mpg.de/10388/MPI%20for%20Gravitational%20Physics>; 7th ET Symposium, <http://www.et-gw.eu/7et>.
 132. Vitale S. Space-borne gravitational wave observatories // *General relativity and gravitation*, 2014, v. 46, DOI: 10.1007/s10714-014-1730-2.
 133. Racca Giuseppe D., McNamara Paul W. The LISA Pathfinder Mission, Tracing Einstein's Geodesics in Space // *Space Science Reviews*, March 2010, Vol. 151, No 1–3, p. 159–181, DOI: 10.1007/s11214-009-9602-x.
 134. Kolkowitz S. et. al. Gravitational wave detection with optical lattice atomic clocks // <http://arXiv:1606.01859v1> [physics.atom-ph], 6 Jun 2016.
 135. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала векторного анализа. – М.: Изд-во АН СССР, изд. седьмое, 1951, 427 с.
 136. Soffel M.H., Klioner S.A., Petit G., Wolf P., Kopeikin S.M., Bretagnon P., Brumberg V.A., Capitaine N., Damour T., Fukushima T., Guinot B., Huang T., Lindgren L., Ma C., Nordtvedt K., Ries J., Seidelmann P.K., Vokroulicky D., Will C.M. and Xu Ch. The IAU 2000 Resolutions for Astrometry, Celestial Mechanics and Metrology in the Relativistic Framework: Explanatory Supplement *Astron. J.*, 2003, v. 126, p. 2687–2706, (arXivastro-ph/0303376).
 137. A IAU Resolutions Adopted at the XXIVth General Assembly IERS (2010) IERS Technical Note .
 - Resolution B1.1: Maintenance and Establishment of Reference Frames and Systems;
 - Resolution B1.2: Hipparcos Celestial Reference Frame;
 - Resolution B1.3: Definition of Barycentric Celestial Reference System and Geocentric Celestial Reference System
 - Resolution B1.4: Post-Newtonian Potential Coefficients;
 - Resolution B1.5: Extended Relativistic Framework for Time Transformations and Realization of Coordinate Times in the Solar System;

- Resolution B1.6: IAU 2000 Precession-Nutation Model;
Resolution B1.7: Definition of Celestial Intermediate Pole
Resolution B1.8: Definition and use of Celestial and Terrestrial Ephemeris Origin;
Resolution B1.9: Re-definition of Terrestrial Time TT;
Resolution B2: Coordinated Universal Time.
138. Брумберг В.А. Релятивистская небесная механика: Изд-во «Наука», 1972, 382 с.
 139. Kopeikin S., Efroimsky M., Kaplan G. Relativistic celestial mechanics of the solar system . WILEY-VCH, 2011.
 140. Brumberg, V.A. and Kopeikin S.M. In: Reference Frames in Astronomy and Geophysics, Eds. J. Kovalevsky, I.I. Mueller and B. Kolaczek, Astrophys. Space Sci. Library, 1989, Vol. 154, p. 115–141 .
 141. Копейкин С.М. Релятивистские системы отсчета в солнечной системе // *Астрономический журнал*, 1989, т. 66, вып. 5, с. 1069–1080.
 142. Kovalevsky, J., Kolaczek, B. & Mueller, I.I. Reference Frames in Astronomy and Geophysics (Kluwer: Dordrecht, 1989).
 143. Грушинский Н. П. Теория фигуры Земли. – М.: Наука, 1976.
 144. Pavlis N.K. e. a. The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008) // *J. Geophys. Res.* , 2012, Vol. 117, B04406.
 145. Огородова Л.В., Шимбирев Б.П., Юзефович А.П. Гравиметрия. – М.: «Недра», 1978, 325 с.
 146. Мельхиор П.. Земные приливы / Пер. с английского под ред. Н.Н. Парийского. – М.: Изд. «Мир», 1968, 482 с.
 147. Абалакин В.К., Аксенов Е.П. и др. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. – М.: Наука, 1971, 584 с.
 148. McCarthy D.D. International Earth Rotation Service. – Paris, IERS conventions, 1996, 95 p.
 149. McCarthy D., Petit G. (eds.). IERS Conventions. 2003. IERS Technical Note 32, 2004, p. 12.
 150. WGS World Geodetic System website of the National Geospatial-Intelligence Agency NGA, 1984 (<http://www1.nga.mil/ProductsServices/GeodesyGeophysics/WorldGeodeticSystem/Pages/default.aspx>).
 151. WGS "World Geodetic System website of the NGA (archived April 2012)" [электронный ресурс]: URL: <https://web.archive.org/web/20120402143802/https://www1.nga.mil/ProductsServices/GeodesyandGeophysics/WorldGeodeticSystem/Pages/default.aspx>.
 152. Параметры Земли 1990 года. (ПЗ-90.11). Справочный документ. Военно-топографическое управление Генерального штаба Вооруженных сил Российской Федерации, 2014, 52 с.

- ←----->
153. Фатеев В.Ф., Копейкин С.М., Пасынок С.Л. Влияние неравномерности вращения Земли на релятивистские смещения частоты и времени наземных атомных часов // Измерительная техника, 2015, № 6, с. 41–45.
Fateev V.F., Kopeikin S.M. and Pasyonok S.L. Effect of irregularities in the earth's rotation on relativistic shifts in frequency and time of earthbound atomic clocks // Measurement techniques, Vol. 58, No. 6, September, 2015.
 154. Всемирное время и координаты полюса. Бюллетень «Е» ГСВЧ, № 153–156, с. 6.
 155. Садовников М.А., Федотов А.А., Шаргородский В.Д. Высокоточная односторонняя дальнометрия: состояние и перспективы применения в ГЛОНАСС // Материалы 4й Всероссийской конференции «Фундаментальное и прикладное координатно-временное и навигационное обеспечение (КВНО-2011), С.-Петербург, 10–14 окт., 2011 г. // В кн. «Труды ИПА РАН», вып. 23, 2012, с. 61–69.
 156. Основы теории полета космических аппаратов / Под ред. Г.С. Нариманова и М.К. Тихонравова. – М.: Изд. «Машиностроение», 1972, 608 с.
 157. Фатеев В.Ф., Сысоев В.П. Релятивистские эффекты в мобильных часах // Измерительная техника, 2014, № 8, с. 31–35.
Fateev V.F., Sysoev V.P. Relativistic Effects on Moving Clocks // Measurement Techniques, November 2014, Vol. 57, Issue 8, p. 891–897.
 158. ГОСТ 8.567-99. Измерение времени и частоты. Термины и определения.
 159. Резолюция № 1 Международной ассоциации геодезии «Об определении и реализации международной опорной системе высот» (Prague, Czech Republic 2015), http://iag.dgfi.tum.de/fileadmin/IAG-docs/IAG_Resolutions_2015.pdf.
 160. Борисова Л.Б., Бронников К.А., Мельников В.Н. Учет гравитационно-релятивистских эффектов при ведении единой шкалы времени на Земле и в околоземном пространстве // Измерительная техника, 1988, № 5, с. 31–33.
 161. Petit G. A timescale based on the world's fountain clock / Proc. of the 45nd Annual Precise Time and Time Interval (PTTI) Meeting, 2013, p. 265–268.
 162. Wolf P. Relativity and the metrology of time. Monographie 97/1, Bureau International des Poids et Mesures, Pavillon de Breteuil, F-92312, Sevres Cedex, 1997.
 163. Wolf P. and Petit G. Relativistic theory for clock synchronization and realization of coordinate times // Astron. Astrophys., 1995, Vol. 304, 653–61.
 164. Guinot B. // Astron. Astrophys, 1988, Vol. 192, p. 370.
 165. Petit G. and Wolf P. Relativistic theory for time comparisons: a review // Metrologia, 2005, Vol. 42, S138–S144.
 166. Petit G. and Wolf P. Computation of the relativistic rate shift of frequency standard // IEEE Trans. Instrum. Meas., 1997, Vol. 46, 201–4.
 167. Petit G. and Wolf P. Relativistic theory for picosecond time transfer in the vicinity of the Earth // Astron. Astrophys., 1994, Vol. 286, p. 971–977.

- ←----->
168. Shen W.B., Ning J.S., Liu J.N. and Chao D.B. A proposal on the test of general relativity by clock transportation experiments. *Advances in Space Research*, 2009, Vol. 43, p. 164–166, doi:10.1016/j.asr.2008.04.001.
 169. Lisda C. and Schmidt P. O. Transportable optical clocks for relativistic geodesy // Leibniz Universität Hannover, Project SFB 1128, Research Area A03, 2016; <http://www.geoq.uni-hannover.de/a03.html>. Cited February 21, 2016.
 170. Борисова Л.Б., Мельников В.Н. Релятивистские поправки в показаниях транспортируемых эталонов времени // *Измерительная техника*, 1988, № 4, с. 13–15.
Borisova L.B., Mel'nikov V.N. Relativistic corrections to readings from a portable clock // *Measurement Techniques*, 1988, Vol. 31, No. 4, p. 323–327.
 171. Фатеев В.Ф., Рыбаков Е.А., Смирнов Ф.Р. Метод релятивистской синхронизации подвижных стандартов частоты и времени // *Метрология времени и пространства. Материалы VIII Международного симпозиума*, 14–16 сентября 2016 г., г. Санкт-Петербург, 2016, с. 215–218.
 172. Shen W.B., Chao D. and Jin B. On the relativistic geoid. *Bollettino di Geodesia e Scienze Affini*, 1993, Vol. 52, 207–216.
 173. Shen W.B. and Ning J. The application of GPS technique in determining the Earth's potential field. *Journal of GPS*, 2005, Vol. 4, p. 268–276, doi:10.5081/jgps.4.1.268.
 174. Shen W.B., Ning J. and Chao D. *Relativity and relativistic gravimetry*. Wuhan University Press, Wuhan, 2008.
 175. Shen W.B., Ning J.S., Li J.C., Liu J.N. and Chao D.B. The concept of direct orthometric height determination based on frequency shift equation. *International Conference on Earth Observation Data Processing and Analysis*, Wuhan, 29 December 2008, p. 1–8.
 176. Moritz H. *Molodensky's theory and GPS*. Mitteil. Geod. Graz, Technology University, Graz, 2000.
 177. Shen W.B. On the separability of gravitation and inertia according to general relativity, Dissertation, Graz Technical University, Graz, 1996.
 178. Shen W.B. *Relativistic physical geodesy*, Graz Technical University, Graz, 1998.
 179. Soffel M.H. *Relativity in astrometry, celestial mechanics and geodesy*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
 180. Soffel M.H., Herold H., Ruder H. and Schneider M. Relativistic geodesy: The concept of asymptotically fixed reference frames. *Manu. Geod.*, 1988, Vol. 13, p. 139–142.
 181. Soffel, M.H., Herold, H., Ruder, H. and Schneider, M. Relativistic theory of gravimetric measurements and definition of the geoid. *Manu. Geod.*, 1988, Vol. 13, 143–146.
 182. Bjerhammar A. *Relativistic geodesy*. NOAA Technical Report NOS, 1986, Vol. 118, NGS 36, Rockville.

- ←----->
183. Shen W.B., Chao D. and Jin B. The concept and application of the equi-frequency geoid // *Journal of Wuhan Technical University*, 1994, V. 19, p. 232–238.
 184. Shen W.B., Ning J., Li J. and Chao D. On the relativistic geopotential and relativistic geoid // *Journal of Wuhan University (Information Science)*, 2004, Vol. 29, p. 897–900.
 185. Grafarend E.W. What is a geoid? In: Vanicek P., Christou N.T. Eds., *Geoid and Its Geophysical Interpretations*, CRC Press, London, 1994.
 186. Brumberg V.A. and Groten E. On determination of height by using terrestrial clocks and GPS signals // *Journal of Geodesy*, 2002, Vol. 76, p. 49–54, doi:10.1007/s001900100219.
 187. Kopeikin S., Masurova E., Karpik A. Towards exact relativistic theory of Earth's geoid undulation // *Physics Letters A*, 2015, p. 1–14.
 188. Bjerhammar A. On a relativistic geodesy. *Bulletin Geodesique*, 1985, Vol. 59, 207–220, doi:10.1007/BF02520327.
 189. Пасынков В.В. Роль, место и перспективы развития опорных узлов колокации в интересах фундаментального КВО и прикладного КВНО // *Материалы 5й Всероссийской конференции «Фундаментальное и прикладное координатно-временное обеспечение (КВНО-2013), 15–19 апреля 2013 г., с. 13–15.*
 190. Kouba J. Improved relativistic transformations in GPS // *GPS Solutions*, 2004, Vol. 8, p. 170–180.
 191. Микрин Е.А. и др. Высокоточный прогноз орбит космических аппаратов, анализ влияния различных возмущающих факторов на движение низкоорбитальных и высокоорбитальных КА // *Материалы XXI Санкт-Петербургской Международной конференции по интегрированным навигационным системам, ГНЦ АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2014, с. 77–78.*
 192. Sagnac G. *Leiter Lumineux d'emontre par leffer du vent relative d'ether daus un interferomentre en rotation uniform.* *Comptes rendnes*, 1913, Vol. 157, No. 708, p. 1410.
 193. Harress F. Jena, 1911 (unpublished).
 194. Harzer P. *Astron. Nachr.*, 1914, B.199, p. 10.
 195. Эйнштейн А. Замечания к статье П. Гарцера «Увлечение света в стекле и абerrация». – В. кн.: *Собрание научных трудов в 4-х томах / Под ред. И.Е. Тамма, Я.А. Смородинского, Б.Г. Кузнецова.* – М.: Наука, 1965, т. 1, с. 313–316.
 196. Pogany B. *Uber die Wiederholung des Harress – Sagnacschen Versuches.* – *Annalen der Physik*, 1926, B.80, p. 217–231; *Uber die Wiederholung des Harressschen.* – *Annalen der Physik*, 1928, B.85, p. 244–256.
 197. Берштейн И.Л. Опыт Саньяка на радиоволнах // *ДАН СССР*, 1950, т. 75, с. 635–639.
 198. Zeeman P.I. Fresnel's coefficient for light of different colours // *Proc. Kon. nederl. acad. wet.* B, 1914–1915, B. 17, p. 445–451; B.18, 398–408.

199. Heer C.V. Resonant Frequencies of an Electromagnetic cavity in an Accelerated System of Reference // *Phys. Rev.*, 1964, Vol. 134, N4A, p. 799–804.
200. Хромых А.М. Кольцевой генератор во вращающейся системе отсчета // *ЖЭТФ*, 1966, т. 50, вып. 5, с. 281–282.
201. Kuriyagawa A., Mori S. Ring laser and ring interferometer in accelerated system // *Phys. Rev. D.*, 1979, v. 20, No. 6, p. 1290–1293.
202. Тамм И.Е., Манделъштам Л.И. Электродинамика анизотропных сред в специальной теории относительности. – В кн.: Полное собрание трудов Л.И. Манделъштама: Изд-во АН СССР, 1948, т. 1, с. 273–279.
203. Шпак И.В., Соломин А.В. Влияние показателя преломления среды на расщепление собственных частот вращающегося кольцевого резонатора // *Оптика и спектроскопия*, 1979, т. 46, вып. 2, с. 133–139.
204. Беленов Э.М., Маркин Е.П. Смещение частоты света в ускоренно вращающемся кольцевом лазере // *Письма в ЖЭТФ*, 1986, т. 7, вып. 12.
205. Ковалев А.С., Ларионцев Е.Г. К вопросу о смещении частоты в ускоренно вращающемся кольцевом резонаторе // *Изв. вузов: Радиофизика*, 1975, т. 13, № 5.
206. Nakahashi T., Bielein R. Accelerated ring laser // *Phys. Rev. A.: Gen. Phys.*, 1977, Vol. 15, No. 2, p. 732–734.
207. Привалов В.Е., Филатов Ю.В. Исследование выходной характеристики вращающегося кольцевого газового лазера // *Квантовая электроника*, 1977, т. 4, № 7, с. 1442.
208. Волков А.М., Киселев В.А. Вращающийся кольцевой резонатор с взаимным элементом // *Оптика и спектроскопия*, 1970, т. 29, вып. 2, с. 365–370.
209. Тамм И.Е. Основы теории электричества. – М.: Наука, 1976, 616 с.
210. Rontgen W.C. Über die durch Bewegung eines im homogen elektrischen Felde befindlichen Dielektrikums hervorgerufene elektrodynamische Kraft. *Ann. der. Physik*, 1888, B.35, p. 264–270.
211. Eichenwald A. Über die magnetischen Wirkungen bewegter Körper in elektrostatischen Felde // *Ann. der Physik*, 1903.
212. Wilson H.A. On the electric effect of rotating a dielectric in a magnetic field, *Phil. Trans (C.A.)*, 1904, B.204, p.121.
213. Болотовский Б.М., Столяров С.Н. Современное состояние электродинамики движущихся сред (безграничные среды). – В кн.: Эйнштейновский сборник, 1974. – М.: Наука, 1976, с. 179–277.
214. Коростелев А.А., Фатеев В.Ф. Электродинамика движущихся сред в неинерциальных системах отсчета применительно к процессам в кольцевом резонаторе // *Оптика и спектроскопия*, 1978, т. 45, вып. 1, с. 132–139.
215. Зоммерфельд А. Электродинамика. – М.: Изд-во иностр. лит., 1958, 502 с.
216. Поль В.В. Учение об электричестве. – М.: Физматгиз, 1962, 516 с.
217. Угаров В.А. Специальная теория относительности. – М.: Наука, 1977, 384 с.
218. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. В 3-х томах. – М.: Мир, 1977.

- ←----->
219. Синг Дж. Общая теория относительности. – М.: Изд-во иностр. лит, 1963, 432 с.
 220. Пановский В., Филипс М. Классическая электродинамика. Пер. с англ. / Под ред. С.П.Капицы. – М.: ГИФМЛ, 1963, 432 с.
 221. Паули В. Теория относительности. – М.: Наука, 1983, 336 с.
 222. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. – М.: Наука, 1980, 304 с.
 223. Рытов С.М. О переходе от волновой к геометрической оптике // ДАН СССР, 1938, т. 18, № 4–5, с. 263–266.
 224. Рытов С.М. О переходе от волновой к геометрической оптике // ДАН СССР, 1938, т. 18, № 4–5, с. 263–266.
 225. Скроцкий Г.В. О влиянии силы тяжести на распространение света // ДАН СССР. 1957, т. 114, № 1, с. 73–76.
 226. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1983, 620 с.
 227. Черный Ф.Б. Распространение радиоволн. – М.: Сов. радио, 1972, 464 с.
 228. Столяров С.Н. Отражение и преломление электромагнитных волн на движущихся границах раздела двух сред // ЖТФ, 1963, т. 33, № 5, с. 565–570.
 229. Фатеев В.Ф. Преломляющие свойства гравитационной сферы Земли во вращающихся системах отсчета // Электромагнитные волны и электронные системы, 2013, т. 18, № 5, с. 73–82.
 230. Фатеев В.Ф. Релятивистские параметры радиоволн в Земной вращающейся системе отсчета ITRS // В сб. тезисов докладов бй Всероссийской конференции «Фундаментальное и прикладное координатно-временное и навигационное обеспечение» (КВНО-2015), Санкт-Петербург, 20–24 апреля 2015 г.
 231. Фатеев В.Ф. Представление пространства-времени в системе ITRS в виде интегральной оптически плотной преломляющей среды // Тезисы доклада на втором Международном симпозиуме «Азиатско-Тихоокеанская космическая геодинамика APSG-2015», Москва, 25–28 августа 2015 г.
 232. Фатеев В.Ф. Обобщенный показатель преломления околоземного пространства во вращающейся земной системе отсчета ITRS // Альманах современной метрологии, 2015, № 2, с. 180–197.
 233. Фатеев В.Ф. Обобщенный показатель преломления околоземного пространства во вращающейся земной системе отсчета ITRS // Альманах современной метрологии, 2015, № 2, с. 180–197.
 234. Фатеев В.Ф. Гравитационные и релятивистские эффекты в односторонней околоземной космической радиолинии // Электромагнитные волны и электронные системы, 2013, т. 18, № 5, с. 83–93.
 235. Групповой водородный стандарт частоты Ч0-111, руководство по эксплуатации, 2012 г.
 236. Требования ТТЗ на КНС-ФШВ, шифр «ГЛОНАСС-КК-Н», 2016 г.

- ←----->
237. Информационно-аналитический центр контроля ГЛОНАСС и GPS [электронный ресурс]: URL: <https://www.glonass-iac.ru/guide/> (дата обращения – 16.12.2016 г.)
 238. Necimovic Z. Relativistic effects on satellite navigation // Tehnicki vjesnic, 2013, Vol. 20, 1, 195–203.
 239. Steigenberger P. et. al. Orbit and clock analysis of Compass GEO and IGSO satellites // J. Geod., 2013, 87, p. 515–525.
 240. Барышников М.В., Садовников М.А., Шаргородский В.Д. Концепция применения спутниковой лазерной дальнометрии в задаче повышения точности ГЛОНАСС // Мир измерений, 2014, № 8, с. 11–15.
 241. Klioner S.A. and Fukushima T. Relativistic effects in two-way time transfer via artificial satellite using laser techniques Manuscripta Geodaetica 19 294-9 (1994).
 242. Kirchner D. Two-way satellite time and frequency transfer (TWSTFT): Principle, implementation, and current performance. In W. Ross Stone, editor, Review of Radio Science 1996–1999, p. 27–44, Oxford, New York, Oxford University Press, 1999.
 243. Блинов И.Ю., Наумов А.В., Смирнов Ю.Ф. Результаты калибровки канала дуплексных сравнений шкал времени TWSTFT между ФГУП «ВНИИФТРИ» и РТВ / Материалы 7-го Международного симпозиума «Метрология времени и пространства», 17–19 сентября 2014. – Менделеево: ФГУП «ВНИИФТРИ», с. 125–126.
 244. Чихачев Б.М. Способ измерения гравитационного сдвига частоты радиоволн в опыте с искусственным спутником Земли // Труды ФИАН, 1967, т. 39, с. 189–198.
 245. Droste S., Ozimek F., Udem Th., Predehl K., Hänsch T. W., Schnatz H., Grosche G. and Holzwarth R. Optical-Frequency Transfer over a Single-Span 1840 km Fiber Link // Phys.Rev. Lett., 111, 110801 DOI:<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.111.110801>.
 246. Колмогоров О.В., Прохоров Д.В., Донченко С.С., Щипунов А.Н. Система встречных сравнений шкал времени // Метрология времени и пространства. Материалы VIII Международного симпозиума, 14–16 сентября 2016 г., г. Санкт-Петербург. – Менделеево: ФГУП «ВНИИФТРИ», 2016, с. 222–227.
 247. Донченко С.С., Колмогоров О.В., Прохоров Д.В. Результаты экспериментальных исследований системы одно- и двухсторонних сравнений шкал времени // Метрология времени и пространства. Материалы VIII Международного симпозиума, 14–16 сентября 2016 г., г. Санкт-Петербург. – Менделеево: ФГУП «ВНИИФТРИ», 2016, с. 228–230.
 248. Наумов А.В., Балаев Р.И., Курчанов А.Ф., Малимон А.Н. Передача эталонных сигналов времени и частоты по 200-километровой волоконной линии с оптическими EDFA усилителями // Метрология времени и пространства. Материалы VIII Международного симпозиума, 14–16 сентября 2016 г., г. Санкт-Петербург. – Менделеево: ФГУП «ВНИИФТРИ», 2016, с. 129.

- ←----->
249. Хабарова К.Ю., Вишнякова Г.А., Кудяров К.В., Колачевский Н.Н. Передача сигналов частоты по оптоволоконным линиям связи с использованием фазы несущей // Метрология времени и пространства. Материалы VIII Международного симпозиума, 14–16 сентября 2016 г., г. Санкт-Петербург. – Менделеево: ФГУП «ВНИИФТРИ», 2016, с. 69–70.
 250. Федорова Д.М., Балаев Р.И., Курчанов А.Ф., Троян В.И., Малимон А.Н. Передача эталонных радиочастот по волоконно-оптической линии с электронной компенсацией возмущений // Измерительная техника, 2015, № 9, с. 34–37.
 251. Елагин А.В., Дорогова И. Е. Оценка влияния релятивистских эффектов на траекторию движения искусственных спутников Земли // Вестник СГУГиТ, 2015, вып. 3(31), с. 32–38.
 252. Садовников М.А., Шаргородский В.Д. Лазерные и радио-лазерные системы для передачи шкал времени и частотно-временных измерений в ГЛОНАСС // Метрология времени и пространства. Материалы VIII Международного симпозиума, 14–16 сентября 2016 г., г. Санкт-Петербург. – Менделеево: ФГУП «ВНИИФТРИ», 2016, с. 27–32.
 253. Игнатенко И.Ю., Жестков А.Г., Шлегель В.Р., Емельянов В.А. Метрологические аспекты лазерно-локационных измерений // Метрология времени и пространства. Материалы VIII Международного симпозиума, 14–16 сентября 2016 г., г. Санкт-Петербург. – Менделеево: ФГУП «ВНИИФТРИ», 2016, с. 192.
 254. Фатеев В.Ф., Рыбаков Е.А., Сысоев В.П. Результаты экспериментов по измерению разности ортометрических высот с помощью перевозимых квантовых часов // Тезисы доклада на втором Международном симпозиуме «Азиатско-Тихоокеанская космическая геодинамика APSG-2015», Москва, 25–28 августа 2015 г.
 255. Фатеев В.Ф., Сысоев В.П. Компенсация релятивистских эффектов в движущихся квантовых часах // Доклады VII Международного симпозиума «Метрология времени и пространства», 17–19 сентября 2014 г., Менделеево: ФГУП «ВНИИФТРИ». – 2015, с. 130–144.
 256. Fateev V.F., Zharikov A.I., Sysoev V.P., Ribakov E.A., Smirnov F.R. Experimental Determination of Orthometric Heights Difference Based on Gravitational Effects of Time Dilation, 4th IAG Symposium on Terrestrial Gravimetry: Static and Mobile Measurements, 12–15 April 2016, Saint Petersburg, Russia.
 257. Сысоев В. П. и др. Перевозимые квантовые часы на основе водородного генератора // Метрология времени и пространства: Тр. 6-го Международного симпозиума – М.: ВНИИФТРИ, 2012, с. 31–33.
 258. Скакун И.О., Митрикас В.В. Сличение шкал времени с использованием сигналов ГНСС в режиме Common View с разрешением фазовых неоднозначностей // Полет, 2014, № 1, с. 50–57.
 259. www.keitiev.nnz-ipc.ru.

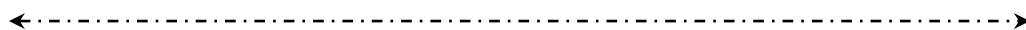
- ←----->
260. Finkelstein A., Kreinovich V., Pandey S. Relativistic reduction for radiointerferometric observables // *Astrophysics Space Science*, 1983, V. 94, p. 233–247.
 261. Brumberg V. Post-post Newtonian propagation of light in the Schwarzschild field // *Kin. Fiz. Neb.*, 1987, Vol. 3, p. 8–13 (in Russian).
 262. Kopeikin S. Theory of relativity in observational radio astronomy // *Sov. Astron.*, 1990, Vol. 34, p. 5–9.
 263. Kopeikin S., Han W-B. The Fresnel–Fizeau effect and the atmospheric time delay in geodetic VLBI // *J. Geod.*, 2015, Vol. 89, p. 829–835.
 264. Sekido M., Fukushima T. VLBI model for radio source at finite Distance // *J. Geod.*, 2006, Vol. 86, p. 137–149.
 265. Soffel M., Müller J., Wu X., Xu C. Consistent relativistic VLBI model with picosecond accuracy // *Astron. J.*, 1991, Vol. 101, p. 2306–2310.
 266. Soffel M., Kopeikin S., Han W-B. Advanced relativistic VLBI model for geodesy // *Journal of Geodesy*, Oct. 2016.
 267. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и радиоинженеров. – М.: Изд-во «Наука», 1970, 720 с.
 268. Dassaud D., Auriol A., Besson B., Jayles C., Raizonville P., Bouchet M. DORIS Instrument and System: Description and Performance // 58th IAC (International Astronautical Congress), International Space Expo, Hyderabad, India, Sept. 24–28, 2007, IAC-07-B2.1.08.
 269. Besson B., Jayles C. DORIS instrument and system: description and performance // *Proceedings of the Advanced RF Sensors for Earth Observation 2006 (ASRI)*, Workshop on RF and Microwave Systems, Instruments & Sub-Systems, ESA7ESTEC, Dec. 5–6, 2006, Noordwijk, The Netherlands.



Приложение

Список основных гравитационных постоянных, рекомендованных Международной службой вращения Земли и опорных систем отсчета IERS (International Earth Rotational Service) [10]

Наименование или определение постоянной величины	Обозначение	Значение постоянной	Неопределенность значения постоянной
Общие постоянные			
Гравитационная постоянная	γ	$6,67428 \cdot 10^{11} \text{ м}^3 \text{ кг}^{-1} \text{ с}^{-2}$	$6,7 \cdot 10^{-15} \text{ м}^3 \text{ кг}^{-1} \text{ с}^{-2}$
Скорость света	c	$2,99792458 \cdot 10^8 \text{ м/с}$	–
Квадрат скорости света	c^2	$8,987551787 \cdot 10^{16} \text{ м}^2/\text{с}^2$	–
Земные постоянные			
Геоцентрическая гравитационная постоянная	μ_e	$3,986004418 \cdot 10^{14} \text{ м}^3/\text{с}^2$	$8 \cdot 10^5 \text{ м}^3/\text{с}^2$
Экваториальный радиус Земли	R_e	6,3781366 м	0,1 м
Коэффициент при второй зональной гармонике потенциала	J_2	$1,0826359 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-10}$
Коэффициент при третьей зональной гармонике потенциала	J_3	$-2,532 \cdot 10^{-6}$	
Ускорение свободного падения на экваторе (среднее)	g_E	$9,7803278 \text{ м/с}^2$	$1 \cdot 10^{-6} \text{ м/с}^2$
Потенциал на поверхности геоида	φ_G	$6,26368534 \cdot 10^7 \text{ м}^2/\text{с}^2$	$0,5 \text{ м}^2/\text{с}^2$
Астрономическая единица	$a.e.$	$1,495978707 \cdot 10^{11} \text{ м}$	3 м
Большая полуось орбиты Земли вокруг Солнца	a_s	$1,49598261 \cdot 10^{11} \text{ м}$, или $1,00000261 \text{ а.е.}$	3 м
Перигелий орбиты Земли	ρ_{SP}	$1,47098290 \cdot 10^{11} \text{ м}$,	
Афелий орбиты Земли	ρ_{SA}	$1,52098232 \cdot 10^{11} \text{ м}$,	
Масштабный коэффициент потенциала γ_e / φ_G	R_G	6363672,8 м	0,1 м
Угловая скорость вращения	Ω_e	$7,292115 \cdot 10^{-5} \text{ 1/с}$	$(10^{-8} - 10^{-10})\Omega$
Солнечные постоянные			
Гелиоцентрическая гравитационная постоянная	μ_s	$1,32712442099 \cdot 10^{20} \text{ м}^3/\text{с}^2$	$1 \cdot 10^{10} \text{ м}^3/\text{с}^2$
Коэффициент второй зональной гармонике потенциала	J_{2S}	$2,0 \cdot 10^{-7}$	
Экваториальный радиус	R_s	$6,9551 \cdot 10^8 \text{ м}$	
Лунные постоянные			
Селеноцентрическая гравитационная постоянная	μ_M	$4,9040607 \cdot 10^{12} \text{ м}^3/\text{с}^2$	
Размер большой полуоси земной орбиты	a_M	$3,84399 \cdot 10^8 \text{ м}$	
Перигей орбиты	ρ_{MP}	$3,63104 \cdot 10^8 \text{ м}$	
Апогей орбиты	ρ_{MA}	$4,05696 \cdot 10^8 \text{ м}$	



СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
Часть I. Физические основы релятивистской метрологии	
<i>1. Физическое содержание и экспериментальные основы релятивистской метрологии пространства-времени</i>	<i>10</i>
1.1. Метрика пространства и времени в классической физике Ньютона	10
1.2. Метрические свойства пространства-времени в специальной теории относительности	11
1.2.1. Преобразования Лоренца	11
1.2.2. Метрические следствия преобразований Лоренца	15
1.2.3. Преобразование параметров волны в специальной теории относительности	18
1.2.4. Метрические свойства четырехмерного пространства-времени	23
1.2.4.1. Пространственно-временной интервал для электромагнитной волны	23
1.2.4.2. Пространственно-временной интервал для любых событий. Открытие Пуанкаре	24
1.2.4.3. Интервал в четырехмерном пространстве-времени и его свойства	25
1.3. Метрические свойства пространства-времени в общей теории относительности	28
1.3.1. Геометрическая модель гравитационного поля	28
1.3.2. Определение длины и собственного времени в гравитационном поле Шварцшильда	32
1.3.2.1. Элемент длины в поле Шварцшильда	32
1.3.2.2. Интервал собственного времени в поле Шварцшильда	33
1.3.2.3. Соотношение частот задающих генераторов двух часов в гравитационном поле	36
1.3.2.4. Измерение метрических свойств времени в гравитационном поле	37
1.3.3. Электромагнитная волна в вакууме как индикатор метрических свойств пространства-времени	44
1.3.3.1. Задержка электромагнитной волны в гравитационном поле	44
1.3.3.2. Влияние вращения на задержку волны. Эффект Саньяка	47
1.3.3.3. Гравитационное смещение частоты волны	50
1.3.4. Оптическая модель гравитационного поля и ее свойства	53
1.3.4.1. Экспериментальные подтверждения оптических свойств гравитационного поля	53
1.3.4.2. Экспериментальные подтверждения принципа эквивалентности	55
1.3.4.3. Экспериментальное обнаружение гравитационных волн по изменению их оптических свойств	57
Выводы к разделу 1	59
<i>2. Метрика околоземного пространства-времени в различных системах отсчета</i>	<i>62</i>
2.1. Необходимые сведения из геометрии Гаусса-Римана	62
2.1.1. Определение скаляра, вектора и тензора в криволинейных координатах	62
2.1.2. Элементы тензорной алгебры	65
2.1.3. Свойства фундаментального метрического тензора	66
2.1.4. Трехмерный метрический тензор	67
2.1.5. Ковариантное дифференцирование	70

Релятивистская метрология околоземного пространства-времени

2.2. Метрический тензор околоземного пространства-времени в геоцентрической небесной системе отсчета GCRS	73
2.2.1. Исходный метрический тензор для инерциальной геоцентрической небесной системы отсчета GCRS	73
2.2.2. Основные характеристики гравитационного потенциала Земли	75
2.2.2.1. Скалярный потенциал гравитационного поля Земли	75
2.2.2.2. Ускорение свободного падения	76
2.2.2.3. Градиент гравитационного ускорения поля Земли (гравитационный градиент)	77
2.2.2.4. Векторный потенциал ГПЗ	78
2.2.3. Приливные потенциалы Луны и Солнца	79
2.2.4. Общая форма четырехмерного и трехмерного метрических тензоров для инерциальной системы отсчета GCRS (ICRS)	81
2.2.5. Упрощенные формы метрических тензоров для системы GCRS (ICRS)	82
2.3. Метрический тензор околоземного пространства-времени в системе отсчета, вращающейся вместе с Землей	84
2.3.1. Общая характеристика систем отсчета, связанных с неравномерно вращающейся Землей	84
2.3.2. Характеристики неравномерности вращения Земли	88
2.3.3. Метрический тензор в ITRS с учетом неравномерности вращения Земли	90
2.4. Метрический тензор околоземного пространства-времени во вращающейся орбитальной системе отсчета	94

Часть II. Релятивистская метрология времени, частоты и расстояний

3. Релятивистская метрология времени и расстояний на поверхности Земли	99
3.1. Собственное время в слабо изменяющемся гравитационном поле	99
3.1.1. Релятивистское определение интервала собственного времени	99
3.1.2. Обобщенная формула для расхождения временных шкал двух стандартов	104
3.1.3. Методы релятивистской синхронизации пространственно разнесенных часов на основе компенсации сдвигов времени и частоты	106
3.1.3.1. Релятивистская синхронизация на основе коррекции шкалы времени	106
3.1.3.2. Релятивистская синхронизация на основе коррекции частоты задающих генераторов	107
3.1.3.3. Комбинированная релятивистская синхронизация	108
3.2. Метрика расстояний в околоземном пространстве-времени	109
3.3. Взаимное релятивистское смещение шкал собственного времени двух стационарных наземных часов	113
3.3.1. Практические релятивистские шкалы времени в околоземном пространстве и связь между ними	113
3.3.1.1. Шкалы атомного времени	113
3.3.1.2. Координированные шкалы времени	113
3.3.1.3. Шкалы координатного времени	114
3.3.2. Общее определение релятивистского расхождения шкал собственного времени и частоты наземных стационарных часов	117
3.3.3. Постоянные релятивистские смещения частоты и времени наземных часов	120

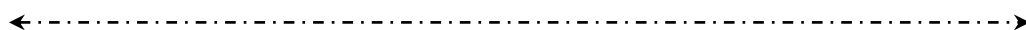
3.3.3.1. Смещения, вызванные разностью статических потенциалов ГПЗ	121
3.3.3.2. Представление разности потенциалов ГПЗ через потенциал геоида	122
3.3.3.3. Смещения, вызванные эффектом Доплера II порядка.....	124
3.3.3.4. Смещения, вызванные моментом импульса Земли	124
3.3.4. Приливные релятивистские смещения частоты и времени наземных часов	125
3.3.5. Релятивистские смещения частоты и времени, вызванные неравномерностью вращения Земли	129
3.4. Релятивистские смещения частоты и времени в наземных мобильных атомных часах	131
3.4.1. Общее решение	131
3.4.2. Релятивистская синхронизация мобильных часов и обеспечение ее точности.....	135
3.4.3. Свойства релятивистских эффектов в наземных мобильных квантовых часах	139
3.4.3.1. Движение обоих часов по морской (океанской) поверхности.....	139
3.4.3.2. Стационарное размещение часов на суше ($V = 0$).....	139
3.4.3.3. Движение мобильных часов по замкнутому контуру с возвращением мобильных часов в исходную точку	140
3.4.3.4. Свойство физической универсальности гироскопического эффекта.....	141
3.5. Выводы к разделу 3	142
4. Релятивистская синхронизация наземных и спутниковых часов	145
4.1. Исходные соотношения для системы часов «спутник – Земля».....	145
4.2. Основная составляющая релятивистского смещения времени спутниковых и наземных часов	150
4.2.1. Представление через истинную и среднюю аномалию.....	150
4.2.2. Представление через эксцентрическую аномалию.....	154
4.2.3. Представление через текущий радиус-вектор и скорость спутника	155
4.3. Релятивистские эффекты смещения частоты и времени спутниковых часов, вызванные неоднородностью ГПЗ.....	158
4.3.1. Смещения частоты и времени, вызванные непосредственным влиянием потенциалов зональных и других гармоник потенциала	158
4.3.1.1. Эффект от воздействия потенциала второй зональной гармоники	159
4.3.1.2. Эффект воздействия потенциала третьей зональной и других гармоник потенциала	161
4.3.2. Смещения частоты и времени, вызванные влиянием потенциала второй зональной гармоники на высоту орбиты спутника.....	163
4.4. Приливные лунно-солнечные релятивистские смещения частоты и времени спутниковых и наземных часов	166
4.4.1. Приливные релятивистские смещения наземных базовых часов	166
4.4.2. Приливные релятивистские смещения спутниковых часов	168
4.5. Смещения частоты и времени наземных часов, вызванные неравномерностью вращения Земли	170
4.6. Влияние других факторов на основной релятивистский эффект через влияние на параметры орбиты спутника.....	172
4.7. Методы релятивистской синхронизации часов в системе «космос – Земля».....	174
4.7.1. Вариант синхронизации № 1	174
4.7.2. Вариант синхронизации № 2	175
4.8. Выводы к разделу 4	177



Часть III. Оптическая модель околоземного пространства-времени и распространение радиоволн

5. Электродинамика сред, движущихся в неинерциальных системах отсчета	180
5.1. Постановка задачи исследования	180
5.2. Краткий обзор современного состояния оптических моделей гравитационного поля	183
5.3. Электромагнитное поле в проводящей изотропной среде, движущейся в гравитационном поле	186
5.3.1. Ковариантные уравнения поля в движущейся изотропной среде	186
5.3.2. Поля и токи в проводящих изотропных средах, движущихся в произвольных системах отсчета	189
5.3.2.1. Уравнения электродинамики при первой форме связи векторов и тензоров поля	189
5.3.2.2. Уравнения электродинамики при второй форме связи векторов и тензоров поля	196
5.4. Электромагнитная волна в изотропной проводящей среде, движущейся в неинерциальной системе отсчета	198
5.4.1. Волновое уравнение для ЭМВ в изотропной проводящей среде	198
5.4.2. Дисперсионное соотношение, волновой вектор, обобщенный коэффициент преломления среды	202
5.5. Уравнения полей и волн в анизотропных средах	206
5.5.1. Материальные соотношения на основе 4-тензора среды	206
5.5.2. Дисперсионное соотношение для движущейся анизотропной среды	208
5.6. Уравнения полей и волн в движущихся средах на основе представления о поляризации среды	211
5.6.1. Уравнения полей на основе представления о поляризации для инерциальных систем	211
5.6.2. Ковариантная форма уравнений поля на основе тензоров поляризации	215
5.6.3. Уравнения поля в гравитационном поле на основе векторов поляризации	218
5.7. Выводы к разделу 5	221
6. Параметры распространения радиоволн на основе оптической модели гравитационного поля	224
6.1. Фаза волны и обобщенный коэффициент преломления пространства-времени в произвольной системе отсчета с учетом движения среды	224
6.2. Уравнения распространения электромагнитных волн в неоднородном гравитационном поле	228
6.2.1. Уравнение эйконала	228
6.2.2. Релятивистская рефракция луча в гравитационном поле на основе вариационного принципа Ферма	230
6.2.3. Релятивистская рефракция в гравитационном поле вращающейся системы отсчета	233
6.3. Поворот плоскости поляризации волны в неоднородном гравитационном поле	239
6.4. Время распространения электромагнитной волны в гравитационном поле	241
6.5. Частота электромагнитной волны вдоль трассы распространения	244

6.5.1. Связь собственных частот волны в двух точках трассы	244
6.5.2. Инвариантное гравитационное смещение частоты как характеристика гравитационного поля	248
6.5.3. Релятивистское смещение собственной частоты радиоволны вдоль трассы распространения	252
6.6. Фазовая и групповая скорости распространения электромагнитных волн в изотропных средах, движущихся в гравитационном поле	255
6.6.1. Фазовая скорость волны в изотропной среде	255
6.6.2. Групповая скорость волны в изотропной среде	257
6.7. Скорость волны в диспергирующих средах, движущихся в гравитационном поле	259
6.7.1. Фазовая скорость в диспергирующей среде	259
6.7.2. Групповая скорость волны в диспергирующей среде	261
6.8. Фаза волны в гравитационном поле	265
6.9. Выводы к разделу 6	266
7. Параметры радиоволн в геоцентрической земной системе отчета ITRS	267
7.1. Оптические характеристики гравитационного поля и атмосферы в системе ITRS	267
7.1.1. Показатель преломления заполненного сплошной средой околоземного пространства-времени в ITRS	267
7.1.2. Коэффициент гравитационного преобразования частоты в ITRS	271
7.1.3. Коэффициент связи собственного (измеряемого) и координатного времени в ITRS	274
7.2. Релятивистские параметры радиоволн в односторонней космической измерительной радиолинии в системе ITRS	276
7.2.1. Время распространения	276
7.2.2. Частота радиоволны	280
7.2.3. Фаза радиоволны	281
7.2.4. Рефракция и абберация волны	282
7.2.5. Поворот плоскости поляризации волны	283
7.3. Релятивистские параметры радиоволн в двусторонней (запросной) космической радиолинии в системе ITRS	284
7.3.1. Время распространения в запросной радиолинии	284
7.3.2. Частота волны в запросной радиолинии	285
7.3.3. Фаза волны, угол релятивистской рефракции и поворот плоскости поляризации в запросной радиолинии	289
7.4. Релятивистские параметры оптических волн в глобальных волоконно-оптических линиях связи	291
7.4.1. Основные показатели условий распространения в волокне	291
7.4.2. Параметры волны в односторонней оптической линии	292
7.4.3. Параметры волны в запросной оптической линии	294
7.5. Выводы к разделу 7	296



**Часть IV. Прикладная релятивистская метрология
околоземного пространства-времени**

8. Релятивистская метрология времени и частоты в глобальных навигационных спутниковых системах	298
8.1. Исходные соотношения, определяющие взаимные релятивистские смещения частоты и времени спутниковых часов и Центрального синхронизатора в системе ГЛОНАСС	298
8.2. Оценка величины релятивистских смещений бортового времени и частоты в ГНСС ГЛОНАСС	303
8.3. Методы релятивистской синхронизации бортовых и наземных шкал времени в системе ГЛОНАСС	307
8.3.1. Комбинированный аналогово-цифровой метод.....	307
8.3.2. Альтернативный метод релятивистской синхронизации на основе численного интегрирования.....	308
8.4. Релятивистские смещения бортового времени для других навигационных систем и методы их компенсации.....	311
8.4.1. Релятивистские смещения времени в системе GPS.....	311
8.4.2. Релятивистские смещения в системе GALILEO.....	314
8.4.3. Релятивистские смещения в системе BeiDou.....	316
8.5. Межспутниковая релятивистская синхронизация ГНСС	319
8.6. Выводы к разделу 8.....	322
9. Релятивистская метрология наземных и космических радиолиний синхронизации	325
9.1. Релятивистские эффекты в наземно-космических радиолиниях синхронизации.....	325
9.1.1. Релятивистские эффекты в запросно-беззапросных радиолиниях синхронизации с компенсацией задержки на трассе «Земля – космос».....	325
9.1.1.1. СВЧ-радиолиния с измерениями задержек на Земле	325
9.1.1.2. Лазерная радиолиния с измерениями задержек на Земле и на борту КА	329
9.1.2. Релятивистские эффекты в дуплексной системе синхронизации «Земля – космос» с компенсацией задержки на трассе.....	330
9.1.2.1. Дуплексная прямая радиолиния	330
9.1.2.2. Дуплексная радиолиния с ретрансляцией через геостационарный спутник.....	332
9.1.3. Релятивистские явления в радиолиниях сличения частот с компенсацией эффекта Допплера I порядка на трассе «Земля – космос»	333
9.1.3.1. Запросно-беззапросные радиолинии компенсации	333
9.1.3.2. Запросная радиолиния с преобразованием частоты на борту КА	337
9.2. Релятивистская синхронизация с помощью наземных глобальных ВОЛС	341
9.2.1. Постановка задачи	341
9.2.2. Релятивистская синхронизация с компенсацией задержки в ВОЛС	342
9.2.2.1. Дуплексный метод	342
9.2.2.2. Запросно-беззапросный метод.....	344
9.2.3. Релятивистские поправки при сличении частот на основе ВОЛС	345
9.2.4. Релятивистские поправки при передаче фазы и частоты высокостабильного СЧВ с помощью ВОЛС.....	348
9.3. Выводы к разделу 9	352

←----->	
10. Релятивистская метрология космических измерительных радиолиний	354
10.1. Релятивистские погрешности измерений дальности и скорости в наземных НАП ГНСС	354
10.1.1. Релятивистские погрешности измерений псевдодальности и разности псевдодальностей	354
10.1.1.1. Измерение псевдодальности	354
10.1.1.2. Измерение разности псевдодальностей	356
10.1.1.3. Измерение псевдодальности в дифференциальном режиме	356
10.1.2. Релятивистские погрешности измерений псевдоскорости и разности псевдоскоростей	357
10.2. Релятивистская метрология космических геодезических систем	362
10.2.1. Релятивистские погрешности при определении орбит геодезических спутников	362
10.2.2. Релятивистские погрешности геодезических НАП ГНСС	367
10.2.2.1. Наземные геодезические НАП ГНСС	367
10.2.2.2. Космические геодезические НАП ГНСС	372
10.2.3. Релятивистские погрешности систем контроля траекторий геодезических и навигационных спутников	373
10.2.3.1. Лазерные спутниковые дальнометры	373
10.2.3.2. Доплеровские измерители радиальной скорости	375
10.3. Выводы к разделу 10	378
11. Новые релятивистские эксперименты с атомными часами	380
11.1. Наземные эксперименты по измерению разности гравитационных потенциалов с помощью атомных часов	380
11.1.1. Замысел наземных экспериментов	380
11.1.2. Исходные соотношения	382
11.1.3. Подготовка экспериментов	383
11.1.4. Результаты первого эксперимента	385
11.1.5. Результаты второго эксперимента	386
11.1.6. Возможные практические применения измерений разности потенциалов	387
11.2. Экспериментальная проверка метода релятивистской синхронизации наземных транспортируемых атомных часов	389
11.2.1. Исходные соотношения	389
11.2.2. Вычисление релятивистского смещения времени, накапливаемого вдоль трассы	392
11.2.3. Предварительная оценка максимальных ошибок вычислений	392
11.2.4. Цель, оснащение и результаты эксперимента	395
11.2.5. Верификация метода релятивистской синхронизации	398
11.2.6. Оценка результатов эксперимента	400
11.3. Релятивистские эксперименты по обнаружению электростатического и магнитного поля, наведенного вращением	401
11.3.1. Основные уравнения электродинамики вращающихся систем	401
11.3.2. Ротационный эксперимент по обнаружению гироэлектрического поля в магнитном поле	404
11.3.3. Ротационный эксперимент по обнаружению гироэлектрического поля в системе проводников с током	405
11.3.4. Ротационный эксперимент по обнаружению гиромангнитного поля в электрическом конденсаторе	407
11.4. Выводы к разделу 11	409
Заключение	411
Список литературы	413
Приложение	431

В.Ф. Фатеев

**Релятивистская метрология
околоземного пространства-времени**

Монография

Редактор,
компьютерная вёрстка

Н.А. Степанова

Дизайн обложки

Г.А. Мирошникова

ФГУП «ВНИИФТРИ»

Подписано в печать 12.01.2017 г. Формат 70x90^{1/16}

Уч.-изд. л. 28,22. Печ. л. 27,44. Тираж 500 экз.

Печать офсетная. Бумага офсетная. Заказ № 10

Полиграфучасток ФГУП «ВНИИФТРИ»,
141570, п/о Менделеево Солнечногорского р-на Московской обл.